数理解析研究所講究録
634巻 1987年 278-293

完全交叉に関するＨａｒｔｓｈｏｒｎｅ予想の周辺

京大　理　　遊佐　毅

§１　完全交叉に関するＨａｒｔｓｈｏｒｎｅ予想

以下では簡単のために、すべて複素数体　$\mathbb{C}$　上において考え、底空間　Ｘ　は非特異射影多様体で次元が正なるもの、ベクトル束などは、すべて正則なもののみを対象とする。

定義（１．１）　$j : X \hookrightarrow \mathbb{P}^N = P$　を埋め込みとする。（以下、この記号を通用）

（１）　ｊ（Ｘ）　が完全交叉（Ｃ．Ｉ．）　⇔　ｊ（Ｘ）　がスキーム論的に余次元ぶんの個数の同次多項式によって定義される。

（２）　ｊ（Ｘ）　が　ｐｒｏｊｅｃｔｉｖｅｌｙ　ｎｏｒｍａｌ　（Ｐ．Ｎ．）
$\Leftrightarrow j^* : H^0(P, \mathcal{O}_P(m)) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{O}_X(m)) \quad \forall m \in \mathbb{Z}$
が全射。（$H^1(P, I_X(m)) = 0 \quad \forall m \in \mathbb{Z}$　と同値）

（３）　ｊ（Ｘ）　が　ｌｉｎｅａｒｌｙ　ｎｏｒｍａｌ　（Ｌ．Ｎ．）
⇔　（２）　で　$m = 1$　のところが全射。

（４）　ｊ（Ｘ）　が　ｑｕａｄｒａｔｉｃａｌｌｙ　ｎｏｒｍａｌ　（Ｑ．Ｎ．）
⇔　（２）　で　$m = 2$　のところが全射。

注意（１．２）　①　明らかに　（１）⇒（２）⇒（３），（４）

②　Ｃ．Ｉ．が成立　⇒（ア）　$H^i(X, \mathcal{O}_X(m)) = 0$　特に、　$q^i(X) = 0$
（$m \in \mathbb{Z}$，$0 < i < \dim(X)$）　従って　アーベル曲面などは、決して　Ｃ．Ｉ.にはならない。　；　（イ）　$\exists \nu_0 \in \mathbb{Z}$　ｓ．ｔ．　$\omega_X = j^* \mathcal{O}_P(\nu_0)$　；
（ウ）　$\mathrm{Pic}(X) \simeq \mathbb{Z} j^* \mathcal{O}_P(1)$　　ｉｆ　$\dim(X) \geqq 3$

③　Ｘ　は常に、適当な埋め込み　ｊ　をとることにより　ｊ（Ｘ）　が　Ｐ．Ｎ．　であるようにできる。

あととの比較のために次のような最も簡単な例を見ておこう。

例（１．３）

$j : X = \mathbb{P}^1 \ni (T_0 : T_1) \longmapsto (Z_0 : Z_1 : Z_2 : Z_3) = (T_0^3 : T_0^2 T_1^1 : T_0^1 T_1^2 : T_1^3) \in \mathbb{P}^3 = P$　ｔｗｉｓｔｅｄ　ｃｕｂｉｃ　を考えると、これは　Ｐ．Ｎ．　ではあるが、明らかに　Ｃ．Ｉ．　ではない。　このときに、

$\dim(X)=1<\operatorname{codim}(X)=2$ であることに注目しておこう。

さて、我々の話しの発端となった定理を次にあげよう。 これはLefschetzの超平面切断定理を余次元の高いものへと拡張したものと見なすこともできる

定理（1．4） （Barth, Larsen 1970～74 ［8］ ）

(1) $H^i(\mathbb{P}^N, \mathbb{Z}) \simeq H^i(X, \mathbb{Z})$ if $i \leqq 2\cdot\dim(X)-N$
(2) $\pi_1(X)=1$ if $1 \leqq 2\cdot\dim(X)-N$
(3) $\operatorname{Pic}(X) \simeq \mathbb{Z}\mathcal{O}_X(1)$ if $2 \leqq 2\cdot\dim(X)-N$
(4) $\pi_i(\mathbb{P}^N, X)=0$ if $i \leqq 2\cdot\dim(X)-N+1$

（説明） （1）～（3） は（4）から導かれる。 ‖

次も非常に有用な定理である。

定理（1．5） （Barth, Ogus 参考 ［5］ の Hartshorne の論説）

整数 q （$\leqq\dim(X)$）を、一つ固定する。この時、以下の三条件は同値。
(1) $H^i(\mathbb{P}^N, \mathbb{C}) \simeq H^i(X, \mathbb{C})$ $\forall i \leqq q$
(2) $H^i(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}_P) \simeq H^i(\widehat{\mathbb{P}}^N, \widehat{\mathcal{O}}_P)$ $\forall i \leqq q$ ただし、＾ は X に沿った完備化 $(|X|, \varprojlim_t \mathcal{O}_P/I_X{}^t)$ を表すこととする。
(3) $H^i(\mathbb{P}^N, F) \simeq H^i(\widehat{\mathbb{P}}^N, \widehat{F})$ $\forall i \leqq q, \forall F$: locally free sheaf on $\mathbb{P}^N$

特に、 $q=0$ or $q=2\cdot\dim(X)-N$ ならば総て常に成立。

種々の C．I．ではないような例を構成してみると 次元に対して余次元の方が比較的に大きくなることから次のような予想がなされた。

予想（1．6） （Hartshorne 1974 ［4］）

(1) $\dim(X) > 2(N-1)/3 \Rightarrow$ L．N．（cf. §4）
(2) $\dim(X) > 2N/3 \Rightarrow$ C．I．（C．I．予想）

蛇足（１．７）　（ｃｆ．　Ｕｓａ　　数理研講究録６２１　または［１５］）

ｄｉｍ（Ｘ）≪Ｎ　の場合には、もちろんたくさんの　Ｃ．Ｉ．ではないようなものがあるわけであるが、埋め込み　ｊ　が　Ｐ．Ｎ．となるものだけに注目すると、その方程式系が非常に美しい構造を持っていることが多い。　例えば、埋め込み　ｊ　が　Ｐ．Ｎ．の仮定の下に次のようなことが示せる。　切断　$\phi \in H^0(X, \Omega^1_{\mathbb{P}}(m)\otimes O_X)$　が与えられたとする。この時、次の自然な図式を考える。

$$\begin{tikzcd}
H^0(\mathbb{P}^N, \Omega^1_{\mathbb{P}}(m)) \arrow[r] \arrow[dr, "u"'] & H^0(\widehat{\mathbb{P}^N}, \widehat{\Omega^1_{\mathbb{P}}(m)}) \arrow[r] \arrow[d, "v"] & H^0(\mathbb{P}^N, \Omega^1_{\mathbb{P}}(m)\otimes O_{\mathbb{P}}/I_X^2) \arrow[dl, "w"] \\
& H^0(X, \Omega^1_{\mathbb{P}}(m)\otimes O_X) &
\end{tikzcd}$$

この時、次の三条件は同値：①　$\exists \zeta \in H^0(\mathbb{P}^N, \Omega^1_{\mathbb{P}}(m))$　ｓ．ｔ．$u(\zeta)=\phi$；②$\exists \eta \in H^0(\widehat{\mathbb{P}^N}, \widehat{\Omega^1_{\mathbb{P}}(m)})$　ｓ．ｔ．　$v(\eta)=\phi$　；③　$\exists \xi \in H^0(\mathbb{P}^N, \Omega^1_{\mathbb{P}}(m)\otimes O_{\mathbb{P}}/I_X^2)$　ｓ．ｔ．　$w(\xi)=\phi$．

注目すべき点としては　（ア）　ξ　などを持たない　ϕ　が常に存在し、それらは　ｊ（Ｘ）　の射影方程式の各々と”１：１”対応する。　（イ）　ϕ　の　ｆｏｒｍａｌ　ｌｉｆｔｉｎｇ　η　を構成する時に現れる　無限個の障害空間は一般には消えず、実際に　ｆｏｒｍａｌ　ｌｉｆｔｉｎｇ　η　を持つような　ϕ　についても、順次　ｓ次の無限小引き上げから　ｓ＋１次の無限小引き上げるときの、各々の構成がまずければあるところ以上は引き上げることが不可能となることも起り得る ── が挙げられる。

このように、　ｊ（Ｘ）　の無限小　１次近傍にすべて、その射影方程式の情報が隠されているという点で、原理的には、Ｐ．Ｎ．である埋め込みに関する限り、その余法束　$N^\vee_{X/P}$　が埋め込みのすべての情報をにぎっているということができる。

（訂正）上に挙げた論説の中のｐ．４１の定義がまちがっていました。　Ｘ　が正規のときは正しいのですが、一般にはこれでは不充分でした。おわび致します。詳しくは［１５］を御覧下さい。

例えば、③のξが常にformal liftingをもつとは限らない

§２　$\mathbb{P}^N$上の　ｖｅｃｔｏｒ　ｂｕｎｄｌｅ　との関連

①　$\mathbb{P}^N$上のベクトル束から　$\mathbb{P}^N$の非特異閉部分多様体をつくる話

$\mathbb{P}^N=P$　上の　ｒ－ｂｕｎｄｌｅ　Ｅ　が与えられたとしよう。　ベクトル束の分類上は　⊗ｌｉｎｅ　ｂｕｎｄｌｅ　のぶんは無視して良いから、充分大きな自然数　ｔ　をとり　$\otimes O_P(t)$　により　Ｅ　は大域切断により生成されている（ｇ．ｂ．ｇ．ｓ．）

とする。即ち、 $H^0(P, E) \otimes O_P \xrightarrow{\text{surj.}} E$ とする。 この核層を F と書くことにする。 これらの dual の射影化を考えることにより、

$$\Phi : \mathbb{P}(F^\vee) \to \mathbb{P}(H^0(P, E)^\vee) \times P \to \mathbb{P}(H^0(P, E)^\vee)$$
$$\| $$
$$\{([\sigma], x) \in (H^0(P, E) - \{0\} / \mathbb{C}^*) \times P \mid (\sigma)_0 \ni x\}$$

morphism Φ に generic smoothness を使って、general な $\sigma \in H^0(P, E)$ について $X = (\sigma)_0$ は smooth and $\mathrm{codim}(X) = r$; または $X = \phi$ となることがわかる。
いま O_X の Koszul 分解をとると、

$$\cdots\cdots \to \wedge^2 E^\vee \to E^\vee \to O_P \to O_X \to 0 \quad (\text{exact})$$

特に、 $E^\vee|X \simeq N^\vee_{X/P}$, $\omega_X \simeq \omega_P \otimes \det(E)|X \simeq j^* O_P(^\exists \nu_0)$ となる。

② $\mathbb{P}^N$ の非特異閉部分多様体からベクトル束をつくる話

上で見たことからただちに、一般には $\mathbb{P}^N = P$ の非特異閉部分多様体 X を適当なベクトル束の零点としては表せないことがわかる。一方canonical bundle ω_X が extendable line bundle である時には、$\mathrm{codim}(X) = 2$ の仮定の下で次のような定理が知られている。

定理(2.1) (Serre, Horrocks, Barth etc. cf. [10])
(仮定) $\mathrm{codim}(X) = 2$, $\omega_X \simeq j^* O_P(\nu)$

$$\Rightarrow \exists !\, E : 2\text{-bundle on } P,\ \exists \sigma \in H^0(P, E) \quad \text{s.t.} \quad X = (\sigma)_0$$

特に、 X が C.I. である必要かつ充分なる条件は、この E が line bundle の直和に分かれることである。

(説明) E が得られたとすると、 $0 \to \det(E^\vee) \to E^\vee \to I_X \to 0$ (完全) が得られる。 $L = \det(E^\vee)$ は ω から回復できる。 従って、$\mathrm{Ext}^1_{O_X}(I, L)$ を考えればよく、この次元が 1 であることから分かる。‖

注意（２．２）　ｃｏｄｉｍ＝２　の　Ｃ．Ｉ．予想　$\Leftrightarrow$　$N \geqq 7$　のとき　$\mathbb{P}^N$ 上の すべての　２－ｂｕｎｄｌｅ　は　ｓｐｌｉｔ。

例（２．３）　（Ｈｏｒｒｏｃｋｓ，Ｍｕｍｆｏｒｄ　１９７３　［７］）
$\mathbb{P}^4$ には、ある２次元アーベル曲面　A^2 を埋め込むことができる。　$\omega_A \simeq O_A$ であるから、　$\mathbb{P}^4$ 上には　ｉｎｄｅｃｏｍｐｏｓａｂｌｅ　な　２－ｂｕｎｄｌｅ　E_{HM}　が存在している。　（論文中ではベクトル束の方から構成がなされている。）

③高い　ｒａｎｋ　のベクトル束について

定理（２．４）（Ｓｉｍｏｎｉｓ，Ｍａｒｕｙａｍａ　１９７１～７３　ｃｆ．［９］）

$N \geqq 2,\ r \geqq N \Rightarrow \exists$　Ｅ：ｉｎｄｅｃｏｍｐｏｓａｂｌｅ　ｒ－ｂｕｎｄｌｅ

注意（２．５）　上記の定理は　$\mathbb{P}^N$ 以外の一般の非特異射影多様体にかんするものの一部分である。

④低い　ｒａｎｋ　のベクトル束について

一般に　ｒａｎｋ　の低いベクトル束はつくりにくく、次のような結果がある。

定理（２．６）（Ｅ．Ｓａｔｏ　１９７７　［１３］）

$\mathbb{P}^{N'}$ を　$\mathbb{P}^{N'+1}$ の超平面とみて、与えられた　$\mathbb{P}^N$　上のベクトル束が充分高い次元の　$\mathbb{P}^{N+M}$　へとベクトル束として拡張できるならば、そのベクトル束は直線束の直和に分解する。

定理（２．７）（Ｗ．Ｄｅｃｋｅｒ　１９８５　ｃｆ．［６］　の　ｐ．２１７脚註）

E_{HM}　は　$\mathbb{P}^5$　へはベクトル束としては拡張できない。

次のことも注意しておこう。

命題（２．８）
Ｃ．Ｉ．予想が正しいならば　$r < N/3$　なる　ｉｎｄｅｃｏｍｐｏｓａｂｌｅ　な　$\mathbb{P}^N$ 上のｒ－ｂｕｎｄｌｅ　は存在しない。

（証明）　$r\geqq 2$ として O.K. $\therefore N\geqq 7$　E を与えられた r−bundle。

『$\exists\sigma\in\Gamma(P,E)$ s.t. $X=(\sigma)_0$ smooth and codim=r』

としてよい。　$\dim(X)=N-r>2N/3$ だから C.I.予想によって

X は $F=O_P(d_1)\oplus\cdots\oplus O_P(d_r)$ の適当な切断の zero locus

とも思える。 また $\dim(X)\geqq 2$ であることにも注意する。 次の完全列を考える。

$(*)_t\cdots$

$$0\to F^\vee\otimes E\otimes I_X{}^t/I_X{}^{t+1}\to F^\vee\otimes E\otimes O_P/I_X{}^{t+1}\to F^\vee\otimes E\otimes O_P/I_X{}^t\to 0$$

X は E 及び F の切断の zero locus であるから

$$E|_X\simeq N_{X/P}\simeq F|_X$$

この同型に対応する切断を　$1\in H^0(X,F^\vee\otimes E\otimes O_X)$ とする。

この切断を $(*)_t$ のコホモロジー完全系列を使って順次引き上げることを考える。このときの障害空間は

$$H^1(X,F^\vee\otimes E\otimes I_X{}^t/I_X{}^{t+1})\simeq H^1(X,N^\vee\otimes N\otimes S^t(N^\vee))$$
$$\simeq\bigoplus_i H^1(X,O_X(k_i))=0$$

ここでは 注意(1.2)② を使った。 従って、

$$\begin{array}{ccc} H^0(\widehat{P},\widehat{F^\vee\otimes E}) & \longrightarrow & H^0(X,F^\vee\otimes E\otimes O_X)\\ \Psi & & \Psi\\ \exists\xi & \longmapsto & 1\end{array}$$

次ぎに、定理(1.5)を用いて $H^0(P,F^\vee\otimes E)\simeq H^0(\widehat{P},\widehat{F^\vee\otimes E})$ であるから結局、$\exists\eta\in H^0(P,F^\vee\otimes E)$ s.t. $\eta|_X=1$

即ち、　$\eta:F\to E$ であって $\eta|_X:F|_X\to E|_X$ が同型となるものがある。

η の同型にならない地点は丁度 $(\det\eta):\det F\to\det E$ の zero locus と一致するから、 $D=(\det\eta)_0$ がそれにあたる。 $\eta|_X$ が iso より $X\cap D=\phi$　$\dim(X)>0$ より $D=\phi$ 則ち、 η は同型

‖

§3 P.N.を仮定した $\mathbb{P}^N$ の codim=2 submanifold

定理（３．１）（Ｅｖａｎｓ，Ｇｒｉｆｆｉｔｈ　1981　［１］　）

$j : X \hookrightarrow \mathbb{P}^N$　Ｐ．Ｎ．
ｃｏｄｉｍ＝２，　$N \geqq 6$　$\Rightarrow$　Ｃ．Ｉ．

（証明）　元々は、環論の　ｓｙｚｙｇｙ　を用いてなされたが、ここでは
Ｈａｒｔｓｈｏｒｎｅ　の講義に基き、　Ｅｉｎ　の別証明を利用することにする。

$N \geqq 6$　であるから、定理（１．４）により　Ｘ　は　２－ｂｕｎｄｌｅ　の　ｚｅｒｏ
として書ける。　則ち、　$0 \to \det E^{\vee} \to E^{\vee} \to I_X \to 0$　（ｅｘａｃｔ）
$\otimes \det E$　により　$0 \to O_P \to E \to I_X(t) \to 0$
次に　$\forall m \in \mathbb{Z}$　について　$\otimes O_P(m)$　で、コホモロジーをとり
$0 = H^1(O_P(m)) \to H^1(E(m)) \to H^1(I_X(m+t)) = 0$（∵Ｐ．Ｎ．）
ｆｏｒ　$\forall m \in \mathbb{Z}$．　従って、以下を示せば充分。

定理（３．２）（上の引用文献のｓｙｚｙｇｙに関する結果からもでる。）

Ｅ：　ｒ－ｂｕｎｄｌｅ　ｏｎ　$\mathbb{P}^N = P$
（仮定）　$H^i(P, E(m)) = 0$　$\forall m \in \mathbb{Z}$, $0 < i < r$（$\supset N$　ナラ
Ｈｏｒｒｏｃｋｓの定理）

$\Rightarrow$　$E \simeq \oplus$ ｌｉｎｅ　ｂｕｎｄｌｅｓ

補題（３．３）
Ｘ：完備代数多様体　Ｅ：　Ｘ　上の　ｃｏｈｅｒｅｎｔ　ｓｈｅａｆ
（仮定）（１）　Ｅ　：ｇ．ｂ．ｇ．ｓ．
（２）　$H^0(E^{\vee}) \neq 0$
$\Rightarrow$　$E \simeq O_X \oplus F$　（$\exists F$）
（∵）Ｏｂｖｉｏｕｓ．

補題（３．４）
Ｅ：ｒ－ｂｕｎｄｌｅ　ｏｎ　$\mathbb{P}^N$　＆　ｇ．ｂ．ｇ．ｓ．

$\Rightarrow$　$H^i(E(m-N-1)) = 0$　$\forall i \geqq r,\ m > 0$

（証明）$m > 0$　に対し、　$H^0(E) \otimes O_P(m) \to E(m) \to 0$　（ｅｘａｃｔ）
だから、　Ｅ（ｍ）　は　ａｍｐｌｅ　ｖｅｃｔｏｒ　ｂｕｎｄｌｅ

従って、以下の定理を使えば、直ちに $H^i(\mathbb{P}^N, E(m)\otimes\Omega_P{}^N)=0$
for $\forall m>0,\ i\geqq r$

<u>定理(3.5)</u>(Kodaira−Nakano−Potier vanishing) cf. [14]

X: compact complex manifold
E: holomorphic ample vector bundle on X
($\mathcal{O}_{P(E)}(1)$ が ample ということ)
$\Rightarrow H^q(X, E\otimes\Omega_X{}^p)=0$ for $p+q\geqq \dim X+\mathrm{rank}E$

(∵)スペクトル系列により $H^q(P(E), \Omega_{P(E)}{}^p\otimes\mathcal{O}_{P(E)}(1))$
$\simeq H^q(X, \Omega_X{}^p\otimes E)$ (Potier 同型)
P(E) で通常の Kodaira−Nakano vanishing を使う。 ∥

<u>(定理(3.2)の証明)</u>
r についての induction 。 $r=1$ は trivial。 $r\geqq 2$ とする。 $m_0=\min\{m\in\mathbb{Z}\mid\forall i>0\ H^i(E(m-i))=0\}$ とおく。Castelnuovo の補題により、 $E(m_0)$ は g.b.g.s. 従って、上の補題(3.4)により $H^i(E(m_0+k-N-1))=0$ for $\forall i\geqq r$ & $k>0$. 一方、m_0 の定義により、 $\exists j_0$ s.t. $N\geqq j_0>0$ & $H^{j_0}(E(m_0-j_0-1))\neq 0$. (仮定)により $j_0\geqq r$. 一方、$N>j_0$ なら $k_0=N-j_0$ (>0) と置くことにより、$H^{j_0}(E(m_0+k_0-N-1))\neq 0$ となり矛盾。 従って、$j_0=N$ 則ち、 $H^N(E(m_0-N-1))\neq 0$
Serre duality で $H^0((E(m_0))^\vee)\neq 0$
最後に補題(3.3)を使って $E(m_0)\simeq\mathcal{O}\oplus F$. この F も再び(仮定)を満たすベクトル束となるから induction により証明完了。 ∥

<u>§4 codim=2 の一般の場合に関する諸結果</u>

<u>定理(4.1)</u>(Z. Ran 1983 [12])
X: codim=2 submanifold $\subset\mathbb{P}^N$
$\det N_{X/P}\simeq\mathcal{O}_X(\nu)$ さらに次のいずれかを仮定する。
(i) $\nu\geqq \dim X+(\deg X/\dim X)$
(ii) $\deg X\leqq \dim X$
$\Rightarrow$ C. I.

注意（4．2） ① 仮定（ｉｉ）の　$\deg X$　が低い場合は比較的に昔からいくつかの結果が知られている。 ② 仮定（ｉ）　の方は、　Ｘ　が　Ｃ．Ｉ．　の場合について考えると、$\deg X$　が高い場合に対応する点で注目に値する。

定理（4．3）　（Ｈｏｌｍｅ，Ｓｃｈｎｅｉｄｅｒ　1985　［6］）

X：codim＝2　submanifold　$N \geqq 6$　$\det N_{X/P} \simeq O_X(\nu)$
　$\Rightarrow$　（ｉ）　$\nu \leqq 2(N+1)$　$\Rightarrow$　Ｃ．Ｉ．
　　（ｉｉ）　$\deg X < (N-1)(N+5)$　$\Rightarrow$ Ｃ．Ｉ．
　　（ｉｉｉ）　（ｉｉ）以外の場合でも例えば　$N=6$，$\deg X=55$　ならば　Ｃ．Ｉ．　になる　etc．
　　（ｉｖ）　Ｃ．Ｉ．予想の反例をつくりやすそうな（？）もののリスト

§5　Ｆ．Ｌ．Ｚａｋ　の結果

定理（5．1）　（Ｆ．Ｌ．Ｚａｋ　1979　cf．［3］　）

$X \subset \mathbb{P}^N$：submanifold　&　non－degenerate
$\dim(\mathrm{Sec}(X)) < N$　（i．e．$\mathbb{P}^{N-1}$　へ　iso－projection　が可能）
　$\Rightarrow$　$\dim X \leqq 2(N-2)/3$

系（5．2）
$\dim X > 2(N-1)/3$　$\Rightarrow$　$X \subset \mathbb{P}^N$　は　Ｌ．Ｎ．

次の補題が定理を証明する鍵となる。

補題（5．3）
X：submanifold　$\subset \mathbb{P}^N$　，H：　超平面
　$\Rightarrow \dim(\mathrm{Sing}(H \cap X)) < \mathrm{codim} X$
注意（5．4）
X　が　non－degenerate　の時、$\mathrm{Sing}(H \cap X) = \{x \in X \mid t(X)_x \subset H\}$　ここで、　$t(X)_x$　は　X　の、点　x　での　embedded tangent space　を示す。

以下のセクションでも利用するので、補題（5．3）を　$N \geqq 6$，$\mathrm{codim} X = 2$　の

場合に別証明を与えることにする。（§6の引用文献［11］の演習問題として）

演習（5．5）　$X \subset \mathbb{P}^N$ は non-degenerate としてよい。
$\exists E$：2-bundle on $\mathbb{P}^N$，$\exists \alpha \in H^0(E)$ s．t．$(\alpha)_0 = X$
$\therefore\ c_2(N_{X/P}(-1)) = c_2(E(-1))|_X = ah^2\ (\exists a \in \mathbb{Z})$
ここで、h は超平面の切断コホモロジー類を表す。この a が non-zero を示そう。X は C．I．でないとしてよい。次の二つの完全列を考えよう。

$$(*)\quad 0 \to N^\vee(1) \to H^0(O_X(1)) \otimes O_X \to J^1(O_X(1)) \to 0$$

$$(*^\vee)\ 0 \to D^1(O_X(1), O_X) \to H^0(O_X(1))^\vee \otimes O_X \to N(-1) \to 0$$

ここで、$N = N_{X/P}$，$J^1(\sim)$＝"$\sim$ の 1-jet" としている。
$(*^\vee)$ より $N(-1)$ は g．b．g．s．$a=0$ と仮定してみよう。
$\exists \sigma \in H^0(N(-1))$ s．t．$(\sigma)_0 = \phi$ 則ち、

$$(☆)\quad 0 \to \det(N^\vee(1)) \to N^\vee(1) \to O_X \to 0\quad (\text{exact})$$

X は not C．I．としたから、定理（4．3）（i）により、
$\det(N^\vee(1))$ は negative line bundle。
従って、（☆）の extension class の入る空間
$H^1(\det(N^\vee(1))) = 0$ $\therefore$ $N^\vee(1) = \det(N^\vee(1)) \oplus O_X$ 特に、$H^0(N^\vee(1)) \neq 0$ つまり $0 \neq H^0(\Omega_{P|X}{}^1(1)) = \mathrm{Ker}(\oplus^{N+1} O_X \to O_X(1))$ より X degenerate で矛盾。（注：この方法は例え X が P．N．でも次数の高い超曲面の存在を示すのには使えない）
こうして、$a \neq 0$ が分かった。$\forall H_0 \in \mathbb{P}^{N\vee}$ を取り、fix．$\Sigma = \{x \in X \mid t(X)_x \subset H_0\}$ と置く。$\dim\Sigma < 2$ を示したいのだから、$\geqq 2$ と仮定して矛盾を導く。$(*)$ より、

$$\begin{array}{l} \mathbb{P}^N \\ \| \\ \mathbb{P}(H^0(O_X(1))) \times X \hookleftarrow \mathbb{P}(J^1(O_X(1))) = \{(t(X)_x, x)\} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = \{(\sigma, x) \mid x \in (\sigma)_0\} \end{array}$$

ここで、σ は $\mathbb{P}^N$ の点に対応して $(*^\vee)$ から決る $\sigma : O_X \to N(-1)$ のことで、$(\sigma)_0$ は $\sigma(1)$ という切断の zero locus をあらわす。同様に、$(*^\vee)$ から、

$$\begin{array}{c} \mathbb{P}^{N\vee} \\ \| \end{array}$$

$$\mathbb{P}(H^0(\mathcal{O}_X(1))^\vee)\times X \hookleftarrow \mathbb{P}(N(-1)) = \{(H, x) \mid H \supset t(X)_x\}$$

$y \in \mathbb{P}^N - H_0$ を general にとり、対応する $\sigma_y : \mathcal{O}_X \to N(-1)$ を考える。$Z_y = (\sigma_y)_0$ とおくと、Z_y は smooth codim=2。($\because$ $a \neq 0$!) しかも、$c_2(N(-1)) = ah^2$ であるから、$\dim\Sigma \geqq 2$ とあわせて $\Sigma \cap Z_y \neq \phi$ を得る。$x \in \Sigma \cap Z_y$ を取ろう。$x \in \Sigma$ より、$t(X)_x \subset H_0$ 一方、$x \in Z_y$ より $t(X)_x \ni y$ 以上から $y \in H_0$ となり、矛盾。 ∥

§6 Peternell, Potier, Schneider の結果([11])

FaltingsのL.N.の証明([2])における次のまちがいを訂正することにより証明を完結させることが目標。さらに、その副産物としてQ.N.をも証明する。

Faltings の Claim (反例も[11]で与えられている)

X 非特異射影多様体 E r-bundle on X & g.b.g.s.
L ample linebundle on X
$$\Rightarrow H^q(X, S^t(E)\otimes L\otimes\Omega^p{}_X) = 0 \qquad p+q \geqq \dim X + \operatorname{rank} E,\ t \geqq 0$$

主な結果は次のとおり。

定理(6.0)

(1) $X \subset \mathbb{P}^N$ 非特異閉部分多様体 $\dim X \geqq 2N/3 \Rightarrow$ L.N.

(2) $X \subset \mathbb{P}^N$ 非特異閉部分多様体
$\operatorname{codim} X = 2,\ N \geqq 12 \Rightarrow$ Q.N.

(証明) $m = 1$ or 2 として $H^0(P, \mathcal{O}_P(m)) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{O}_X(m))$ が全射を示すために、命題(2.8)の証明と同様の方針で、次の完全列を考える。

$$0 \to I_X^t/I_X^{t+1} \otimes O_P(m) \to O_P/I_X^{t+1} \otimes O_P(m) \to O_P/I_X^t \otimes O_P(m) \to 0$$

先と同様に、 $H^1(X, S^t(N^\vee_{X/P})(m)) = 0 \quad (t \geqq 1)$ を示せばよい。これは、 $t \gg 0$ のときには negative vector bundle となり、コホモロジー群が消滅するが、 t が中途半端に小さいと、その消滅を示すのに手間がかかることになる。 従って、 (1)、(2) ともにその証明は、 $t \gg 0$ となる場合とそうでない場合とに分かれる。

(ア) $t \gg 0$ の場合

Serre duality により、

$H^{n-1}(X, S^t(N_{X/P}(-1)) \otimes O_X(t-m) \otimes K_X) = 0$

を示してもよい。 ここで、 $n = \dim X$ である。 $N_{X/P}(-1)$ が g.b.g.s. であることに気をつけると、 $m=1$ で $t \geqq 2$ もしくは $m=2$ で $t \geqq 3$ のときは、次の定理によって考えているコホモロジー群が消滅することがわかる。

定理(6.1)

X projective manifold $\dim X \geqq 2$

E r−bundle on X & g.b.g.s.

L ample line bundle on X

$\Rightarrow H^q(X, S^t(E) \otimes L \otimes \Omega^p{}_X) = 0 \quad p+q \geqq \dim X + r$

$q \geqq \dim X - 1 \quad t \geqq 0$

この証明は後でまとめてすることにして、残りのものについての扱いをはっきりさせておこう。

(イ) $t \gg 0$ でない場合

命題(6.2) (m=1, t=1の場合を扱う)

$X \subset \mathbb{P}^N$ submanifold & non-degenerate

$\Rightarrow H^q(X, N_{X/P}(-1) \otimes \Omega^p{}_X) = 0 \quad p+q \geqq 2N - \dim X - 1$

命題(6.3) (m=2, t=1 の場合を扱う)

$X \subset \mathbb{P}^N$ submanifold $\operatorname{codim} X = 2 \quad N \geqq 12$

$\Rightarrow H^1(X, N^\vee_{X/P}(2)) = 0$

命題（６．４）　（ｍ＝２，ｔ＝２　の場合を扱う）

$X \subset \mathbb{P}^N$ submanifold　$\mathrm{codim} X = 2$　$N \geqq 7$
$\Rightarrow H^1(X, S^2(N^{\vee}_{X/P}(1))) = 0$

ここで、（６．３）及び（６．４）を利用するときは、Serre duality を用いずに、そのまま各命題を適用することを注意しておく。　以下のセクションでは上記の（６．１）～（６．３）の証明の概要を与え、（６．４）の証明は省略することにする

§７　（６．１）～（６．３）の証明の概要

補題（７．１）

X　projective manifold
E　r-bundle on X & g.b.g.s.
F　vector bundle on X
k　positive integer $\leqq \dim X - 1$

（仮定）　$H^q(X, S^t(E) \otimes F) = 0$　$q \geqq \dim X - k$,　$k \geqq t \geqq 0$
（結論）　$H^q(X, S^t(E) \otimes F) = 0$　$q \geqq \dim X - k$,　$t \geqq 0$

（証明）　$f; P(E) \longrightarrow X$ を考える。　この時、

$$H^0(P(E), O_{P(E)}(1)) \otimes O_{P(E)} \longrightarrow O_{P(E)}(1) \to 0 \quad （完全）$$

従って、　$\exists \sigma \in \overset{k+r}{\oplus} \Gamma(P(E), O_{P(E)}(1))$　s.t.
$Y; = \phi$ or smooth & codim$=k+r$
これの Koszul 複体 を考えて、

$$(*-\ell)\quad 0 \to O_{P(E)}(\ell-k-r) \to \cdots \to (\wedge^i \overset{k+r}{\oplus} O_{P(E)})(\ell-i) \to \cdots \to \overset{k+r}{\oplus} O_{P(E)}(\ell-1) \to O_{P(E)}(\ell) \to O_Y(\ell) \to 0$$
（完全）

この時、次のことが成立する。

（Claim）　$R^q f_*((\wedge^i \overset{k+r}{\oplus} O_{P(E)})(\ell - i)) = 0$　$q>0,\ i>0$
$\ell \geqq k+1$　,

『(∵) $q=\mathrm{rank}E-1$ の時のみ問題。 これについては、次のことに注意すればよい。 $\wedge^{i}(\overset{k+r}{\oplus} H^{r-1}(\mathbb{P}^{r-1}, O_P(\ell-i)))=0$ for $\ell-i>-r$ または $i>k+r$ (wedge の回数が多過ぎる!)』

$(*-\ell)$ を $\ell\geqq k+1$ として f_* でおとし、$\otimes F$(以下では $S^{neg}(\sim)=0$)

$$0\to S^{\ell-k-r}(E)\otimes F\to\cdots\to(\wedge^{i}(\overset{k+r}{\oplus}0_X))\otimes S^{\ell-i}(E)\otimes F\to\cdots$$
$$\cdots\to S^{\ell}(E)\otimes F\to f_*(0_Y(k+1))\otimes F\to 0 \quad \text{(完全)}$$

まず $\ell=k+1$ と置いてみると、(仮定)より

$$H^q(X, S^{k+1}(E)\otimes F)\simeq H^q(X, f_*(O_Y(k+1))\otimes F)$$
$$(q\geqq \dim X-k)$$

$\dim Y=\dim X-k-1$ より $\dim \mathrm{Supp}(f_*(O_Y(k+1))\leqq \dim X-k-1$ 従って、 $q\geqq\dim X-k$ について右辺$=0$となり、左辺も0。 今度は、(仮定), $(*-(k+2))$, 及び 今、証明した $H^q(X, S^{k+1}(E)\otimes F)=0$ を使って帰納的に繰り返していくことにより証明が完成する。 ‖

(6.1)の証明

$F=L\otimes\Omega^p{}_X$, $k=1$ として補題(7.1)を適用するために、その仮定にあたることを示せばよい。 即ち、

$$H^q(X, S^t(E)\otimes F)=0 \quad q\geqq\dim X-1,\quad p+q\geqq\dim X+r$$
$$1\geqq t\geqq 0$$

言い換えると $t=0$ では $H^q(X, L\otimes\Omega^p{}_X)=0$, $t=1$ では $H^q(X, E\otimes L\otimes\Omega^p{}_X)=0$ を示せばよいが、これらは Kodaira−Nakano−Potier vanishing(3.5)により保証される。

次に(6.2)を示す。 そのために、まず次の定義をあたえる。

定義(7.2) (Sommese cf. [14])

Y projective manifold , F line bundle on Y

F が k-ample $\Leftrightarrow$ $\exists m>0$, F^m g.b.g.s.
$\Phi_{F^m}; Y \to \mathbb{P}(H^0(Y, F^m))$ の
ファイバーの次元が k 以下

<u>注意（7．3）</u>　0－ample $\Leftrightarrow$ ample

<u>定理（7．4）</u>（Sommese cf.［14］）

Y projective manifold
F k-ample line bundle on Y
$\Rightarrow H^q(Y, F \otimes \Omega^p{}_Y) = 0 \qquad p+q > k + \dim Y$

従って、次を示せば充分である。

<u>補題（7．5）</u>
$X \subset \mathbb{P}^N$ submanifold & non-degenerate
$N := N_{X/P}$
$\Rightarrow$ $\mathcal{O}_{P(N(-1))}(1)$ は $(\mathrm{codim}X-1)$-ample

$(\because)$ $g; \mathbb{P}(N(-1)) \hookrightarrow X \times \mathbb{P}^{N\vee} \longrightarrow \mathbb{P}^{N\vee}$　（（5．5）の（$*^\vee$）より）
$\|$
$\{(x, [H]) \mid t(X)_x \subset H\}$
Zak の補題（5．3）により　$\dim g^{-1}([H]) \leqq (\mathrm{codim}X-1)$ ‖

最後に（6．3）を示す。

$\sigma \in H^0(X, N(-1))$ をとって、$Y=(\sigma)_0$ smooth & $\dim Y = N-4$ にできる。X は C．I．ではないとしてよい。
$0 \to \det(N^\vee(1)) \to N^\vee(1) \to I_{Y/X} \to 0$ という完全列に $\otimes \mathcal{O}_X(1)$ を施して、コホモロジー群をとると、（4．3）（i）によって
$H^0(X, N^\vee(2)) \simeq H^0(X, I_{Y/X}(1))$
$N \geqq 12$ であるから　$\dim Y = N-4 \geqq 2N/3$　従って すでに証明した（6．0）(1) により Y は L．N．　実はさらに <u>$H^1(X, \mathcal{O}_X(1))=0$　（$N \geqq 7$）</u>が示せて（詳しくは原論文を参照－証明の方針はL．N．の時とほとんど同じ）　右辺＝0　となり左辺も0。 ‖

参考文献

[1] Evans, E. G., Griffith, P. : The syzygy problem, Ann. of Math. 114 (1981), 323-333.

[2] Faltings, G. : Verschwindungssätze und Untermannigfaltigkeiten kleiner Kodimension des projektiven Raums, J. Reine Angew. Math. 326 (1981) 136-151

[3] Fujita, T., Roberts, J. : Varieties with small secant varieties ; the extremal case, Amer. J. Math. 103 (1981) 953-976.

[4] Hartshorne, R. : Varieties of small codimension in projective space, Bull. Am. Math. Soc., 80 (1974), 1017-1032.

[5] Hartshorne, R. : Equivalence relations on algebraic cycles and subvarieties of small codimension, in Algebraic Geometry, Arcata 1974, Amer. Math. Soc Proc. Sympo. Pure Math., 29 (1975), 129-164.

[6] Holme, A., Schneider, M. : A computer aided approach to codimension 2 subvarieties of $\mathbb{P}^n$ $n \geqq 6$, J. Reine Angew. Math. 357, (1985), 205-220.

[7] Horrocks, G., Mumford, D. : A rank 2 vector bundle on $\mathbb{P}^4$ with 15000 symmetries, Topology, 12 (1973), 63-81.

[8] Larsen, M. : On the topology of complex projective manifolds, Inv. Math., 19 (1973), 251-260.

[9] Maruyama, M. : On a family of algebraic vector bundles, Number Theory, Algebraic Geometry and Commutative Algebra, in honor of Y. Akizuki, Kinokuniya, Tokyo (1973), 95-146.

[10] Okonek, C., Schneider, M., Spindler, H. : Vector bundles on complex projective spaces, in P.M.3, (1980) Birkhauser.

[11] Peternell, T., Le Potier, J., Schneider, M. : Vanishing theorems, linear and quadratic normality, Inv. Math., 87 (1987), 573-586.

[12] Ran, Z. : On projective varieties of codimension 2, Inv. Math., 73 (1983), 333-336.

[13] Sato, E. : On the decomposability of infinitely extendable vector bundles on projective spaces and Grassmann varieties, J. Math. Kyoto Univ. 17 (1977), 127-150

[14] Shiffman, B., Sommese, A. J. : Vanishing theorems on complex manifolds, in P.M. 56 (1985), Birkhauser.

[15] Usa, T. : On obstructions of infinitesimal lifting, (Preprint).