数理解析研究所講究録
635巻 1987年 36-40

擬軌道追跡性と断面写像

東京理大　岡　正俊　(Masatoshi Oka)

擬軌道追跡性と拡大性は位相力学系では重要な概念である。この二つの概念は双曲的力学系に密接に関係している。

H. B. Keynes と M. Sears ([2]) は real flow の拡大性を局所断面の族と断面写像を用いて特徴づけた。ここでは real flow の擬軌道追跡性と断面写像との関係について調べる。

$(X, \mathbb{R})$ はコンパクト距離空間 X 上の fixed points をもたない real flow であるとする。real flow を単に flow と呼ぶことにし，d は X の距離関数とする。$t \in \mathbb{R}$ の点 $x \in X$ に対する flow の作用を xt と書く。正数 ε_0 は $(X, \mathbb{R})$ の周期の集合の下限を表す。

δ, ε は正数とする。点列の組 $(\{x_i\}_{i=-\infty}^{\infty}, \{t_i\}_{i=-\infty}^{\infty})$ は $t_i \geq 1$ $(i \in \mathbb{Z})$ かつ $d(x_i t_i, x_{i+1}) < \delta$ $(i \in \mathbb{Z})$ であるとき $(X, \mathbb{R})$ の δ-擬軌道と呼ばれる。δ-擬軌道が点 $x \in X$ によって ε-追跡されるとは，$\mathbb{R}$ の同相写像 h で狭義単調増加かつ $h(0) = 0$ となるものが存在して $d(xh(t), x_0 * t) < \varepsilon$ $(t \in \mathbb{R})$ となることをいう。ただし，$\tau_n \leqq t < \tau_{n+1}$ である t に対して $x_0 * t = x_n(t - \tau_n)$ $(\tau_n = \sum_0^{n-1} t_i,\ \tau_{-n} = \sum_{-n}^{-1} t_i$ $(n > 0)$ かつ $\tau_0 = 0)$ であるとする。任意の $\varepsilon > 0$ に対して，正数

δが存在して，任意のδ-擬軌道がXのある点によってε-追跡されるとき，$(X,\mathbb{R})$は擬軌道追跡性をもつという。

$\xi>0$とする。 Xの閉部分集合Sは，任意の$x\in S$について$S\cap x[-\xi,\xi]=\{x\}$が成り立つとき，時間ξの局所断面と呼ばれる。 局所断面Sに対して$S^*=S\cap \mathrm{int}(S[-\xi,\xi])$を$S$の内部と呼ぶ。 ただし$S\subset X$と区間$I$に対して$SI=\{xt\,;\,x\in S,\ t\in I\}$とする。

命題([2])． 次をみたす$\xi>0$が存在する。 即ち，$0<\alpha<\xi/3$である任意のαに対して，互いに素な，時間ξの局所断面の族$\mathcal{S}=\{S_1,\dots,S_K\}$で各$S_i$の直径が$\alpha$以下であるものと，局所断面の族$\mathcal{T}=\{T_1,\dots,T_K\}$で$T_i\subset S_i^*$ $(i=1,2,\dots,K)$であるものが存在して，

$$X=T^+[0,\alpha]=T^+[-\alpha,0]=S^+[0,\alpha]=S^+[-\alpha,0]$$

となる。 ただし$T^+=\bigcup_{i=1}^{K}T_i$かつ$S^+=\bigcup_{i=1}^{K}S_i$である。

上の命題におけるξとαをとり固定する．

$$\beta=\sup\{\delta>0\,;\ \text{任意の}\ x\in S^+\ \text{に対して}\ x(0,\delta)\cap S^+=\phi\}$$

とし，$\rho>0$を$5\rho<\xi$かつ$2\rho<\beta$であるものとする。

$x\in T^+(S^+)$に対して，$t\in\mathbb{R}$を$xt\in T^+$となる最小の正の時間とする。 明らかに$\beta\leqq t\leqq\alpha$であり，このtによって断面写像$\varphi:T^+\to T^+$と$\widehat{\varphi}:S^+\to T^+$を$\varphi(x)=xt$かつ$\widehat{\varphi}(x)=xt$と定義する。

φは全単射であり，$\tilde{\varphi}$は全射である。

$S_i \in \mathcal{S}$ に対して，$D_\rho^i = S_i[-\rho,\rho]$ とし，射影写像 $P_\rho^i : D_\rho^i \to S_i$ を $P_\rho^i(x) = xt$ と定義する。ただし $xt \in S_i$ かつ $|t| \leqq \rho$ である。P_ρ^i は全射かつ連続写像である。混同が生じない限り，$D_\rho^i = D_\rho$ かつ $P_\rho^i = P_\rho$ と書くことにする。

<u>注意</u>. 正数 a を十分小さくとると次を満たすようにできる。即ち，$x, y \in S_i$ がもし $d(x,y) \leqq a$ かつある j に対して，$xt \in T_j$ $(|t| \leqq 3\alpha)$ ならば，$yt \in D_\rho^j$ である。

注意により，もし $y \in S_i$ が $x \in T_i$ に十分近く，かつ $\varphi(x) = xt$ $(\tilde{\varphi}(x) = xt)$ で $xt \in T_j$ ならば，y を通る $(X, \mathbb{R})$ の軌道が t に近い時間で S_j にぶつかる。このぶつかる点を y_1 とおく。$y_1 = P_\rho(yt)$ である。帰納的に，もし $d(\varphi^i(x), y_i) \leq a$ $(d(\tilde{\varphi}^i(x), y_i) \leq a)$ ならば，$\varphi^{i+1}(x) = \varphi^i(x)\cdot t$ である t を用いて $y_{i+1} = P_\rho(y_i t)$ と定義できる。同様に $i<0$ についても y_i を定義することができる。

T_i, S_i の代わりに，それぞれ T, S と書く。このとき，$x \in T$ に対して x の（φに対する）η-安定集合と η-不安定集合をそれぞれ，

$$W_\eta^s(x) = \{ y \in S ;\ 任意の\ i \geqq 0\ に対して\ d(\varphi^i(x), y_i) < \eta \}$$

$$W_\eta^u(x) = \{ y \in S ;\ 任意の\ i \leqq 0\ に対して\ d(\varphi^i(x), y_i) < \eta \}$$

と定義する。 任意の $\eta>0$ に対して $\delta>0$ が存在して，$d(x,y)<\delta$ $(x,y\in T^+)$ ならば $W^s_\eta(x)\cap W^u_\eta(x)\neq\phi$ であるとき，断面写像 φ は標準座標系をもつという。 $\delta>0$ とし，点列 $\{x_i\}_{i=-\infty}^{\infty}\subset T^+$ は各 $i\in\mathbb{Z}$ に対して $d(\varphi(x_i),x_{i+1})<\delta$ であるとき，φ の δ-擬軌道と呼ばれる。 同様に $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}\subset S^+$ が $d(\hat\varphi(x_i),x_{i+1})<\delta$ $(i\geq 0)$ であるとき，$\hat\varphi$ の δ-擬軌道と呼ばれる。 点列 $\{x_i\}\subset T^+(S^+)$ が $\varphi(\hat\varphi)$ の δ-擬軌道であるとき，t_i を $\varphi(x_i)=x_it_i$ $(\hat\varphi(x_i)=x_it_i)$ とする。 φ の δ-擬軌道が $y\in S^+$ によって ε-追跡されるとは，次が成り立つことである。

(1) $d(y,x_0)<\varepsilon$

(2) $y_i=P_\rho(y_{i-1}t_{i-1})$ かつ $y_{-i}=P_\rho(y_{-i+1}(-t_{-i}))$ が $i\geq 1$ に対して帰納的に定義され，$d(y_i,x_i)<\varepsilon$ $(i\in\mathbb{Z})$ が成り立つ。 ただし $y_0=y$ である。

$\hat\varphi$ の δ-擬軌道が $y\in S^+$ によって ε-追跡されるとは，上の(1),(2)が $i\geq 0$ に対して成り立つことである。 任意の $\varepsilon>0$ に対して $\delta>0$ が存在して，$\varphi(\hat\varphi)$ の任意の δ-擬軌道が S^+ のある点によって ε-追跡されるとき，$\varphi(\hat\varphi)$ は擬軌道追跡性をもつという。

<u>定理 1</u>. $(X,\mathbb{R})$ が擬軌道追跡性をもてば，断面写像 φ は擬軌道追跡性をもつ。

系. (X, ℝ)が擬軌道追跡性をもてば，断面写像 φ は標準座標系をもつ。

定理２. (X, ℝ)が擬軌道追跡性をもつための必要十分条件は断面写像 $\tilde{\varphi}$ が擬軌道追跡性をもつことである。

参考文献

[1] R. Bowen and P. Walters, *Expansive one-parameter flows*, J. Diff. Eq. 12 (1972), 180−193.

[2] H. B. Keynes and M. Sears, *Real-expansive flows and topological dimension*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. 1 (1981), 179−195.

[3] M. Komuro, *One-parameter flows with the pseudo orbit tracing property*, Mh. Math. 98 (1984), 219−253.

[4] R. F. Thomas, *Stability properties of one-parameter flows*, Proc. London Math. Soc. 45 (1982), 479−505.