数理解析研究所講究録
635巻 1987年 1-15



# C*環論と位相力学系

東京都立大理　富山　淳 (Jun Tomiyama)

1. はじめに。力学系 $\Sigma=(X,G)$ が与えられると、それから変換群C*環と呼ばれるC*環 $A_\Sigma$ がつくれる。ここで一般には $X$ は局所コンパクト空間で $G$ は局所コンパクト群である。従って $\Sigma$ は flow であっても、又離散力学系であってもよい。そして"原理的には" $\Sigma$ を考えることとC*環 $A_\Sigma$ を考えることとは等価と考えられる。C*環論においては変換群C*環は重要な位置を占めており、理論に豊富な材料を与えている。その代表的なものは単位円周上の無理数角 $\theta$ の回転 $\sigma_\theta$ よりつくられた無理数回転C*環 $A_\theta$ である。$A_\theta$ は単位元をもつ可分な単純C*環であるが豊富な projection をもち、AF環(有限次C*環の増大列からつくられるC*環)の中に埋めこめる等々豊かな構造が見出されている。

さて $A_\Sigma$ をC*環として研究すること自体はその方向として

は$\Sigma$の力学系としての研究と勿論異なるわけであるが、$A_\Sigma$を力学系の研究の代数的アプローチととらえることも出来る。しかしこのような立場をとったとき本来原理的に等価な構造をもつ筈の$A_\theta$の構造の豊かさは元の力学系$\Sigma_\theta=(T, \sigma_\theta)$にとって何を意味しているのであろうか？　C*環$A_\Sigma$の構造についての研究は非常に多い。しかし上の様な立場からの結果は次の2つだけである。1つは$\Sigma=(X, \sigma)$（$X$はコンパクト空間）の場合、$\Sigma$の極小性と$A_\Sigma$の単純性が同値という結果で他の1つは最近の$A_\Sigma$がAF環に埋めこめるための力学系としての条件を与えたPimsnerの結果（[3]）である。そしてこの2つとも$A_\theta$のそれぞれの特性の力学系としての背景を示しているが、他の特性の（力学系としての）解析にはとても及んではいない。

本稿はこのような$\Sigma$と$A_\Sigma$との相互連関の立場からの研究の一端を示すものである。

**2. C*クロス積－位相変換群C*環.** これより以後はコンパクト空間$X$上に離散群$G$が位相同型群として作用している力学系$\Sigma=(X, G, \sigma_s)$を考える。C*環$A_\Sigma$は技術的には次のようにして作られる。先ず$\sigma_s$により$C(X)$にひき起された*-同型を$\alpha_s$とかく、即ち$\alpha_s(f)(t)=f(\sigma_s^{-1}t)$. これによる$G$の$C(X)$への作用$\alpha$が考えられる。このとき$\{C(X), G, \alpha\}$は一般にC*-力

学系と呼ばれている。 $k(G, C(X))$ を $G$ 上の有限個の $G$ の元以外は $0$ となるような、$C(X)$ に値をとる関数 $x(s)$ の集合とする。このとき $k(G, C(X))$ は作用 $\alpha$ の"ひねり"を入れた次のような演算により単位元をもつ $*$-ノルム環になる。即ち $x, y \in k(G, C(X))$ について

$$xy(t) = \sum_s x(s)\alpha_s(y(s^{-1}t))$$

$$x^*(s) = \alpha_s(x(s^{-1})^*), \quad \|x\|_1 = \sum_s \|x(s)\| .$$

このようなノルム環のヒルベルト空間上の有界線形作用素環 $B(H)$ の中への表現は（準同型 $\pi$ で $\pi(a^*) = \pi(a)^*$ となるもの）常に $\|\pi(a)\| \leqq \|a\|$ をみたすことが知られている。そこで $k(G, C(X))$ に新しいノルム

$$\|x\|_\infty = \sup \|\pi(x)\| \quad (\pi \text{ は } *\text{-表現のすべてを動く})$$

を定義する。$\|x\|_\infty$ は定義から $C^*$環のノルムの特性 $\|x^*x\| = \|x\|^2$ をもつが、その完備化された $C^*$環が $A_\Sigma$ であり、$C^*$環論では $C^*$クロス積として通常 $C(X) \rtimes_\alpha G$ と記される。ここで $C(X)$ の元 $f$ について $G$ の単位元 $e$ 上で $f$、他では $0$ という関数を $f$ と同一視すれば、$C(X)$ は $k(G, C(X))$ の自己共役部分環、従って $A_\Sigma$ の自己共役部分環として isometric に埋めこめる。実際 $A_\Sigma$ の単位元は $C(X)$ のそれの $A_\Sigma$ への埋めこみである。更に $s \in G$ について $s$ で $1$、他では $0$ という関数 $\delta_s$ を考えると、$\delta_s$ は $A_\Sigma$ の unitary 元でかつ次の共変式をみたす。

$$\delta_s f \delta_s^* = \alpha_s(f) \qquad s \in G$$

一般に $C(X)$ の $B(H)$ への表現 $\pi$ と $G$ の unitary 表現 $u$ があって

$$u_s \pi(f) u_s^* = \pi(\alpha_s(f))$$

となっているとき、これを $\{C(X), G, \alpha\}$ の共変表現という。$A_\Sigma$ は上のノルムの定義と $\delta_s$ の性質から

(a) $\{C(X), G, \alpha\}$ の共変表現について universal 特性をもつ。

ことがわかる。ここで $x \in K(G, C(X))$ は $x(s) = f_s$ とおけば $x = \sum_s f_s \delta_s$ (有限和) とかける。この意味で上の積はこの展開による自然な積になっている。即ち

$$xy = \Big(\sum_s x(s)\delta_s\Big)\Big(\sum_t y(t)\delta_t\Big) = \sum_{s,t} x(s)\delta_s y(t)\delta_t$$
$$= \sum x(s)\alpha_s(y(t))\delta_{st} = \sum_t \Big(\sum_s x(s)\alpha_s(y(s^{-1}t))\Big)\delta_t$$

したがって次が成り立つ。

(b) $\{\sum_s f_s\delta_s \mid f_s \in C(X)\}$ は $A_\Sigma$ の稠密な自己共役部分環である。又 $\{\delta_s \mid s \in G\}$ は $C(X)$ 上1次独立である。

(c) $A_\Sigma$ より $C(X)$ へのノルム1の射影 $E$ が存在し、

$$E(x) = x(e) \qquad x \in K(G, C(X)).$$

この写像 $E$ は正値写像 ($x \geq 0$ のとき $E(x) \geq 0$) であるが忠実 ($x \geq 0$ で $E(x) = 0$ のとき $x = 0$) には一般にならず、このことが $A_\Sigma$ と $C(X)$ との関係を希薄にし $A_\Sigma$ の解析を困難にしている。そこで更に縮約変換群 $C^*$ 環 $A_{\Sigma_r} = C(X) \times_{\alpha_r} G$ (縮約 $C^*$-クロス積) が考えられている。$A_{\Sigma_r}$ は (b) の性質と (c) の代りに (共変表現

$\{\pi, \lambda\}$ において $f \in C(X)$ と $\pi(f)$ とを同一視して）次の (c') の性質をもっている。

(c') $A_{\Sigma_r}$ より $C(X)$ へ $\varepsilon(\sum_s f_s \lambda_s) = f_e$ となるような忠実なノルム1の射影が存在する。

$A_{\Sigma_r}$ の定義の詳細は略するが、その解析には上の条件と更に $a \in A_{\Sigma_r}$ について $a(s) = \varepsilon(a\lambda_s^*)$ とおくと $C(X)$ の元の族 $\{a(s)\}$ が次のように $a$ を完全にきめるという点に留意すればよい。

1° $a(s) = 0 \quad \forall s \in G \Rightarrow a = 0$

2° $a^*(s) = \alpha_s(a(s^{-1}))^*$,

$$ab(s) = \sum_t a(t)\alpha_t(b(t^{-1}s))$$

（一般に右辺の和は無限和になりその収束はノルム位相ではない他の局所凸位相だが和自体は右辺の定義から部分 $C^*$ 環 $C(X)$ に属する）

$A_\Sigma$ は $X$ が1点の時には群 $C^*$ 環 $C^*(G)$ に、又 $A_{\Sigma_r}$ は縮約群 $C^*$ 環 $C^*_r(G)$ になる。(a) の性質から $A_\Sigma$ から $A_{\Sigma_r}$ へは当然 $*$ 準同型があるがこれが同型になるのは群 $C^*$ 環のときと同様に

定理1. $G$ が amenable のとき、上の対応は同型になる。

したがって amenable 群（たとえば可換群）については $A_\Sigma = A_{\Sigma_r}$ について (a) と (c') の両方の特性が使えることになる。上の $\{a(s) \mid s \in G\}$ は $a$ のフーリエ係数と呼ぶ。実際 $G = \mathbb{Z}$ で $X$ が

一点のときには，$\mathbb{Z}$は amenable だから

$$A_\Sigma = A_{\Sigma_r} = C^*(\mathbb{Z}) = C^*_r(\mathbb{Z}) = C(T) \quad (T\text{はトーラス})$$

となり，$\varepsilon$は正規化されたルベーグ測度での積分になるので上の$\{a(s)\}$は関数$a$のフーリエ係数になっている。これから非可換のフーリエ展開の意味で$a$と$\{a(s)\}$との対応を $a = \sum_s a(s)\lambda_s$ とかくことも多い。

変換群$C^*$環(一般には$C^*$クロス積)の構成は元々は$L^1(G, C(X))$の関数が主体なので力学系が離散系でなく連続系のときには$C(X)$を$A_\Sigma$の部分環と考えることも，またユニタリー元$\delta_s$を$A_\Sigma$の元と考えることも出来ない。それらは$A_\Sigma$をもっと拡大した$C^*$環の中で実現されるので，$A_\Sigma$の構造の議論はいささか局面が変ることを注意しておく。

本稿のような立場で問題を考えるときには通常の力学系で課される可算性の条件は必ずしも容認出来ないことがあることも強調せねばならない。$C^*$環的には可算性は$C(X)$の可分性(それと$G$の可算性)の問題になる。しかし$C^*$環の中でも特に可換な von Neumann 環は有限次元以外に可分にならず，その上 shift 作用素の問題([1])のようにそれらを$C(X)$と同一視した時の，コンパクト空間$X$上の力学系が対象になることがあるからである。

$A_\Sigma$の構成について最後に次のような観点をのべておく。位

相空間$X$を代数的にとり扱えばその上の連続関数環$C(X)$を考えることであると言える。$X$に更に群$G$の作用$\sigma$があるとき$\{X, G, \sigma\}$を考えることは$G$の$C(X)$への作用$\{C(X), G, \alpha\}$を考えることと同値である。そこで$\{C(X), G, \alpha\}$が忠実な共変表現$\{\pi, u\}$をもつとすると、$\{C(X), G, \alpha\}$を考えることは$\{\pi(C(X)), u(G)\}$, ひいてはそれらの生成した$C^*$環を考えることと同等であると言える。この$C^*$環は$G$の作用が自明でない限り必然的に非可換になるがいくつかの生成$C^*$環から(a), (b), (c)という一番望まれる生成の性質をもつものを選んだのが$A_\Sigma$であると言える。(条件では$f$と$\pi(f)$は同一視している)。

3. $G$の軌道と$A_\Sigma$の既約表現. $C^*$環としての$A_\Sigma$はその表現の構造が大きな問題になるが、それと$G$の軌道の性質との関係を考えてみる。表現を構成する具体的な方法としては$C^*$環$A$上の正値汎関数$\varphi$による$GNS$-表現(Gelfand-Neumark-Segal)がある。

$$N_\varphi = \{x \in A \mid \varphi(x^*x) = 0\}$$ とおく。

$N_\varphi$は$\varphi$の正値性から導びかれるSchwartzの不等式によって$A$の左イデアルになる。そこで$\eta$を商写像: $A \to A/N_\varphi$として$A/N_\varphi$の内積を

$$(\eta_\varphi(x) | \eta_\varphi(y)) = \varphi(y^*x)$$

で入れこれを完備化したヒルベルト空間を $H_\varphi$ とする. $a\in A$ について $A/N_\varphi$ 上の有界線形作用素 $\pi_\varphi(a)$ を $\pi_\varphi(a)\eta_\varphi(x)=\eta_\varphi(ax)$ と定義しこれを $H_\varphi$ 上に拡大したものをまた $\pi_\varphi(a)$ とかくことにすると, $\pi_\varphi$ は $A$ の $H_\varphi$ 上への表現を与え, $\varphi$ は $H_\varphi$ の vector $\xi_\varphi$ によって $\varphi(a)=(\pi_\varphi(a)\xi_\varphi|\xi_\varphi)$ とかける。$1\in A$ のときには $\xi_\varphi=\eta_\varphi(1)$ である. $\{H_\varphi,\pi_\varphi,\xi_\varphi\}$ の3つ組を $\varphi$ の GNS 表現と呼ぶ. ここで $[\pi_\varphi(A)\xi_\varphi]=H_\varphi$ である。

単位元をもつ $A_\Sigma$ のような $C^*$ 環上では正値汎関数が $\|\varphi\|=1$ となることと $\varphi(1)=1$ とは同値になるので, このような正値汎関数(以下 state と呼ぶ)の全体 $S(A_\Sigma)$ は共役空間の弱*コンパクトな凸集合をつくっている。したがって端点を充分沢山持つがこれらを pure state という. $\varphi$ が pure state なことと GNS 表現 $\{H_\varphi,\pi_\varphi,\xi_\varphi\}$ が既約なこととは同値である.

さて $x\in X$ の $G$ 軌道を $O(x)$ とかく. また

$$X_n=\{x\in X \mid |O(x)|=n\},\quad X^n=\{x\in X \mid |O(x)|\leq n\},$$

$G_x$ を $x$ の isotropy 群とする. $A_\Sigma$ 上の state の中では $X$ の点 $x$ の評価から得られる $C(X)$ 上の pure state $\varphi_x$ (i.e. $\varphi_x(f)=f(x)$) を $A_\Sigma$ まで拡大したものが力学系の情報を自然にになっていると考えられる。そこでその GNS 表現の構造から次のような $G_x$ の表現からの $A_\Sigma$ の誘導(共変)表現 $\rho_{x,u}$ を定義する. $u$ を $G_x$ の $H_u$ 上へのユニタリ表現, $R=\{\gamma_\alpha\}$ (ただし $\gamma_0=$

e)を左 coset 空間 $G/G_x$ の代表元の集合，そして

$$H = \ell^2(G/G_x) \otimes H_u = \sum_\alpha e_\alpha \otimes H_u \quad (\text{ヒルベルト和}).$$

とおく。ここで $\{e_\alpha\}$ は $\ell^2(G/G_x)$ 上の直交基である。そこで $C(X)$ の表現と $G$ のユニタリ表現を

$$\pi_x^R(f)(e_\alpha \otimes \xi) = f(\gamma_\alpha x)\, e_\alpha \otimes \xi \quad (\sigma_{\gamma_\alpha} x \text{ を } \gamma_\alpha x \text{ とかく}).$$

$$L_u^R(s)(e_\alpha \otimes \xi) = e_\beta \otimes u_t \xi \quad (s\gamma_\alpha = \gamma_\beta t \quad t \in G_x)$$

と定義すると $\{\pi_x^R, L_u^R\}$ は共変表現となり $A_\Sigma$ の表現を定義する。ここでユニタリ同値性の意味でこの表現は $R$ のとり方（もち論 $\{e_\alpha\}$ のとり方）に関係しないのでこれを以下 $\rho_{x,u} = \pi_x \times L_u$ とかく。

命題2 (a) $\varphi$ を $\varphi_x$ の $A_\Sigma$ への state 拡大とすると $\varphi$ の GNS 表現は上の形をしている。

(b) $\rho_{x,u}$ が既約となるのは $u$ が既約のとき、そのときのみ。ここで $H_\varphi$ の中で $e_0 \otimes H_u$ に対応する部分空間は

$$\{\xi \in H_\varphi \mid \pi_\varphi(f)\xi = f(x)\xi, \ \forall f \in C(X)\}$$

である。

定理3. $\rho_{x,u}$ と $\rho_{y,v}$ がユニタリ同値になるための条件は $O(x) = O(y)$ でかつ $y = \gamma_0 x$ とおいたとき、$G_x$ の2つの表現

$t \to u_t$ と $t \to v_{\gamma_0 t \gamma_0^{-1}}$ がユニタリ同値になることである。

このことから具体的な力学系について $\varphi_x$ と $\varphi_y$ の state 拡大の GNS 表現がいつ同値になるかが判定出来る。例えば無理数回転 $\sigma_\theta$ においては isotropy 群はすべて自明であるから条件は $O(x)=O(y)$ のみになる。

上の表現は $A_\Sigma$ の表現としては非常にわかり易い形をしているが一般にはたとえ既約表現でも上のような形をしているとは限らない。例えば $L^2(T)$ 上に $C(T)$ の表現として掛算作用素 $\pi(f)g=fg$ をとり、ユニタリを $(u_\theta f)(x)=f(x-\theta)$ と定義した $\{C(T),\mathbb{Z},\alpha_\theta\}$ の共変既約表現(即ち $A_\theta$ の既約表現)はこの形にはなっていない。$C^*$ 理論としては $A_\Sigma$ についてもっと一般の誘導表現が定義され、$A_\Sigma$ の既約表現が常にその形になるための条件などが議論されているが、それには軌道空間 $X/G$ が常識的測度論的にかなり良い空間になっていなければならない。$X/G$ はたしかに原理的には $A_\Sigma$ の表現の構造をになっている筈なのであるが explicit な対応をとると、$\sigma_\theta$ の場合でもこの意味では非常に"悪い"空間になっているので(Connes の非可換積分論を用いる方法もあるが)この辺の解析は今の所そう進んではいない。

点 $x$ が有限軌道をもつとき $\rho_{x,u}$ を有限型の表現と呼ぶ。上

にのべたことを考慮すれば下の結果がそう自明なものでないことも伺えよう。

定理4. $X$ の点がすべて有限軌道をもてば $A_\Sigma$ の既約表現はすべて有限型である。逆も成り立つ。

ここで有限型既約表現は $G_x$ の表現の誘導であるので、一般には有限次元にはならないが、例えば $G$ が可換のときには $G_x$ の既約表現は1次元になるので有限型と有限次元とは同じになる。そしてこのときには $u$ は $G_x$ の character にほかならない。ここで $X$ 全体に条件をつけなくても $A_\Sigma$ の有限次元既約表現は $\rho_{x,u}$ の形になることは言えるので、$G$ が可換なときには、次元を固定すれば $A_\Sigma$ の $n$ 次元既約表現の空間は積空間 $X_n/G \times \hat{G}_x$ として実現出来る。しかし異った次元を合せるとその継目の位相のずれが問題になり、$G$ の作用に何か好条件を仮定しなければ表現空間の global な実現結果は期待出来ない。

$C^*$環の種類としてはすべての既約表現が有限次元になるのが有限次元 $C^*$環の次に簡単な構造をもつと考えられている。即ち $A_\Sigma$ については $G$ が可換なときには力学系が上の定理のようになっている時である。しかし力学系としてはどうであろうか？

§4. $A_\Sigma$ のイデヤルの構造とGの作用　この節全体でGのXへの作用はeffectiveとする。即ち $s\neq e$ のとき $s$ はX上の位相同型として恒等写像ではないとする。その作用の時と同様にX上のG軌道が全て稠密であることをΣが極小ということにする。またXの任意の空でない開集合U, Vをとったとき

$$\exists s\in G : sU\cap V\neq\phi$$

となるときをregionally transitive, Xに稠密な軌道が存在するときをΣを位相推移的と呼ぶことにする。$C^*$環論では上のregionally transitiveが位相推移的と呼ばれることが多い。Xを距離空間とすれば、Gが可算なときには両者の区別がないことはよく知られているが、我々の立場ではむしろこの違いが大事な問題になる。

さて上の様相に対して$A_\Sigma$の$C^*$環としての基本様相は単純か、primeかprimitiveかということになる。ここでprimeとは$A_\Sigma$の閉イデヤル$I, J$がもし$I\cap J=\{0\}$なら$I$又は$J$が0イデヤルということで、$A_\Sigma$が忠実なファクター表現（表現の生成するノイマン環の中心が自明）をもつこととほぼ同値である。

$A_\Sigma$が忠実な既約表現をもつときをprimitiveという。対応して$A_\Sigma$のイデヤル$I$は商$C^*$環$A/I$がprime, primitiveのときそれぞれprime, primitiveと呼ぶ。1節でのべたように単純性については、$\Sigma=(X,\sigma)$のときにはΣの極小性と同値で

あった。しかし極小性はGがどんな群であっても(前述のように)定義出来るので、この結果がどこまで成り立つのかが次の問題になる。ここでもし$A_\Sigma$のイデアル構造が

$$I \cap C(X) \neq \{0\} \rightleftarrows I \neq \{0\} \quad \cdots\cdots (A)$$

という形で$C(X)$のそれに帰着するならば、問題は$C(X)$のG不変なイデアルの構造、したがってXのG不変な閉集合の構造の話となり、力学系の状況から色々なことが割り出せる。そこで上の状況をみたすような力学系の条件を考えてみる。

$$X_s = \{x \in X \mid sx = x\} \quad (s \in G,\ \sigma_s \text{の代りに} s \text{とかく}).$$

とおく。次の条件を考える。

$$\forall s \neq e : X_s \text{の内点は存在しない} \quad \cdots\cdots (B)$$

定理5. (B) ⇒ (A) である。逆は例えばGが可換群のとき成り立つ。ただしGはamenableとする。

系. Gを可換群とする。このとき

(1) $\Sigma = (X, G)$ が極小であることと、$A_\Sigma$が単純なことは同値である。

(2) $\Sigma$ が regionally transitive なことと $A_\Sigma$ が prime なことは同値である。

両方の証明ともにこのときには集合 $X_s$ が $G$ の作用で不変なことが本質的になっている。そのために例えば $\Sigma$ が極小のときには $X_s=\phi\ (s\neq e)$ となり、(A) の条件から $A_\Sigma$ が単純なことがわかる。

一般に $C(X)$ の、$G$ の作用で不変なイデアルから $A_\Sigma$ のイデアルを生成することは常に出来るから、$A_\Sigma$ の代数的条件から力学系の条件を導びくことはそう困難ではない。しかし普通は (A) の条件は期待できないので $A_\Sigma$ のイデアルの状況を記述するのは難かしい問題になる。そして (A) に対応する力学系の条件が当然問題とされるが、それが少くとも可換群のときには、(B) の条件になるわけである。さて上の (1) は $G=Z$ の場合の拡張になっているが、$C^*$環の枠組では可換群 $G$ に対しては一般の $C^*$環についてのクロス積 $B\rtimes_\alpha G = B\rtimes_{\alpha r} G$ が単純又は prime になるための力学系 $(B, G, \alpha)$ の条件が知られている。しかしそれらは Connes spectrum を用いた $C^*$環の言葉でとらえられている。$C^*$環論としては、$G$ が局所コンパクトな可換群の時にはクロス積の研究が良くされているが非可換群の作用については殆んど理論として手がついていないのが現状である。しかし amenable な非可換群の作用などは通常の力学系でもよく見られるので定理5がそのまま成立するのか又は (B) の代りにもっと"正しい"力学系の条件があるのかは興味ある問題である。

問 amenable群Gの作用が極小のとき(B)は成立するか？

§4. その他。紙数の都合もあって本稿では測度の役割に全然ふれていないが、例えば不変測度の存在は$A_\Sigma$の問題としてはtrace（$\tau(xy)=\tau(yx)$となるようなstate）の存在に直接つながり、その一意性などが議論されている。例えば$A_\theta$の場合は$C(T)$上のルベーグ測度とノルム1のprojection Eとをつないだ$\tau=\mu_0\cdot E$が唯1つのtraceになっている。又エルゴード測度の存在やその台の構造も$C(X)$と$A_\Sigma$の双方から眺めた形で問題とされ、可算性の下では大事な部分になるが、その仮定なしの一般的議論においては位相的な問題程に測度論的問題は重大な役割を果さないように思える。

## 文　献


1. 河村－武元：$C^*$-algebras associated with shift dynamical systems, J. Math. Soc. Japan 36 (1984), 279-293
2. 河村－武元－富山；State extensions in transformation group $C^*$-algebras, to appear in Acta Sci. Math.
3. M.V. Pimsner ; Embedding some transformation group $C^*$-algebras into AF-algebras, Ergodic theory and Dynam. Sys., 3 (1983), 613-626
4. 富山：Invitation to $C^*$-algebras and topological dynam. Sys. 1987.