数理解析研究所講究録
636巻 1987年 153-169

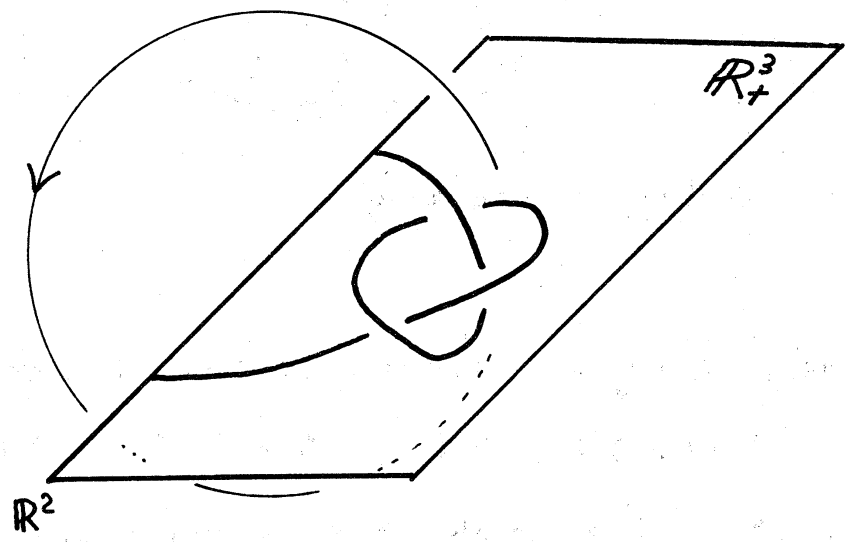
Twisting and Rolling

神大 理。 寺垣内 政一
(Masakazu Teragaito)

§1. 1-knot から何らかの operation で得られる 2-knot を考える:

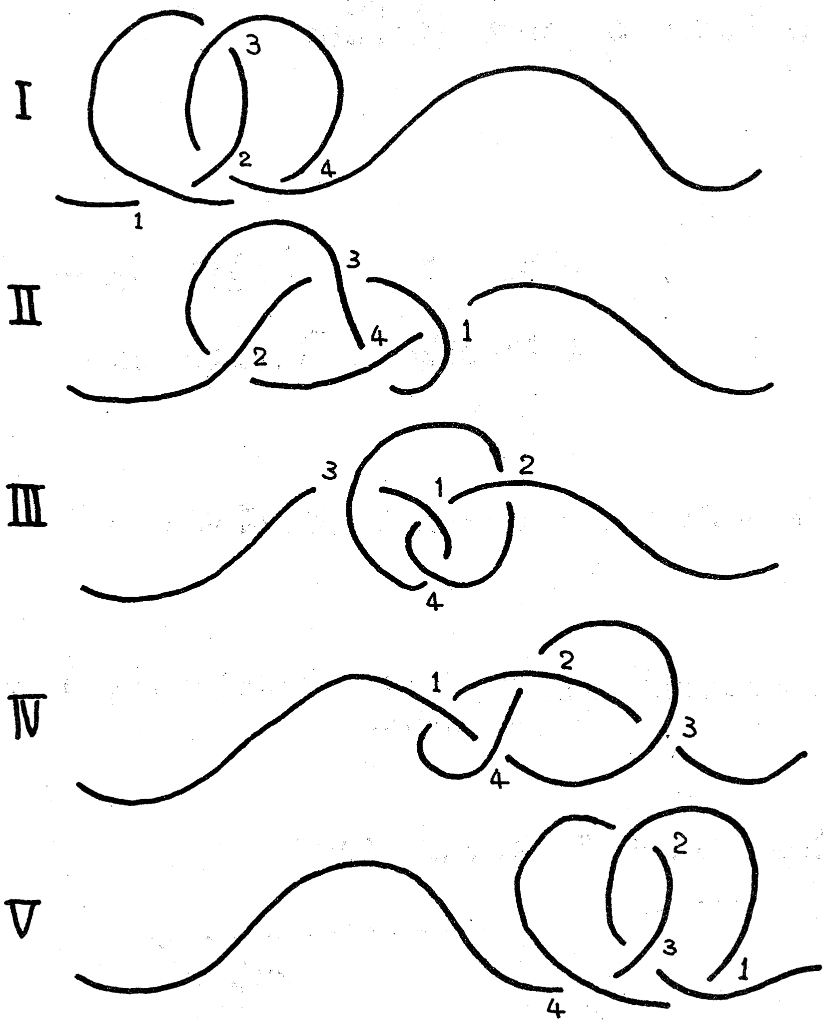
$$\text{1-knot (knotted arc)} \xrightarrow[\text{operation}]{} \text{2-knot (locally flat)}$$

Examples. (i) Spinning (E. Artin 1925)



(ii) Twist - spinning (R.H. Fox , E.C. Zeeman 1965)

(iii) Roll-spinning (R.H.Fox 1965)



Fox's roll-spun figure-eight knot

--- rolling a stocking ---

Twisting , rolling は、spinning process に knotted arc の " motion " を組みあわせたものである。Fox は上図で得られる 2-knot が、figure-eight knot の twisting では得られないことを、1-st elementary ideal の円分体への表現を

用いて示した。しかし、rollingの厳密な定義は与えていない。後に、Fox's roll-spun figure-eight knot が trefoil の twisting では得られる（実は 3-twist-spun trefoil）ことを示す。

§2. Litherland はこれらを包括する deform-spinning を定義した。

Definition. (R.A. Litherland 1979)

(B^3, β) : (locally flat) ball pair $(\beta \cong B^1,\ \partial\beta = \beta \cap \partial B^3)$

${}^\forall g : (B^3, \beta) \xrightarrow{\cong} (B^3, \beta)$ with $g|_{\partial B^3} = \mathrm{id}$

$$P(g) \overset{\text{def}}{\equiv} \partial(B^3, \beta) \times B^2 \underset{\partial}{\cup} (B^3, \beta) \underset{g}{\times} \partial B^2$$

この時、$P(g)$ は locally flat sphere pair で、g の rel ∂B^3 isotopy class にのみ依存する。

$H(B^3, \beta) = \{g\ ;\ \text{as above}\}$: group

$\mathcal{D}(B^3, \beta) = H(B^3, \beta) / \text{isotopy rel } \partial B^3$: deformation group of (B^3, β)

$\mathcal{D}(B^3, \beta) \ni {}^\forall \gamma$ (deformation と呼ぶ)　g : γ の代表元

$\gamma(\beta) \overset{\text{def}}{\equiv} P(g)$ として、knot $\gamma(\beta)$ を β の γ-spin と呼ぶ。

knotted arc の "motion" を、mapping torus $(B^3, \beta) \underset{g}{\times} \partial B^2$ の形でその monodromy に吸収しているわけである。

さて便宜上、次の定義を与える。

(S^3, K) : knot $\quad * \in K$: fixed

$$H_s(S^3, K) = \{ g : (S^3, K) \xrightarrow{\cong} (S^3, K) \mid g = \mathrm{id} \text{ on some nbd. of } * \}$$

(ここでいう nbd. は g に依存する。)

$H_s(S^3, K) \ni g, h \quad g \sim h \iff g \underset{\text{isotopic rel some nbd of } *}{\sim} h$

$$\mathcal{D}(S^3, K) = H_s(S^3, K)/\sim .$$

しかし, $*$ の standard ball nbd. の complementary ball pair から決まる β を考えることによって

同型 $\quad \varphi : \mathcal{D}(B^3, \beta) \xrightarrow{\cong} \mathcal{D}(S^3, K)$

が得られる。そこで, $\mathcal{D}(S^3, K) \ni \gamma$ に対し, $\gamma(K) \overset{\text{def}}{\equiv} \varphi^{-1}(\gamma)(\beta)$

として, K の γ-spin と呼ぶ。

この formulation に従う twisting, rolling の定義を与える。

Example 1. <u>Twisting</u>.

$X = \overline{S^3 - N(K)}$: exterior

$\partial X \times I$; collar of $\partial X = K \times \partial D^2$ in X $\quad (\partial X = \partial X \times \{0\})$

$t : (S^3, K) \xrightarrow{\cong} (S^3, K)$ by

$$\begin{cases} t(x \times \bar{\theta} \times \varphi) = x \times (\overline{\theta + \varphi}) \times \varphi \\ \qquad\qquad\qquad (x \times \bar{\theta} \times \varphi \in K \times \partial D^2 \times I) \\ t(y) = y \qquad (y \notin \partial X \times I) \end{cases}$$

$\tau \in \mathcal{D}(S^3, K)$: t の class

K の τ^m-spin を、K の m-twist-spin という。

$$\left(\begin{array}{l} \text{quotient map } \mathbb{R}^1 \longrightarrow S^1 \text{ by } \theta \to \bar{\theta} \\ \qquad (\bar{\theta} = \bar{\varphi} \iff \theta - \varphi \in \mathbb{Z}) \\ \text{によって } S^1 \text{ を parametrize している。} \end{array}\right)$$

Example 2. Rolling.

$r : (S^3, K) \overset{\approx}{\rightarrow} (S^3, K)$ by

$$\begin{cases} r(\bar{x} \times \bar{\theta} \times \varphi) = (\overline{x+\varphi}) \times \bar{\theta} \times \varphi \\ \qquad\qquad (\bar{x} \times \bar{\theta} \times \varphi \in K \times \partial D^2 \times I) \\ r(y) = y \qquad (y \in \partial X \times I) \end{cases}$$

$\rho \in \mathcal{D}(S^3, K)$: r の class

K の ρ^ℓ-spin を、K の ℓ-roll-spin という。

Fox's original idea との対応を詳しく述べるつもりはないが、knotted arc の motion を、exterior の collar 内で吸収しているにすぎない。

Example 3. Symmetry-rolling.

(S^3, K) ; order $n \neq 0$ の symmetry g をもつ.

すなわち，$g : (S^3, K) \xrightarrow{\cong} (S^3, K)$; period n

$\mathrm{Fix}(g) =$ unknotted circle J，$J \cap K = \phi$

さて，$S^3/g = S^3$ で，$d : S^3 \longrightarrow S^3$: quotient map

に対して，$\bar{K} = d(K)$，$\bar{J} = d(J)$ とおく。

$\ell k(\bar{K}, \bar{J}) = \ell k(K, J) = j$ は，n と素である。

$K \times D^2$ は，$\bar{K} \times D^2$ の n-fold cyclic cover となり，それは

$$d(\bar{x} \times v) = \overline{nx} \times v \qquad (\bar{x} \times v \in K \times D^2)$$

で与えられる。従って，$g^j|_{K \times D^2}$ は canonical covering transformation を与え，

$$\bar{x} \times v \longrightarrow \overline{(x + \tfrac{1}{n})} \times v$$

で表せる。$jk \equiv 1 \pmod n$ なる k をとると，

$$g = g^{jk} ; \bar{x} \times v \longrightarrow \overline{(x + \tfrac{k}{n})} \times v \qquad (\bar{x} \times v \in K \times D^2)$$

ここで，$s' : (S^3, K) \xrightarrow{\cong} (S^3, K)$ by

$$\begin{cases} s'(\bar{x} \times \bar{\theta} \times \varphi) = \overline{(x - \frac{k(1-\varphi)}{n})} \times \bar{\theta} \times \varphi & (\bar{x} \times \bar{\theta} \times \varphi \in K \times \partial D^2 \times I) \\ s'(\bar{x} \times v) = \overline{(x - \frac{k}{n})} \times v & (\bar{x} \times v \in K \times D^2) \\ s'(y) = y & (y \in X - (\partial X \times I)) \end{cases}$$

とすると，$s' \circ g|_{K \times D^2} = id$，$s' \circ g|_{\overline{X - (\partial X \times I)}} = g$ ．

こうして，$\sigma_{g,K} \in \mathcal{D}(S^3, K)$ を，$s' \circ g$ の class とする。

（定義より、$n=1$, $g=id$, J を任意にとると、rolling に帰着し、$\sigma_{g,k}=\rho^k$ である。）

Litherland は、(S^3,K) に対して、その knot group G の peripheral subgroup を固定する G の自己同型全体のなす群 $\mathrm{Aut}_\partial G$ が、$\mathcal{D}(S^3,K)$ と同型であることを示し、代数的議論から次のことを示した。

Theorem　$(S^3, T_{p.q})$: $(p.q)$-type torus knot

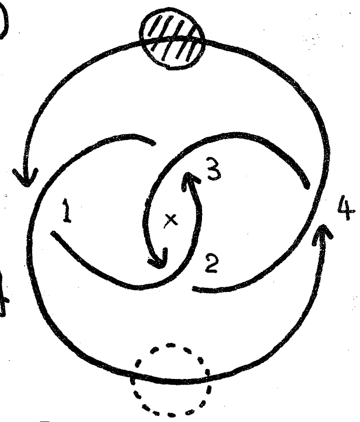
$$\mathcal{D}(S^3, T_{p.q}) = \langle \tau \rangle \cong \mathbb{Z} \quad , \quad \tau^{pq}\rho = 1 \quad .$$

定理は、torus knot に対する deformation が本質的に、twisting のみであることを意味する。

本編では、この定理をふまえて、torus knot に対する rolling, symmetry rolling を"視覚的"に分析する。

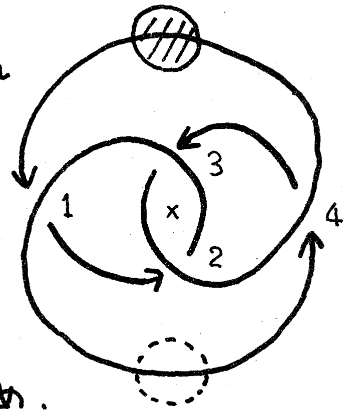
§3.　rolling, symmetry rolling を knotted arc の"motion"で扱いたい。Litherland の定義が示唆するように、rolling は、(S^3,K) からとりのぞかれる standard ball pair が knot の orientation（parametrization による）に従って、knot 上を流れていくことを、complementary ball pair 内の arc の

motion で相対的に表現したものといえる。(Litherland はさらにこの流れを exterior に吸収した。)



前述の Fox's roll-spun figure eight の図で、standard ball pair が i-th crossing を通過することに対応して、i-th crossing を"送る" motion が生じている。
1 → 2 → 3 → 1 の順に crossing が送られているから、Litherland の意味の roll-spun ではなく half-rolling である：Fox's roll-spun figure eight $= \sigma_{g.1}$ (figure eight)

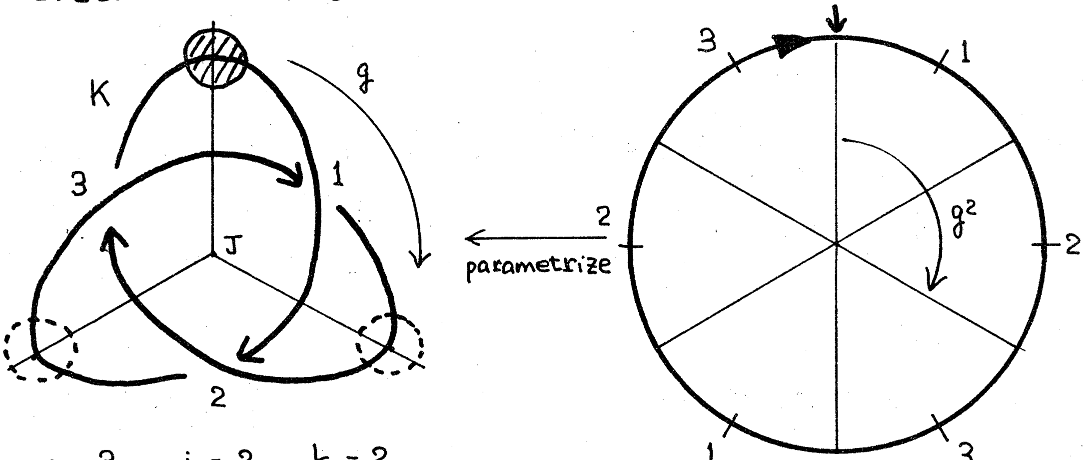
こうして rolling の motion を任意の knot に対して描くことができる。ただし一般には、meridian 方向のねじれを考慮する必要がある。



例えば trefoil の場合、standard ball pair が 1 → 2 → 3 → 1 の順に crossing を通過すると、meridian 方向に 2 周するため、対応する deformation は $\tau^2 \sigma_{g.1}$ である。(τ の定義より、meridian 方向に arc を回転することは τ^{-1} に対応している。)

さて、1-roll ρ は standard ball pair が knot に沿って 1 周することに対応する。この観点から、$\sigma_{g.k}$ を " $\rho^{\frac{k}{n}}$ " と

考えることが自然である; knotにsymmetryに応じたparametrizationを与えておく。



$n=3$, $j=2$, $k=2$

$g^2|_{K\times D^2}$; $\bar{x}\times v \to \overline{(x+\frac{1}{3})}\times v$

standard ball pairが、$1\to2\to3\to1$ とcrossingを通過することが $\sigma_{g,2}$ だが(meridian方向のねじれは無視しておく。)これは $\rho^{\frac{2}{3}}$ と考える。同様に、$1\to2$ に対応する $\rho^{\frac{1}{3}}$ が定義できる。一般に、g^j は $\rho^{\frac{1}{n}}$ に対応する。(§2 Example 3のnotation) deformationとして厳密な定義は、$\sigma_{g,k}$ と同様に行なえるが、ここではむしろknotted arcの"motion"として定義する。

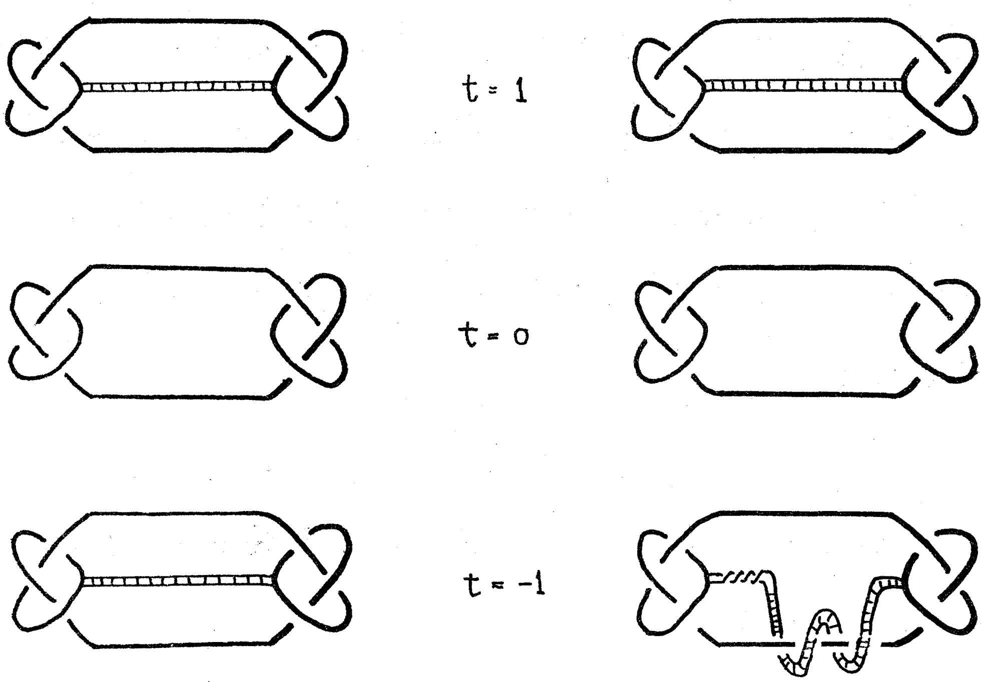
このnotationを用いて、Litherlandの定理から次のことがすぐわかる。

<u>Theorem 1</u> $\mathcal{D}(S^3, T_{p,q})$ において、

$$\rho^{\frac{1}{p}} = \tau^{-q} \quad , \quad \rho^{\frac{1}{q}} = \tau^{-p}$$

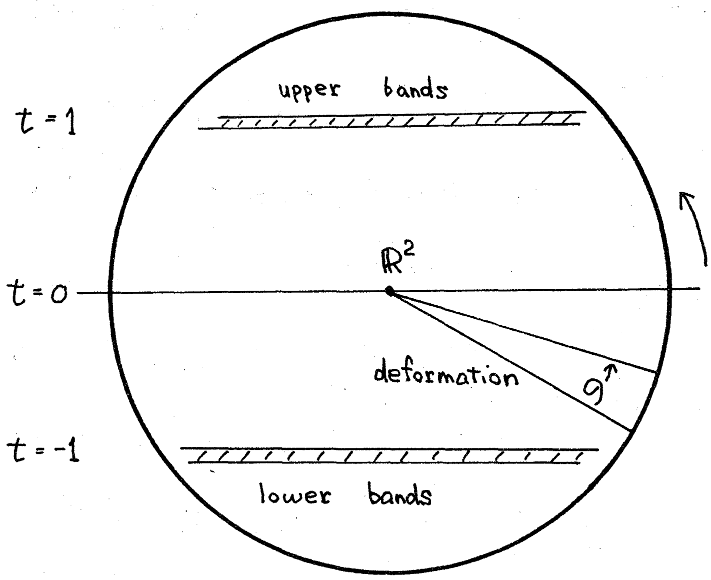
Remark. $T_{p,q}$ $(0<p<q)$ の periods は p, q の約数である。

§4. Moving picture method により、Thm 1 を証明する。$\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ 内の hyperplanes $\mathbb{R}^3[t] = \mathbb{R}^3 \times \{t\}$ による cross sections をみる。簡略のため、equatorial cross section $(t=0)$ 及び $t=\pm 1$ level の critical bands を示している。



τ^0 (trefoil) $\qquad$ τ^{-2} (trefoil)

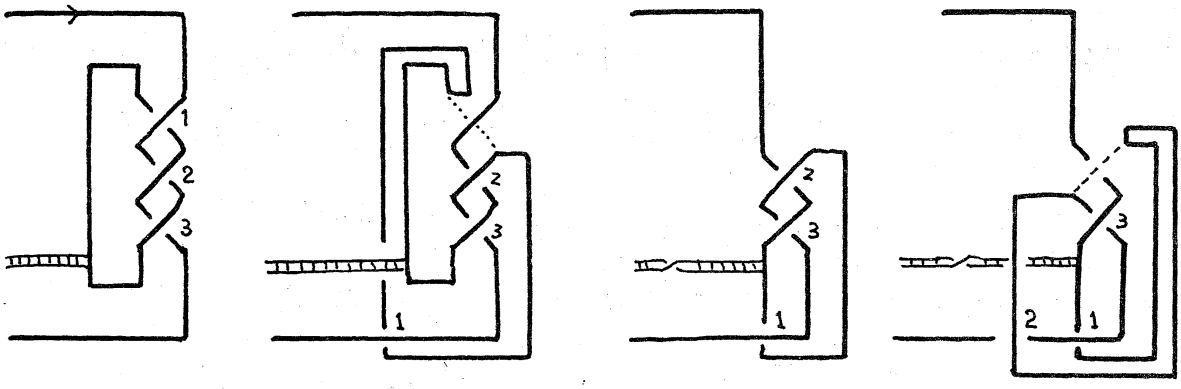
τ^0— spinning に対しては、original knotted arc の $\mathbb{R}^3_+$ 内の minimal points に対応して bands が生じる。一般の deformation に対しては次の様に考える；spinning process において、lower bands の生じた後に deformation を行なう。次に、

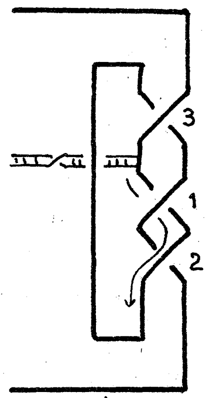


deformation に従って cellular move で lower bands をひきあげる。

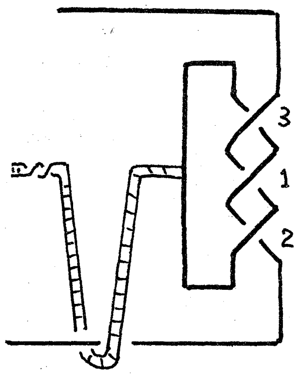
こうして、deformation の情報を lower bands のみに集めることができる。形式的には、bands を伴なったまま deformation — arc の motion を行なえば、望む bands が得られる。例えば τ^{-2}(trefoil) は先の図に示した lower band を持つ。(詳細は金信氏の論文を御覧下さい。)

さて Thm 1 を証明する。まず、$T_{2,3}$ に対して $\rho^{\frac{1}{3}}(T_{2,3}) = \tau^{-2}(T_{2,3})$ を示す。ここでの等号の意味は、2-knot として same type であることだが，Litherland の定理とあわせて deformation として一致することがわかる。





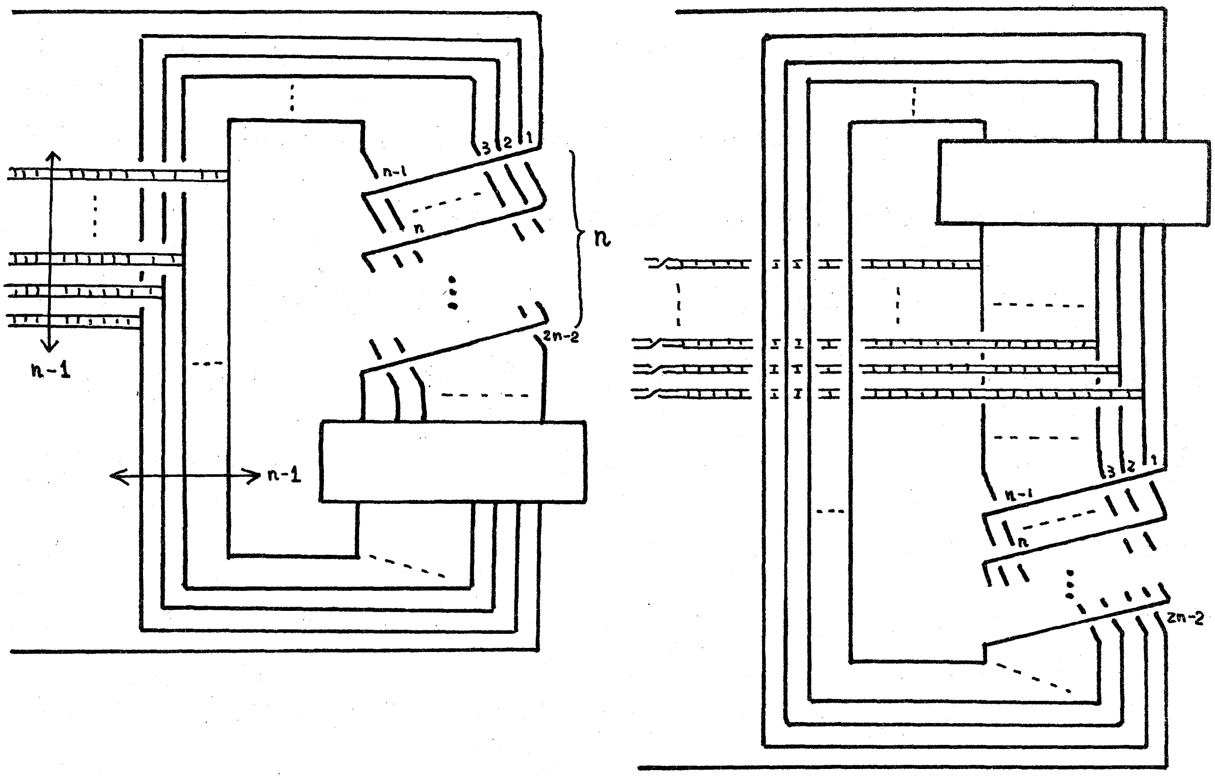
$\tau\rho^{\frac{1}{3}}(T_{2,3})$



$\tau^{-1}(T_{2,3})$

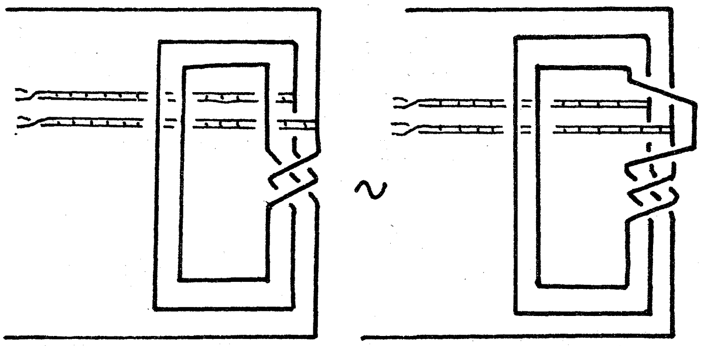
crossing の数が3だから ρ は6回 crossing を送ることに対応する。$\rho^{\frac{1}{3}}$ は2回に対応するが、meridian 方向に1周するから行なわれた deformation は実は $\tau\rho^{\frac{1}{3}}$ である。しかしその lower band は、twisting band であることがわかる。従って $\tau\rho^{\frac{1}{3}}(T_{2,3}) = \tau^{-1}(T_{2,3})$ i.e. $\rho^{\frac{1}{3}}(T_{2,3}) = \tau^{-2}(T_{2,3})$ である。同様に、3-rd crossing の部分を $(p-2)$ half twists でおきかえることで、$\rho^{\frac{1}{p}}(T_{2,p}) = \tau^{-2}(T_{2,p})$ $(p \geq 3)$ を得る。

一般に $T_{n,p}$ $(p \geq n+1)$ に対して、$\rho^{\frac{1}{p}}(T_{n,p}) = \tau^{-n}(T_{n,p})$ を示すには $T_{n,n+1}$ について考えれば十分である。次図のような $T_{n,p}$ の projection をみる。crossing は $(n-1)\cdot p$ 個あるから、ρ は $2(n-1)\cdot p$ 回，$\rho^{\frac{1}{p}}$ は $2(n-1)$ 回 crossing を送ること



に対応する。meridian 方向に(n−1)周するから、deformation $\tau^{n-1}\rho^{\frac{1}{p}}$ である。さて $T_{2,3}$ の場合と同様に、arc の motion を行なった後 arcを元の形に整えると、lower bands は上図右のようになる。内側の bandから順に下へ slide させて引き出すと、τ^{-1} に相当する bands であることがわかる。従って $\tau^{n-1}\rho^{\frac{1}{p}}(T_{n,p})=\tau^{-1}(T_{n,p})$ i.e. $\rho^{\frac{1}{p}}(T_{n,p})=\tau^{-n}(T_{n,p})$ を得る。(一般に扱う必要があるから、motionを行なう間及び arc を元の形に整える時、bandsはできるだけ動かしたくない。arc の形を復元することが優先する。その際、新たに crossingを作ることは許されない。)

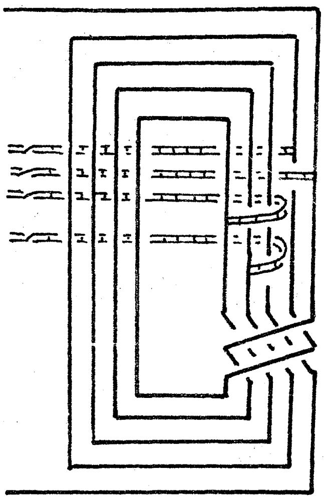
次に、$T_{n,p}$ $(n>p)$ に対して $\rho^{\frac{1}{2}}(T_{n,p}) = \tau^{-n}(T_{n,p})$ を示す。先と同様に、crossing が $(n-1)p$ 個の projection において、$\rho^{\frac{1}{2}}$ は $2(n-1)$ 個を crossings を送る motion に対応する。しかし meridian 方向に $(n-1)$ 周するから、対応する deformation は $\tau^{n-1}\rho^{\frac{1}{2}}$ である。従って、motion によって生じる lower bands が先と同様に、(-1)-twisting bands であることをみればよい。



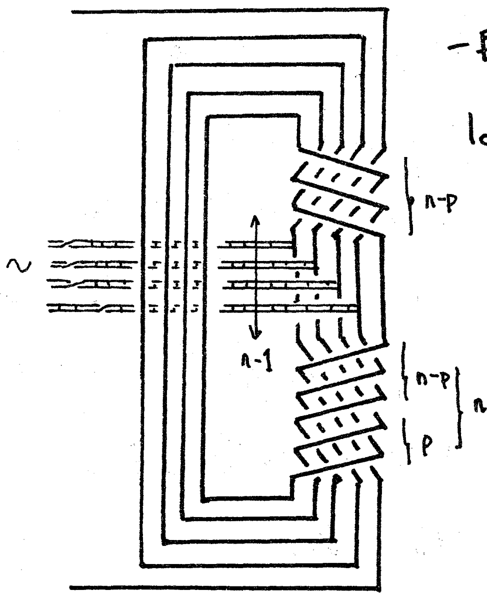
$\tau^{2}\rho^{\frac{1}{2}}(T_{3,2})$

bands は少し違っているが、図のようにしてやると $T_{n,p}$ $(n<p)$ の場合と同じく bands を下へ slide して、twisting bands である。

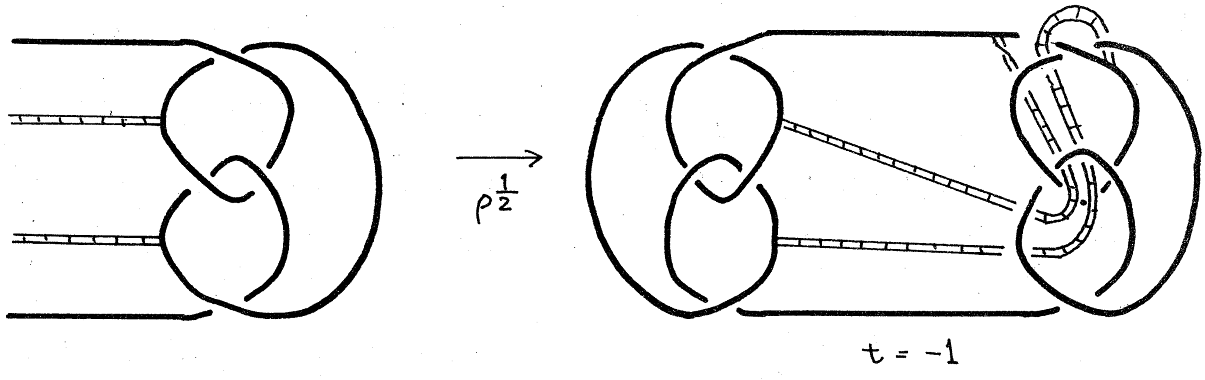
一般に、左図のような lower bands となり(arc の復元後)n と p の差に関係する。



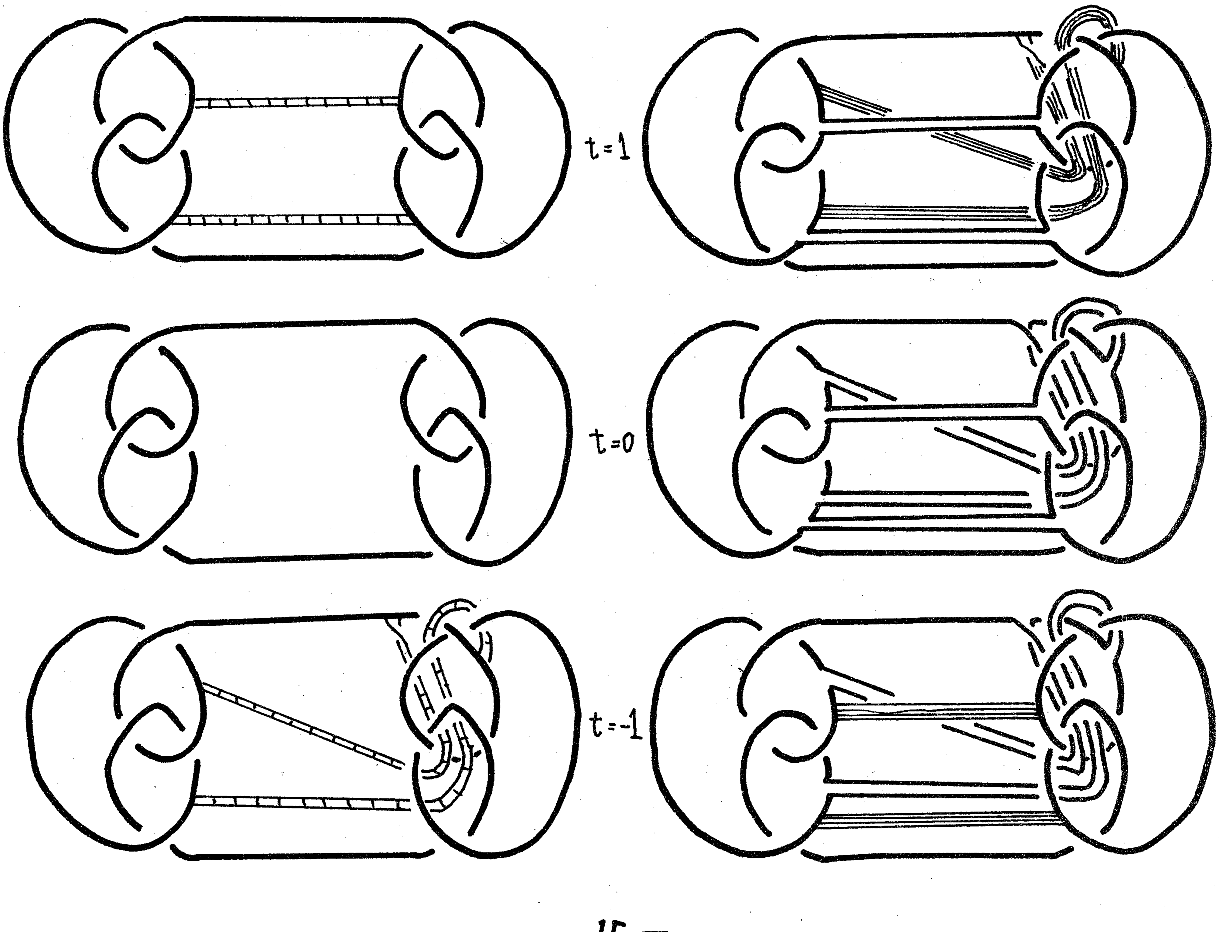
$\tau^{4}\rho^{\frac{1}{2}}(T_{5,2})$



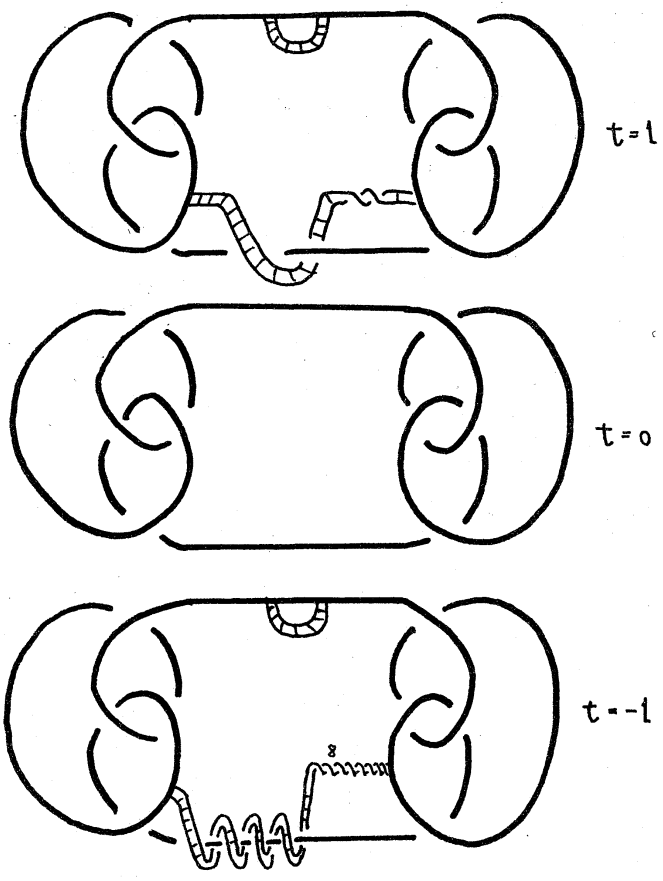
§5　最後に、Fox's roll-spun figure eight knot　i.e. $\rho^{\frac{1}{2}}$(figure eight) が　3-twist-spun trefoil であることを moving picture method により示す。



これは t=−1 level にある lower bands であった。



図のように upper bands と lower bands の level を入れかえる。そして $\mathbb{R}^4$ の vertical-line-preserving ambient isotopy によって、左図になおせる。



さらに、upper band のからみを解消する v-l-p ambient isotopy を行なえば、deformation の情報を lower band に集めることができ、3-twisting band である。

こうして、

$$\rho^{\frac{1}{2}}(\text{figure-eight}) = \tau^3(\text{trefoil})$$

を得る。

これらは、prism manifold $M_{1,2} = (-1, (o_1, 0); (2,1), (2,1), (2,1))$ を punc したものを fiber にもつ fibered 2-knot である。torus knot 以外の knot に対する deformation では、興味深い現象が様々起こるのだが、それについては稿を改めたい。

References

Zeeman, E. C., 1965 : Twisting spun knots. Trans. Amer. Math. Soc., 115 (1965) 471 - 495

Fox, R. H., 1966 : Rolling. Bull. Amer. Math. Soc., 72 (1966) 162 - 164

Litherland, R. A., 1979 : Deforming twist-spun knots. Trans. Amer. Math. Soc., 250 (1979) 311 - 331

Kanenobu, T., 1983 : Fox's 2-spheres are twist spun knots. Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ., Ser. A., 37 (1983) 81 - 86