

一次元変換の混合性と Fredholm determinant

防大数学 森 真 (Makoto Mori)

§ 1 一次元変換のエルゴード性は, Perron-Frobenius operator の固有値問題を解くことにより, 解決される。しかし, 一般には, Perron-Frobenius operator は nuclear であるために Fredholm determinant の定義ができる。そこで我々は piecewise linear transformation F (この論文では記述の簡略のため Non-Markov 条件(後述)を満たすものとする。一般の場合は [4] 参照) を symbolic dynamics に表現して, renewal equation を構成することによってある行列 $\Phi(z)$ をつくり, $\det(I - \Phi(z))$ が, ある意味での Fredholm determinant であることを示す。すなわち,

$$\text{定理 1. } SP(\Phi) = \{z: \det(I - \Phi(z)) = 0, |z| < e^{\xi}\}$$

とよく時

$$SP(\Phi) = \{\lambda^{-1}: \lambda \text{ は } P \text{ の固有値, } |\lambda| > e^{-\xi}\},$$

但し, ξ は lower Lyapunov number, P は Perron-Frobenius operator の BV への制限を表わす。

この定理と Li-Yorke の定理 ([1]) を用いれば,

系. $\xi > 0$ の時

1) $\det(I - \Phi(z))$ の $z=1$ における 0 点の位数
= ergodic components の数

2) $\{ |z| \leq 1 \}$ の $SP(\Phi) = \{ 1 \}$ かつ $\det(I - \Phi(z))$ の $z=1$ における 0 点の位数が 1 位ならば力学系は混合的である。

3) 力学系が混合的の時 η^{-1} は $SP(\Phi)$ の元及び e^ξ の絶対値最小のものとする時 η は decay rate of correlation である。

するおち $\forall f \in BV, \forall g \in L^1$ について

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\eta + \varepsilon)^{-n} \left| \int f(x) g(F^{(n)}(x)) d\mu - \int f d\mu \int g d\mu \right| = 0$$

が $\forall \varepsilon > 0$ について成立する。但し μ は力学系の不変確率測度を表わす。

更に我々の ζ -函数を重で表現する。

定理 2. $\xi > 0$ とする。この時

$$\begin{aligned} \zeta(z) &= \exp \left[t_n \log(I - \Phi(z)) \right] \\ &= \prod (z - \lambda_i) \end{aligned}$$

但し λ_i は $I - \Phi(z)$ の固有値

§ 2. 証明の概略

F が有界区間 I からそれ自身への piecewise linear transformation であるとは、 I の partition $\{(a)\}_{a \in A}$ が存在して (a) は区間かつ F は (a) 上で linear である。この時各 $a \in A$ を alphabet

とよび

$$\operatorname{sgn} a = \begin{cases} + & F'(x) > 0 \quad \text{on } x \in (a) \\ - & F'(x) < 0 \quad \text{on } x \in (a), \end{cases}$$

$$\lambda^a = |F'(x)| \quad x \in (a)$$

と定義する。alphabet の有限列 $\omega = a_1 \cdots a_n$ を word とよび

$$\operatorname{sgn} \omega = \prod_{i=1}^n \operatorname{sgn} a_i$$

$$\lambda^\omega = \prod_{i=1}^n \lambda^{a_i}$$

$$(\omega) = \bigcap_{i=1}^n F^{-i+1}((a_i))$$

と定義する。各点 $x \in I$ に対して alphabet の無限列 $a_1^x a_2^x \cdots$ (x の展開とよぶ) を $F^{(i-1)}(x) \in (a_i^x)$ で定義する。この時 x と F の展開を同一視する。さて

$$\Delta^a(z; x) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \sum_{y \in (a), F^{(n)}(y) = x} |F^{(n)}(y)|^{-1}$$

とおく。これは区間 (a) より出発して x につながる $word$ の重みつき和である。我々の renewal equation は概ね次の様に考えることができる。すなわち $F((a)) \supset (b)$ ならば (a) から出発して次に (b) を通る $word$ に相当する部分は

$$z(\lambda^a)^{-1} \Delta^b(z; x) + 1_a(x) 1_b(F(x))$$

で与えられる ($1_a(x)$ は区間 (a) の indicator function) これを全ての $F((a)) \supset (b)$ をみたす $b \in A$ について和をとり、これでおまえるかゝた分は $F^{(2)}, F^{(3)}, \dots$ を考える。実際には $F((a)) \supset (b)$ かどうかは (a) の両端点の軌跡によって決定される。そこで

a^+ で $x \in (a)$ の展開の $x \uparrow \sup\{x \in (a)\}$ の極限を表わす。又 a^- で $x \downarrow \inf\{x \in (a)\}$ の極限を表わす。更に $a^\sigma = a_1^\sigma a_2^\sigma \dots$ ($a \in A$, $\sigma \in \{+, -\}$) とする時

$$a^\sigma(c_1, n) = a_1^\sigma \dots a_n^\sigma$$

$$a^\sigma(n, \infty) = a_n^\sigma a_{n+1}^\sigma \dots$$

と定義し

$$a^+ > a^-$$

$$a^\sigma > b^\tau \quad \text{if } x > y \quad x \in (a), y \in (b) \quad (\sigma, \tau \in \{+, -\})$$

と置く。

$$\chi^{a^\sigma}(z; x) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \chi^{a^\sigma}(n, x)$$

$$\chi^{a^\sigma}(n, x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{sgn } a^\sigma(c_1, n) = + \text{ かつ } x < a^\sigma(n+1, \infty) \\ & \text{又は } \text{sgn } a^\sigma(c_1, n) = - \text{ かつ } x > a^\sigma(n+1, \infty) \\ -\frac{1}{2} & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$(\Phi(z))_{a^\sigma, b^\tau} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n (\varphi(n))_{a^\sigma, b^\tau} (\lambda^{a^\sigma(c_1, n)})^{-1}$$

$$(\varphi(n))_{a^\sigma, b^\tau} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{sgn } a^\sigma(c_1, n-1) = + \text{ かつ } b^\tau \leq (a_n^\sigma)^- \\ & \text{又は } \text{sgn } a^\sigma(c_1, n-1) = - \text{ かつ } b^\tau > (a_n^\sigma)^- \\ -\frac{1}{2} & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\vec{\Delta}(z; x) = (\Delta^{a^\sigma}(z; x))_{a \in A, \sigma \in \{+, -\}}$$

$$\vec{\chi}(z; x) = (\chi^{a^\sigma}(z; x))_{a \in A, \sigma \in \{+, -\}}$$

この時

$$(I - \Phi(z)) \vec{\Delta}(z; x) = \vec{\chi}(z; x)$$

が我々の求める renewal equation である。実際

$$\Delta^a(z; \lambda) = \Delta^{a^+}(z; \lambda) + \Delta^{a^-}(z; \lambda)$$

を満たす。又

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \int 1_a(x) g(F^{(n)}(x)) dx = \int \Delta^a(z; \lambda) g(x) dx$$

より $\Delta(z; \lambda)$ が singular ならば $\exists a$ $\Delta^a(z; \lambda)$ が singular であることが示せば良い。このために我々は次の条件が必要である。

Non-Markov Condition: $a^{\sigma}(n, \infty)$ と $b^{\tau}(m, \infty)$ の表わす点相等しければ $a=b$ か $n=m$

これで定理1を得る。定理2の証明には $\Delta^a(z; \lambda)$ のかわりに word ω を通り λ に継がる word の renewal equation を構成することを得られる。実際

$$C(a^{\sigma}, a, b^{\tau}) = \begin{cases} \frac{1}{2} z(\lambda^a)^{-1} & \sigma \text{sgn} a = +, b^{\tau} < a^{\sigma}(z, \infty) \\ \text{又は } \sigma \text{sgn} a = -, b^{\tau} > a^{\sigma}(z, \infty) \\ -\frac{1}{2} z(\lambda^a)^{-1} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$C(a^{\sigma}, \omega, b^{\tau}) = \begin{cases} \sigma \text{sgn} a z(\lambda^a)^{-1} \sum_{\theta \in \{+, -\}} (\Phi(z))_{a^{\sigma}, (\omega_2)^{\theta}} C((\omega_2)^{\theta}, \omega(z, |\omega|), b^{\tau}) \\ \text{if } \omega(1, 2) \neq a^{\sigma}(1, 2) \\ \sigma \text{sgn} a z(\lambda^a)^{-1} \sum_{\theta \in \{+, -\}} (\Phi(z))_{a^{\sigma}, (\omega_2)^{\theta}} C((\omega_2)^{\theta}, \omega(z, |\omega|), b^{\tau}) \\ + \text{sgn} a z(\lambda^a)^{-1} C(a^{\sigma}(z, \infty), \omega(z, |\omega|), b^{\tau}) \\ \text{otherwise.} \end{cases}$$

と定義する時。この renewal equation は $v = \sum_{\sigma} C(b_1^{\sigma}, b_1, \dots, b_n, b_1^{\sigma})$

を考えることでシンボルの $b_1 \dots b_n$ を持つ *periodic orbit* の存在が
考察できて

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n \frac{1}{n} \sum_{F^{(n)}(p)=p} |F^{(n)'(p)}|^{-1} = \text{tr} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \Phi^n(z)$$

を得る。これで定理2を得る。

References

- [1] T.Y.Li and J.A.Yorke, Ergodic transformations from an interval into itself, Trans. Amer. Math. Soc. 235 (1978), 183-192.
- [2] M.Mori, On the decay of correlation for piecewise monotonic mappings I, Tokyo J. Math. 8 (1985), 389-414.
- [3] M.Mori, On the decay of correlation for piecewise monotonic mappings II, Tokyo J. Math. 9 (1986), 135-161.
- [4] M.Mori, Fredholm determinant of piecewise linear transformations, preprint.