数理解析研究所講究録
635巻 1987年 41-44

擬軌道追跡条件とエントロピー零

名大理 下村尚司 (Takashi Shimomura)

コンパクト距離空間 (X, d) とその上の同相写像 f との組 (X, f) をカスケードと呼ぶことにする。カスケード (X, f) が擬軌道追跡条件(POTPと略される)を持つとは、次のことである。正数 $\delta > 0$ に対して、X の点列 $\{x_i\}_{i\ge0}$ が δ-擬軌道(δ-p.o.)であるとは、任意の $i \ge 0$ に対して、$d(f(x_i), x_{i+1}) < \delta$ となることである。点列 $\{x_i\}_{i\ge0}$ が $x \in X$ によって ε-追跡(ここで $\varepsilon > 0$ は正の実数)されるとは、任意の $i \ge 0$ に対して、$d(f^i(x), x_i) \le \varepsilon$ となることを言う。カスケード (X, f) が POTP を持つとは、任意の $\varepsilon > 0$ に対し、$\delta > 0$ が在って、任意の δ-p.o. がある $x \in X$ によって ε-追跡されることを言う。POTPはAnosov微分同相あるいはAxiom A系によって来たるものであり、これらはふつう位相的エントロピーは、0でないことが多い。そこで、それでは位相的エントロピーが0である場合にどのようなことが考えられるか

ということを問題としてみたい。

C.C. Conley ([5], [6]) は、連続な流れについて、鎖回帰性を導入し、その後それはカスケードについても考えられている。(例えば L. Block and J.E. Franke [2], [3], [4] 等)。カスケード (X, f) について、$x \in X$ が鎖回帰的であるとは、任意の $\varepsilon > 0$ に対し、X の点列 $\{x_0, \cdots, x_m\}$ $(m \geq 1)$ があって、$x_0 = x_m = x$ かつ全ての $0 \leq i \leq m-1$ について、$d(f(x_i), x_{i+1}) < \varepsilon$ となることを言う。鎖回帰的な点全ての成す集合を $R(f)$ で表わし、鎖回帰的集合と呼ぶ。$R(f)$ は閉集合で f-不変 $(f(R(f)) = R(f))$ である。

定理1. (X, f) が POTP を持つカスケードとするとき、位相的エントロピーが 0 ならば、$R(f)$ が完全不連結であり、f の $R(f)$ への制限は、ある $R(f)$ 上の距離について、等長的である。([8])

定義。カスケード (X, f) が一意エルゴード的であるとは、f-不変な Borel 確率測度が一意的であることを言う。

定理2. (X, f) が POTP を持ち、一意エルゴード的ならば、コンパクト距離化可能な位相 abel 群上の極小な translation と位相共役である。([8])

ここで、カスケード (X, f) が極小とは、f-不変な閉集合が X と ϕ のみであることを言う。またカスケード (X, f) と

(Y,g) が位相共役であるとは、同相写像 $h: X \to Y$ があって $h \circ f = g \circ h$ となることを言う。

最後に、完全不連結空間上の等長変換について述べる。(X,f)、(Y,g) をカスケードとするとき、連続写像 $h: Y \to X$ が、(Y,g) から (X,f) への homomorphism とは、$h \circ g = f \circ h$ が成り立つことを言う。

$$\mathfrak{X}: (X_1, f_1) \xleftarrow{\varphi_1} (X_2, f_2) \xleftarrow{\varphi_2} \cdots$$

をカスケードとそれらの間の homomorphism の列とするとき、その逆極限 $(X_{\mathfrak{X}}, f_{\mathfrak{X}})$ を次のように定義する。([7])。

$$X_{\mathfrak{X}} = \{(x_i)_{i\geq 1} \in \prod_{i=1}^{\infty} X_i ;\ \varphi_i(x_{i+1}) = x_i,\ i \geq 1\}$$

$$f_{\mathfrak{X}}(x) = (f_i(x_i))_{i\geq 1} \quad (x = (x_i)_{i\geq 1} \in X_{\mathfrak{X}})。$$

命題。(X,f) を完全不連結空間上の等長変換とすれば、(X,f) は有限集合上のカスケード (A_i, φ_i) $(i \geq 1)$ とその間の homomorphism $\psi_i: A_{i+1} \to A_i$ $i \geq 1$ の列

$$\mathfrak{X}: (A_1, \varphi_1) \xleftarrow{\psi_1} (A_2, \varphi_2) \xleftarrow{\psi_2} \cdots$$

の逆極限 $(X_{\mathfrak{X}}, f_{\mathfrak{X}})$ と位相共役である。

証明 略。

REFERENCES

[1] R.L.Adler,A.G.Konheim and M.H.McAndrew, Topological entropy, Trans. Amer. Math. Soc., 114(1965),309-319.

[2] L.Block and J.E.Franke, The chain recurrent set for maps of the interval, Proc. Amer. Math. Soc. 87 (1983), 723-727.

[3] L.Block and J.E.Franke, Isolated chain recurrent points for one-dimentional maps, Proc. Amer. Math. Soc. 94(1985),728-730.

[4] L.Block and J.E.Franke, The chain recurrent set, attractors, and explosions, Ergod. Th. and Dynam. Sys. 5 (1985),321-327.

[5] C.C.Conley, The gradient structure of a flow, IBM Research RC 3932 (ﾃﾞﾄ17806), Yorktown Heights, N.Y.1972.

[6] C.C.Conley, Isolated invariant sets and the Morse index, CBMS Regional Confe. Ser. in Math., 38(1978), Amer. Math. Soc..

[7] W.Goodwyn, The Product theorem for topological entropy, Trans. Amer. Math. Soc., 158(1971), 445-452.

[8] T.Shimomura, On a structure of a discrete dynamical systems from the view point of chain components and some applications, Preprint.