数理解析研究所講究録
636巻 1987年 141-152

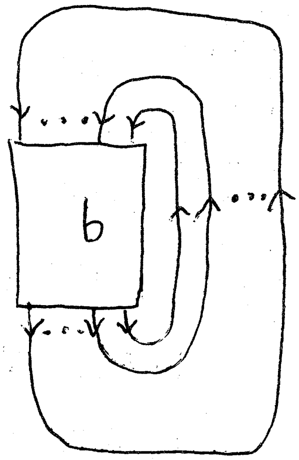
数理物理とリンクの多項式不変量

阪大 理 村上 順
Jun Murakami

序. [W-A 1,2], [Jo] 及び [T] により, いくつかのリンクの多項式不変量が, 場の量子力学や統計物理に関係してできた Yang-Baxter 方程式の解と深く関係していることが示された。また、このことを用いて [Jo]と[T]で二変数 Jones 多項式や Kauffman 多項式の state model による解釈が与えられた。ここでは, 上記の内容を主に [T]に沿って紹介したい。

1. ブレイドとリンク

B_n を n 本の糸 (string) を持つブレイドのなす群とする。また $B = \{(b,n) \mid b \in B_n\}$ をブレイド全体の集合とする。ブレイド (b,n) の上端と下端を右図のように結んでできる(向きのついた)リンクの diagram を (b,n) の closure と呼び, $(b,n)^\wedge$ 又は $b^\wedge$ と書く。次の２つの定理により, リンクの ambient isotopy 類の分類がブレイドのある同値類の分類に帰着される。



<u>1.1 定理</u> (Alexander [B]) 任意の $\mathbb{R}^3$ 中のリンク K に対し、ある $(b, n) \in B$ で、K が $(b, n)^\wedge$ の表わすリンクと ambient isotopic になるものが存在する。 □

さらに2つのブレイド (b_1, n_1) と (b_2, n_2) の closure の表わすリンクが ambient isotopic になる為の条件も知られている。

<u>1.2. 定義</u> (Markov 類) 次の (1), (2) 及び (3) で生成される B の同値関係 $\sim$ による同値類のことを B の <u>Markov 類</u> と呼ぶ。

(1) $n \in \mathbb{N}$, $b_1, b_2 \in B_n$ に対し、$(b_1 b_2, n) \sim (b_2 b_1, n)$,

(2) $n \in \mathbb{N}$, $b \in B_n$ に対し、$(b, n) \sim (b\sigma_n, n+1)$,

(3) $n \in \mathbb{N}$, $b \in B_n$ に対し、$(b, n) \sim (b\sigma_n^{-1}, n+1)$,

但し、$\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_{n-1}$ を B_n の標準的な生成元とし、B_n の $\sigma_1, \cdots, \sigma_{n-1}$ を B_{n+1} の $\sigma_1, \cdots, \sigma_{n-1}$ に写す写像により、B_n を B_{n+1} の $\sigma_1, \cdots, \sigma_{n-1}$ で生成される部分群と同一視する。

<u>1.3 定理</u> (Markov [B]) 2つのブレイド (b_1, n_1) と (b_2, n_2) について次の (1) と (2) は同値である。

(1) $(b_1, n_1)^\wedge$ と $(b_2, n_2)^\wedge$ の表わす $\mathbb{R}^3$ のリンクが ambient isotopic である。

(2) (b_1, n_1) と (b_2, n_2) は B の同じ Markov 類に属す。 □

1.4. 定義　Bから複素数体$\mathbb{C}$への写像で，Markov類上では一定となるものをリンクの不変量と呼ぶ。

2. Yang-Baxter方程式の三角的な解

以下自然数nとdとを固定する。Vを$\mathbb{C}$上のd次元線型空間とし，$V^{\otimes n} = V\otimes V\otimes\cdots\otimes V$（$n$個）と書く。$R$を$\mathrm{End}(V\otimes V)$の1つの元とする。このとき，$1\leq i\leq n-1$に対し，$R_{n,i}\in\mathrm{End}(V^{\otimes n})$を，

$$(2.1)\qquad R_{n,i} = \underbrace{id_V\otimes\cdots\otimes id_V}_{i-1\text{個}}\otimes R\otimes\underbrace{id_V\otimes\cdots\otimes id_V}_{n-i-1\text{個}}$$

で定義する。すなわち$R_{n,i}(v_1\otimes\cdots\otimes v_n) = v_1\otimes\cdots\otimes v_{i-1}\otimes R(v_i\otimes v_{i+1})\otimes v_{i+2}\otimes\cdots\otimes v_n$である。スペクトルパラメーターと呼ばれる複素数$x$でパラメトライズされた$\mathrm{End}(V\otimes V)$の元$R(x)$が次の方程式を満たし，さらに各成分が$x$の多項式になっているとき、$R(x)$はYang-Baxter方程式の三角的な解である。

$$(\mathrm{YB})\qquad R_{3,1}(x)R_{3,2}(xy)R_{3,1}(y) = R_{3,2}(y)R_{3,1}(xy)R_{3,2}(x)$$

(YB)の三角的な解は[J1]で系統的に構成されている。

2.2. (YB)の三角的な解$R(x)$に対し，$x=0, 1$，又は∞と特殊化することにより次の関係式が得られる。

$$R_{3,1}(x)\,R_{3,2}(x)\,R_{3,1}(x) = R_{3,2}(x)\,R_{3,1}(x)\,R_{3,2}(x)$$

よって B_n の生成元 σ_i に対し $R_{n,i}(x)$ を対応させることにより，B_n の $\mathrm{End}(V^{\otimes n})$ への表現が得られる。(但し $R(x)$ は可逆と仮定する。) [Ji] で得られている解のいくつかを $x=0$ に特殊化し，適当に q に関して変数変換して符号を調整したもの R は次のようになる。但し q は 0 でない複素数とする。

<u>記号</u>　V の基底を $u_1, u_2, \cdots, u_d$ とし，E_{ij} を $\mathrm{End}(V)$ の基底 $u_1, u_2, \cdots, u_d$ に関する行列単位とする。すなわち $E_{ij}\,u_k = \delta_{jk}\,u_i$ ($\delta_{jk}=1$ if $j=k$, 0 if $j\neq k$) である。

<u>2.3</u>　$A_r^{(1)}$ 型に対応する場合．　$d=\dim V=r+1$,

$$R=-q\sum_i E_{i,i}\otimes E_{i,i} + \sum_{i\neq j} E_{i,j}\otimes E_{j,i} + (q^{-1}-q)\sum_{i<j} E_{i,i}\otimes E_{j,j},$$

但し $i,j=1,2,\cdots,d$ とする。

<u>2.4</u>　$B_r^{(1)}, C_r^{(1)}, D_r^{(1)}, A_r^{(2)}$ 型に対応する場合

それぞれの型に応じて $(d,x)=(2n+1,-1)$, $(2n,1)$, $(2n,-1)$, $(n+1,-1)$ とおく。

$i=1,2,\cdots,d$ に対し $i'=d+1-i$ とし，

$$\bar{i} = \begin{cases} i - x/2 & \text{if } 1 \leq i < (d+1)/2 \\ i & \text{if } i = (d+1)/2 \\ i + x/2 & \text{if } (d+1)/2 < i \leq d \end{cases}$$ とし、

$$\varepsilon(i) = \begin{cases} 1 & \text{if } 1 \leq i \leq (d+1)/2 \\ -x & \text{if } (d+1)/2 < i \leq d \end{cases}$$ とする。

すると

$$R = q \sum_{\substack{i \\ i \neq i'}} E_{i,i} \otimes E_{i,i} + \sum_{\substack{i \\ i = i'}} E_{i,i} \otimes E_{i,i} + \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j, j'}} E_{i,j} \otimes E_{j,i}$$

$$+ q^{-1} \sum_{\substack{i \\ i \neq i'}} E_{i,i'} \otimes E_{i',i} + (q - q^{-1}) \sum_{i<j} E_{i,i} \otimes E_{j,j}$$

$$+ (q^{-1} - q) \sum_{i<j} \varepsilon(i)\varepsilon(j)\, q^{\bar{i} - \bar{j}} E_{i,j'} \otimes E_{i',j}$$

となる。2.3と2.4で述べたRはすべて可逆であり これを用いてブレイド群の表現が定まる。

<u>2.5</u>　2.3と2.4の $R \in \mathrm{End}(V \otimes V)$ に対し、M_nを単位元と $R_{n,i}$, $R_{n,i}^{-1}$ $(i = 1, 2, \cdots, n-1)$ で生成される $\mathrm{End}(V^{\otimes n})$ の部分algebraとする。$A_1^{(1)}$型の解に対応する場合には M_n は、Jonesの II_1型factorからそのsub-factorへの射影から作られたalgebraと同型になる。$A_r^{(1)}$型に対応する M_n は、A_n型のIwahori's Hecke algebraの商algebraと同型になる。そして $B_r^{(1)}$, $C_r^{(1)}$, $D_r^{(1)}$ 型に

対応する場合には，M_n は Brauer の centralizer algebra [W] の q-analogue にあたるものになる。

3. Markov トレースとリンクの不変量　$R \in \mathrm{End}(V \otimes V)$ を，$R_{3,1} R_{3,2} R_{3,1} = R_{3,2} R_{3,1} R_{3,2}$ を満たす可逆元とする。R に関し Markov トレースと呼ばれる良い性質を持つ $\mathrm{End}(V^{\otimes n})$ から $\mathbb{C}$ への線型関数が存在するとき，これを用いて，リンクの不変量が構成できる。

3.1　$u_1, u_2, \cdots, u_d$ を V の基底とする。まず，$\iota_n : \mathrm{End}(V^{\otimes n}) \to \mathrm{End}(V^{\otimes(n+1)})$ を，$A \in \mathrm{End}(V^{\otimes n})$ に対し $A \otimes id_V \in \mathrm{End}(V^{\otimes(n+1)})$ を対応させる準同型とする。また，Sp_n : $\mathrm{End}(V^{\otimes(n+1)}) \longrightarrow \mathrm{End}(V^{\otimes n})$ を次で定める。

$$\mathrm{End}(V^{\otimes(n+1)}) \ni A = \sum_{\substack{i_1 \cdots i_{n+1} \\ j_1 \cdots j_{n+1}}} a_{\substack{i_1 \cdots i_{n+1} \\ j_1 \cdots j_{n+1}}} E_{i_1 j_1} \otimes \cdots \otimes E_{i_{n+1} j_{n+1}}$$

に対し

$$Sp_n(A) = \sum_{\substack{i_1 \cdots i_n \\ j_1 \cdots j_n}} \left(\sum_k a_{\substack{i_1 \cdots i_n k \\ j_1 \cdots j_n k}} \right) E_{i_1 j_1} \otimes \cdots \otimes E_{i_n j_n} \quad \square$$

行列のトレースが基底のとり方によらないのと同様，Sp_n も V の基底のとり方にはよらない写像である。また，$Sp_n \circ \iota_n = d \cdot id_{V^{\otimes n}}$ となる。

3.2 定義(Markov トレース) 線型関数 $T_n : \mathrm{End}(V^{\otimes n}) \to \mathbb{C}$ $(n=1,2,\cdots)$ が次の条件を満たすとき、Markov トレースと呼ぶ。M_n を、R に関して 2.5 で定義された $\mathrm{End}(V^{\otimes n})$ の部分 algebra とする。

(1) $\forall a, b \in M_n$ に対し、$T_n(ab) = T_n(ba)$

(2) $\exists \tau_+ \in \mathbb{C}^\times$, $\forall a \in M_n$, $T_n(a) = \tau_+ T_{n+1}(\iota_n(a) R)$

(3) $\exists \tau_- \in \mathbb{C}^\times$, $\forall a \in M_n$, $T_n(a) = \tau_- T_{n+1}(\iota_n(a) R^{-1})$

但し、τ_+, τ_- は n にもよらない。

3.3 2.3 と 2.4 での R に対しては、Markov トレース T_n が存在する。まず、$i=1,2,\cdots,d$ に対し、

$$\mu_i = q^{2i-d-1} \ (A_r^{(1)} \text{型}),\quad q^{2\bar{i}-d-1} \ (\text{その他の型})$$

とし、$\mu \in \mathrm{End}(V)$ を $\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_d \end{pmatrix}$ (対角行列) とおく。そして $a \in \mathrm{End}(V)$ に対し $T_n(a) = \mathrm{trace}(\mu^{\otimes n} a)$ とおくと、T_n は Markov トレースとなる。そして

$$Sp_2(\mu^{\otimes 2} R) = \tau_+ \mu,\quad Sp_2(\mu^{\otimes 2} R^{-1}) = \tau_- \mu$$

となる。$\tau_+ = \tau_-^{-1} = -q^d$ $(A_r^{(1)}$ 型$)$, q^{d+x} (その他) である。

3.4 ブレイド (b, n) に対し $w(b)$ を b の交点の符号の和とする。但し、符号は ╳ を +1、╳ を −1 とする。また、$\alpha = (\tau_+/\tau_-)^{1/2}$, $\beta = \tau_+/\alpha$ とおく。このとき、Markov

トレースを用いて

$$f(b,n) = \alpha^{-w(b)} \beta^{-n} T_n(b)$$

とする。

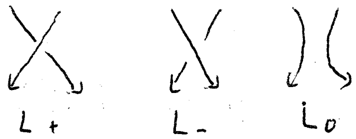
<u>定理</u> ([T] 3.2.1) fはリンクの不変量である。

<u>3.5</u> 2.3と2.4でのRから上のようにして定義されるリンクの不変量fは，二変数Jones多項式又はKauffman多項式を特殊化したものである。

<u>定義</u> $l, m \in \mathbb{C}^\times$とする。二変数Jones多項式$P$は、次の関係式で再帰的に定義される、リンクの不変量である。

$$l P(L_+) - l^{-1} P(L_-) = m P(L_0),$$

$$P(\bigcirc) = 1.$$



Kauffman多項式Fを定義する為にまずD-多項式を定義する。$a, x \in \mathbb{C}^\times$とする。D-多項式とは，次の関係式で定義される向きのついていないリンクのdiagramのregular isotopyの不変量である。

$$D(\diagup\!\!\!\diagdown) - D(\diagdown\!\!\!\diagup) = x\left(D()\,() - D(\asymp)\right),$$

$$D(\ell) = a D(\frown), \quad D(\ell) = a^{-1} D(\frown).$$

リンクの diagram K に対し、$|K|$ を K から向きを忘れたものとする。K の交点の符号の和を $w(K)$ とおく。このとき

$$F(K) = a^{-w(K)} D(|K|)$$

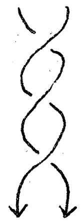
とおくと、F はリンクの不変量となる。これを Kauffman 多項式と呼ぶ。

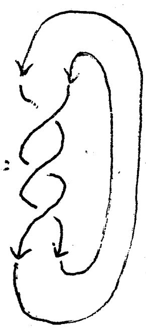
3.6 定理 ([T] 4.2.1, 4.3.4) $A_r^{(1)}$ 型に対応する不変量 f は、二変数 Jones 多項式 P で、$a = q^{d}$, $m = q - q^{-1}$ とおき、$(q^{d} - q^{-d})/(q - q^{-1})$ をかけたものに等しい。また、他の型に対応する不変量 f は、Kauffman 多項式 F で、$a = q^{d+x}$, $x = q - q^{-1}$ とおいたものに、$(-1)^{c(K)+1}(-x + (q^{d+x} - q^{-d-x}))/(q - q^{-1})$ をかけたものに等しい。但し $c(K)$ は K の連結成分の個数を表わす。

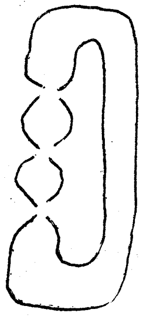
4. state models

(YB)-方程式の解から §3 のようにして作られたリンクの不変量に対し、state model と呼ばれる方法を用いて、不変量をリンクの diagram から直接計算することができる。ここでは、簡単のため、closed braid に対してどのようにするかを説明する。2.3 又は 2.4 の R からできる不変量 f を一つ固定する。記号は §2、§3 のものを使う。b を B_n の元とする。$\hat{b}$ の string の連結

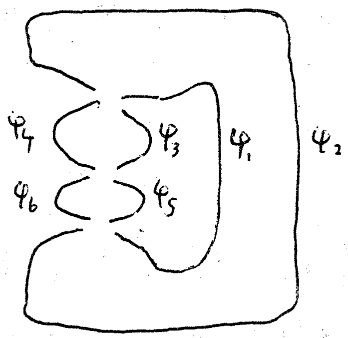
部分集合で，交点を端点とし交点を中に含まないものをedgeと呼ぶ。$\hat{b}$のedge全体の集合をEと書く。Eから$\{1,2,\cdots,d\}$への写像φをstateと呼ぶ。$\hat{b}$のstate全体を

$b=$ 

$\hat{b}=$ 

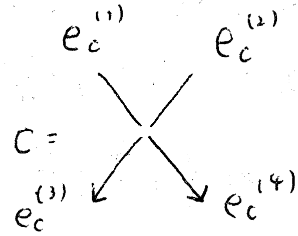


$\hat{b}$のedges



$\hat{b}$のstate

$1\leqq\varphi_i\leqq d$
$(i=1,2,\cdots,6)$

$c=$ 

$\mathcal{S}$と書く。$\hat{b}$の交点全体の集合を$\mathcal{C}$と書く。$\hat{b}$の交点cに対し，その符号を$\varepsilon(c)$で表わす。またcのまわりの4個のedge $e_c^{(1)}, e_c^{(2)}, e_c^{(3)}, e_c^{(4)}$を上図のように定める。1つのstate $\varphi\in\mathcal{S}$の重み$W(\varphi)$を次で定める。

$$W(\varphi)=\prod_{c\in\mathcal{C}} R^{(\varepsilon(c))}_{\substack{\varphi(e_c^{(1)}),\varphi(e_c^{(2)})\\ \varphi(e_c^{(3)}),\varphi(e_c^{(4)})}} \prod_{i=1}^{n}\mu_{\varphi(s_i)}$$

但し$s_1,\cdots,s_n$は$\hat{b}$のedgeでbの上端のそれぞれ1番目からn番目までの点を通るものとし，$R^{(\pm1)}_{\substack{ij\\kl}}$は$R^{\pm1}$の成分を表わす。すなわち$R^{\pm1}(u_i\otimes u_j)=\sum_{k,l}(R^{(\pm1)}_{\substack{ij\\kl}}\ u_k\otimes u_l)$である。

上記の例では

$$W(\varphi) = R^{\varphi_2 \varphi_1}_{\varphi_4 \varphi_3} R^{\varphi_4 \varphi_3}_{\varphi_6 \varphi_5} R^{\varphi_6 \varphi_5}_{\varphi_2 \varphi_1} \mu_{\varphi_2} \mu_{\varphi_1}$$

となる。このとき、次が成り立つ。

定理. ([T].5.2)

$$f(b, n) = \sum_{\varphi \in S} W(\varphi)$$

5. リンクの不変量のパラレルバージョン

リンクをパラレル化することにより、二変数Jones多項式やKauffman多項式から、別のリンクの不変量が[M]で構成されている。これらの不変量に対しても、§3, §4で述べたことが成り立つ。このことについては、同じく数理解析研究所で1987年9月に行われたシンポジウム"数理物理の諸問題"に詳しく書かれているので、そちらを見て下さい。なお、一変数Jones多項式、すなわち $A_1^{(1)}$ 型に対応するリンクの不変量の場合には、[W-A.1,2]により詳しく調べられている。

[文献]

[B] Birman, J.S.: Braids, Links, and Mapping Class Groups. Annals of Math. Studies 82. Princeton, 1974.

[F-Y-H-L-M-O] Freyd, P.; Yetter, D., Hoste, J., Lickorish, W. B. R., Millet, K., and Ocneanu, A.: A polynomial invariant of knots and links, Bull. Amer. Math. Soc. 12 (1985), 239-246.

[Ji] Jimbo, M.: Quantum R-Matrix for the generalized Toda system, preprint, March 1985.

[Jo] Jones, V. F. R.: Kauffman への手紙

[K] Kauffman, L. H.: State models and the Jones Polynomial, preprint.

[M] Murakami, J.: The parallel versions of link polynomials invariants, preprint.

[W-A. 1]
Akutsu, Y., Wadati, M.: Knots invariants and the Critical statistical systems, Journal of the Phys. Soc. of Japan, 56 (1987), 839-842.

[W-A. 2] Akutsu, Y., Deguchi, T., Wadati, M.: Exactly solvable Models and new link polynomials II. Link polynomials for closed 3-braids, preprint.