

DS-diagram と Heegaard diagram

東洋大 工 山下 正勝 (Masakatsu Yamashita)

§ 1. 序.

3次元閉多様体を表示する一般的な方法の1つとしてよく知られているものに Heegaard diagram がある. ところで3次元多様体を表示するもうひとつの一般的な方法がある. それは『3-ballの表面を適当に貼りあわせれば3次元多様体を得られる』という考え方に基づいたもので, 3-ballの表面 (= 2次元球面) での同一視を球面グラフ上の図式として表わすやり方である. Seifert-Threlfall の教科書以来, polyhedral representation と呼ばれてよく知られている. 我々はこの図式のことを“polygram”と呼ぶことにした ([9] 参照).

ところでこの polygram なるものの正体ははなはだ複雑で, かのザイフェルト-トレルファル両先生は例の教科書 ([8] p. 221) で

..... Ein anderer Versuch der Aufzählung aller dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten würde darin bestehen, daß man alle Polyeder mit paarweiser Seitenzuordnung konstruiert. Auch dieses ist ein zweidimensionales Problem, das so wenig wie die Aufzählung der Heegaard-Diagramme gelöst ist.”

(= “..... Another way to attempt the enumeration of all 3-dimensional manifolds would be to construct all polyhedra having pairwise association of faces. This also is a 2-dimensional problem and it has met with as little success at solution as the problem of enumerating the Heegaard diagrams.” — Translated by M. A. Goldman)

と述べている。この文を読むかぎり、この構成法による多様体の研究には両先生は望みを持っていなかったように思われる。

池田裕司氏と石井一平氏はそれぞれの研究を通じて、好適な polygram である DS-diagram なる概念を獲得した。([2], [3], [4], [5], [6]などを参照のこと。) 石井氏はポアンカレの流れを汲む力学系(flow)の研究が本業であり、池田氏は J. H. C. Whitehead — E. C. Zeeman の流れを汲むスパインの研究が本業である。分野の違う2人が互いに独立に同じ概念にたどりついたことに驚いている。しかしこの事実は、それだけこの DS-diagram が自然な概念であるということを物語っているとも言えよう。

このことを裏づけるもう一つの事柄が分かった。すなわち、『Heegaard diagram と DS-diagram との間を自然な形で関係づけることができる』。この事実を報告するのが本稿の目的である。

DS-diagramの定義を簡単に述べておく。(詳しくは[2], [3], [4].)

A, B を oriented cell complex, $f: A \rightarrow B$ を B の上への orientation preserving, non-degenerate, cellular map とする。そのとき (A, f, B) を $|K|$ 上の diagram という。

※ non-degenerate とは $\dim f(\sigma) = \dim \sigma$ for each $\sigma \in A$ ということ。

(A, f, B) を勝手な diagram とする。 $\sigma \in A$ に対して $f(\sigma) \in B$ を σ の label と呼び、 $[\sigma]$ と書く。

label $\lambda \in B$ に対して、 $\{\sigma \in A : f(\sigma) = \lambda\}$ の元の数を $\lambda = [\sigma]$ の degree と呼び、 $\# \lambda$ (または $\# [\sigma]$) と書く。

2次元球面 S^2 上の connected 3-regular graph $G = (V : E)$ について考える。但し、 V は G の vertices の集合であり、 E は G の edges の集合である。 $S^2 - |G|$ の connected component の closure を元とする集合を F とする。そのとき S^2 は V, E, F の各元をそれぞれ 0-, 1-, 2-cell とする cell

structureを自然に持つ. 各 cell には orientation を入れておく. このように考えたときの oriented cell complex $K = V \cup E \cup F$ を DS-complex と呼ぶことにしよう.

DS-complex $K = V \cup E \cup F$ に対して $|K| = S^2$ 上の diagram (K, g, P) が

$$(1) \quad \# [\tau] = 2 \quad \text{for each 2-cell } \tau \in F$$

$$(2) \quad \# [\sigma] = 3 \quad \text{for each 1-cell } \sigma \in E$$

$$(3) \quad \# [\rho] = 4 \quad \text{for each 0-cell } \rho \in V$$

を満たすならば, (K, g, P) を DS-diagram (= diagram of a Developed Shape for 3-manifold) とよぶ.

[註1] P は必然的に closed fake surface になる [2].

[註2] 上の定義はもっとシャープにできる. たとえば (2) の条件は不要である [2].

[註3] "Developed Shape" (= 展開された形状 or 模型) は石井氏の発案された用語だそうである.

§ 2. Heegaard diagram の構造

連結な 3 次元閉多様体 M は 2 つの cube with handles U と V の和: $M = U \cup V$, $U \cap V = \partial U \cap \partial V$, として表わすことができる. (M は orientable でも non-orientable でもよい.) このとき, ∂U と ∂V のオイラー標数は必然的に等しくなる.

そこで, $\chi(\partial U) = \chi(\partial V) = 2 - 2n$ のとき, (U, V) を M の genus n の Heegaard splitting という.

(U, V) を M の genus n の Heegaard splitting とする. cube with handles 内から互いに disjoint な n 個の proper 2-disks を適当に選んで, それらの 2-disks に沿って切つてやると, この cube with handles は 3-ball になる. U, V に対するそのような 2-disks の系をそれぞれ

$$\{A_1, A_2, \dots, A_n \mid \text{各 } A_i \text{ は } U \text{ の proper disk, } A_i \cap A_j = \emptyset\}$$

$$\{B_1, B_2, \dots, B_n \mid \text{各 } B_i \text{ は } V \text{ の proper disk, } B_i \cap B_j = \emptyset\}$$

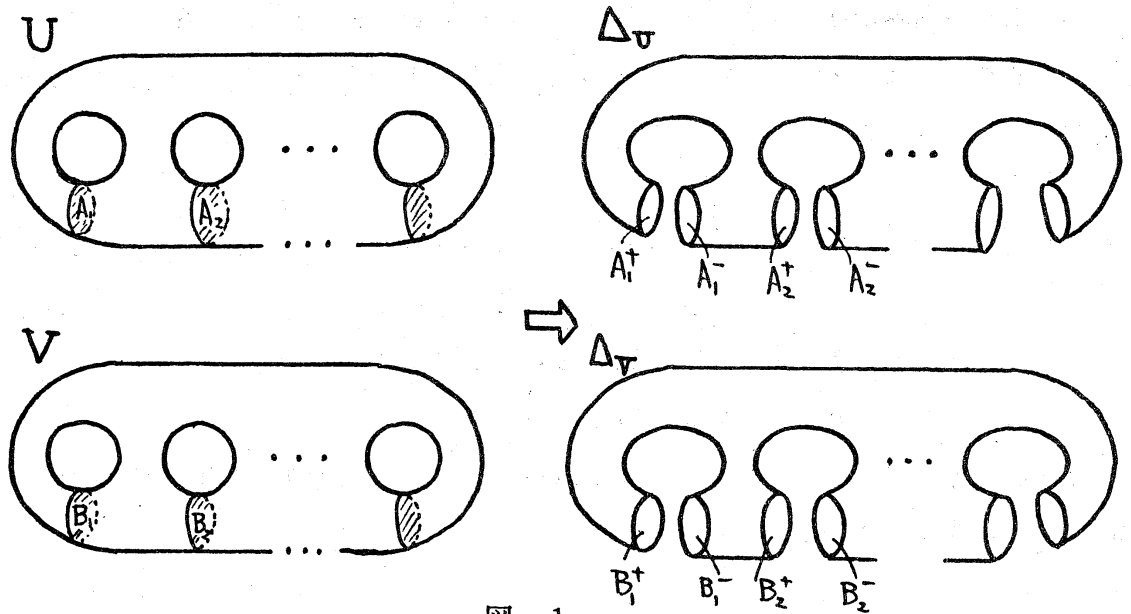


図 1

とする. この 2-disks に沿って U , V を切つて得られる 3-ball をそれぞれ Δ_U , Δ_V とする.

$\partial U = \partial V$ だから各 ∂B_i は ∂U 上の loop であり, これらの loops $\partial B_1, \partial B_2, \dots, \partial B_n$ で $\partial U = \partial V$ を切り離せば 2-sphere から $2n$ 個の穴をあけたものが得られる. Hempel [1] の定義にしたがえば, このときの $(U; \partial B_1, \partial B_2, \dots, \partial B_n)$, あるいは同じことだが $(V; \partial A_1, \partial A_2, \dots, \partial A_n)$ のことを Heegaard splitting (U, V) に associate された Heegaard diagram ということになっている.

ところで $\partial U = \partial V$ であるから一般に $A_i \cap B_j = \partial A_i \cap \partial B_j \neq \emptyset$ であるが, $A_i \cap B_j$ の各連結成分は point だけであるとしてよい. すなわち,

$(U A_i) \cap (U B_j) = (U \partial A_i) \cap (U \partial B_j) = \{x_1, x_2, \dots, x_p \mid \text{各 } x_i \text{ は point}\}$ とする.

さて, Heegaard splitting (U, V) が与えられたとき, U と V をその境界 ∂U と ∂V で貼り合わせれば多様体 M ができるが, その貼り合わせを定める identification map を $\eta: \partial U \rightarrow \partial V$ とする. 勿論 η は同相写像である. この η を具体的に指定するものが Heegaard diagram である. ところでこの M は 2 つの 3-ball Δ_U と Δ_V をその境界で貼り合わせてできる, ともいえる.

その貼り合わせを定める $\Sigma_u + \Sigma_v$ (ただし, $\Sigma_u \equiv \partial \Delta_u$, $\Sigma_v \equiv \partial \Delta_v$) 上の identification map ζ は,

- (i) 2-sphere Σ_u 内の 2-disks A_i^+ と A_i^- を同一視して A_i とする同相写像;
 - (ii) 2-sphere Σ_v 内の 2-disks B_j^+ と B_j^- を同一視して B_j とする同相写像;
 - (iii) $\Sigma_u - U(\text{Int} A_i^+ \cup \text{Int} A_i^-)$ から $\Sigma_v - U(\text{Int} B_j^+ \cup \text{Int} B_j^-)$ への同相写像;
- の 3 つの部分で構成され, とくに (iii) での map は η から自然に誘導される.

$$G_u \equiv (U \partial A_i^+) \cup (U \partial A_i^-) \cup (U \eta^{-1}(\partial B_j)) \subset \Sigma_u, \text{ および}$$

$$G_v \equiv (U \partial B_j^+) \cup (U \partial B_j^-) \cup (U \eta(\partial A_i)) \subset \Sigma_v$$

はそれぞれ Σ_u および Σ_v 上の graph を構成している. これらの graphs は, 一般に connected とは限らないが, 議論を簡単にするためしばらくの間,

" G_u も G_v も connected "

としておく. そのとき $\Sigma_u - |G_u|$, $\Sigma_v - |G_v|$ の各連結成分はいずれも open 2-cell になっている.

$\Sigma_u \cup \Sigma_v$ 上に現われるこれらの頂点, 辺, 面に対して, identification map ζ で同一視されるべき頂点, 辺, 面に同じ label をつけることにすると次のことが成立する.

命題 (1) G_u , G_v はそれぞれ 2-sphere Σ_u , Σ_v 上の 3-regular graph である.

(2) disjoint union $\Sigma_u + \Sigma_v$ 上に現われる同じ label の個数は

- (i) 4 頂点ずつ同じ label,
- (ii) 3 辺 ずつ同じ label,
- (iii) 2 面 ずつ同じ label,

である.

証明. $\Sigma_u + \Sigma_v$ 上に現われる頂点はすべて U , V の meridian にかかわって発生したもの, すなわち, $\partial A_i \cap \partial B_j \subset \partial U = \partial V$ から出現したものばかりである. それらの頂点の名前 x_1, x_2, \dots, x_p がそのまま label として残っているはずである. そのなかの 1 つを x としよう. x は ∂U , ∂V のそれぞれ 1 つの meridian に 1 点ずつのっている. それらの meridian を $\partial A (\subset \partial U)$, $\partial B (\subset \partial V)$ とする. ∂A , ∂B はいくつかの頂点で線分 $a_1, a_2, \dots \subset \partial U$; $b_1, b_2, \dots \subset \partial V$ に細分されている. ところで, a_1, a_2, \dots ; b_1, b_2, \dots が貼り合わされる相手が同じ

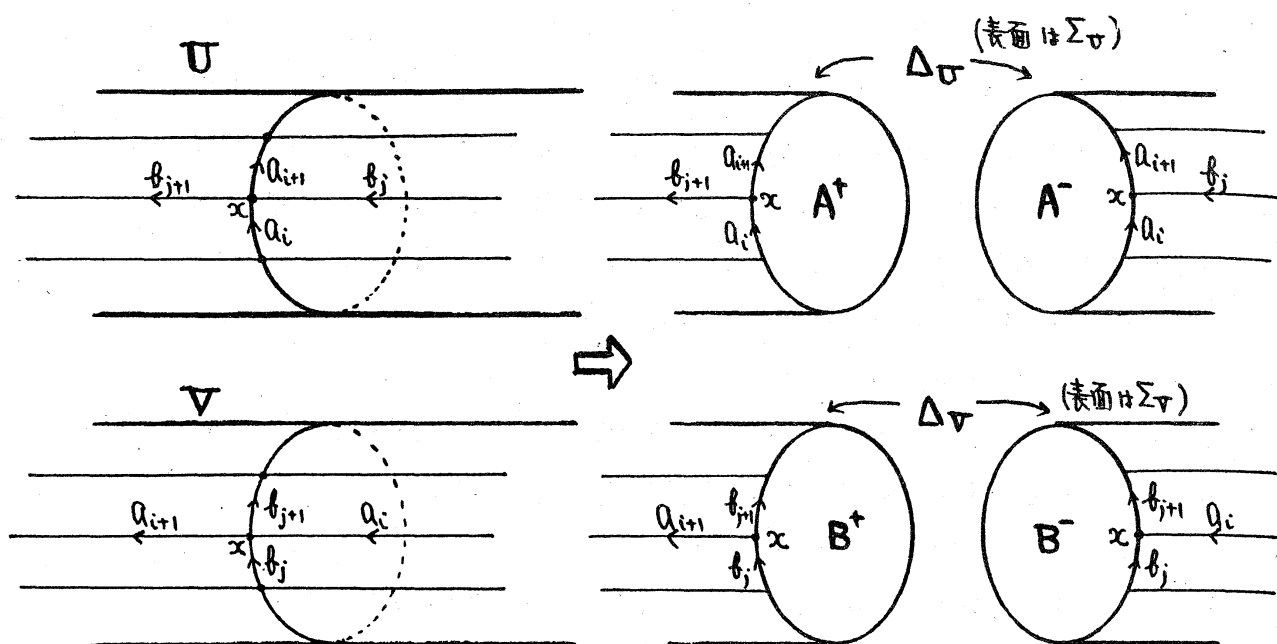


図 2

label で指定されている. すなわち ∂V 内にもう 1 つの a_1, a_2, \dots が, また ∂U 内にもう 1 つの b_1, b_2, \dots がある. U, V を meridian disks $\partial A_1, \partial B_1$ で切れば ∂A_1 は ∂A_1^+ と ∂A_1^- に, ∂B_1 は ∂B_1^+ と ∂B_1^- に分かれる. そのとき x は 4 つの場所に分かれ, それぞれの x のところで graph は 3-regular になっている. また辺 a_i, b_j は 3 つに分かれる. これで (1) と (2) の (i), (ii) がいえた. (iii) は明らかである.

§ 3. Heegaard diagram から polygram へ

前節で見たように一般の Heegaard diagram (U, V) の U, V をそれらの meridian disks で切ると 2 つの 3-ball Δ_U, Δ_V が得られる. そしてその表面である 2 次元球面 Σ_U, Σ_V 上に 3-regular graphs G_U, G_V が現われ, $(\Sigma_U, G_U) + (\Sigma_V, G_V)$ が $\Sigma_U + \Sigma_V$ 上の identification map との指定を与えてくれる.

$\Sigma_U - G_U$ 内の open 2-cell で $\Sigma_V - G_V$ 内の open 2-cell と同一視されるものを

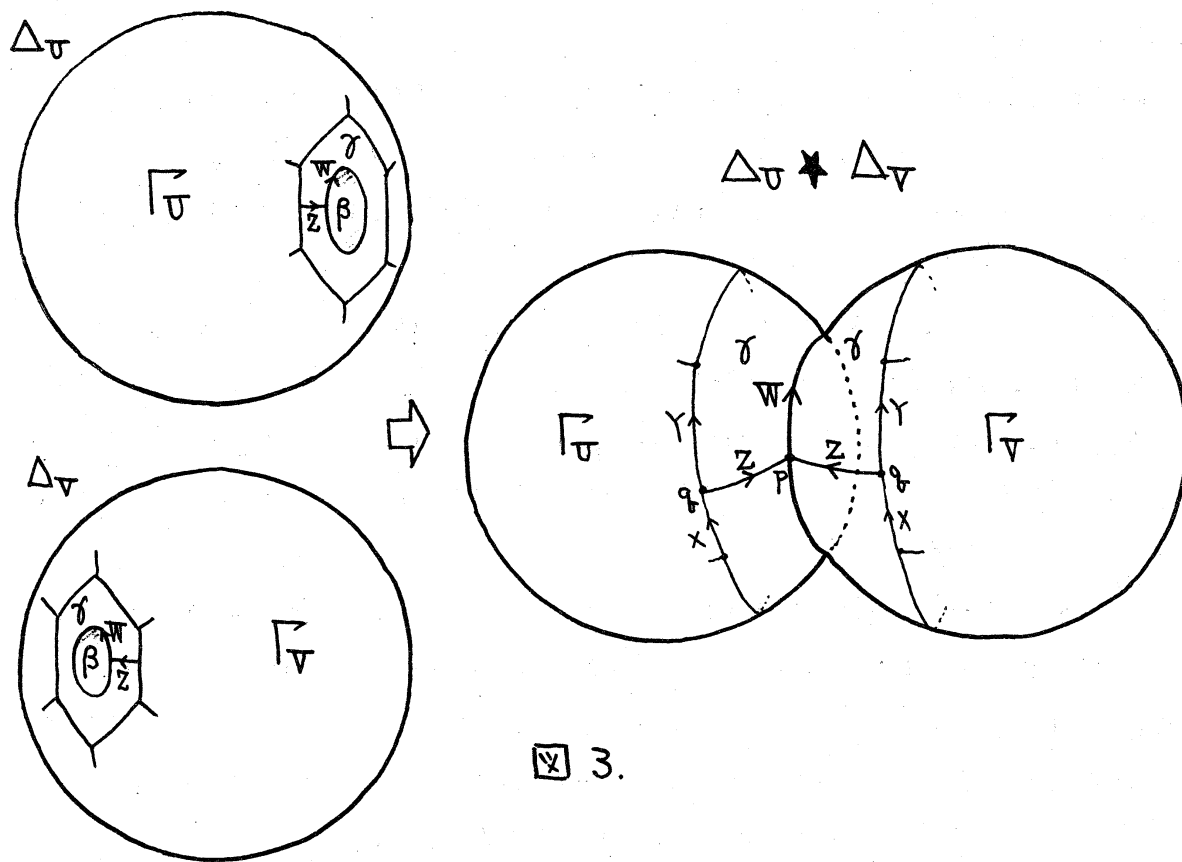


图 3.

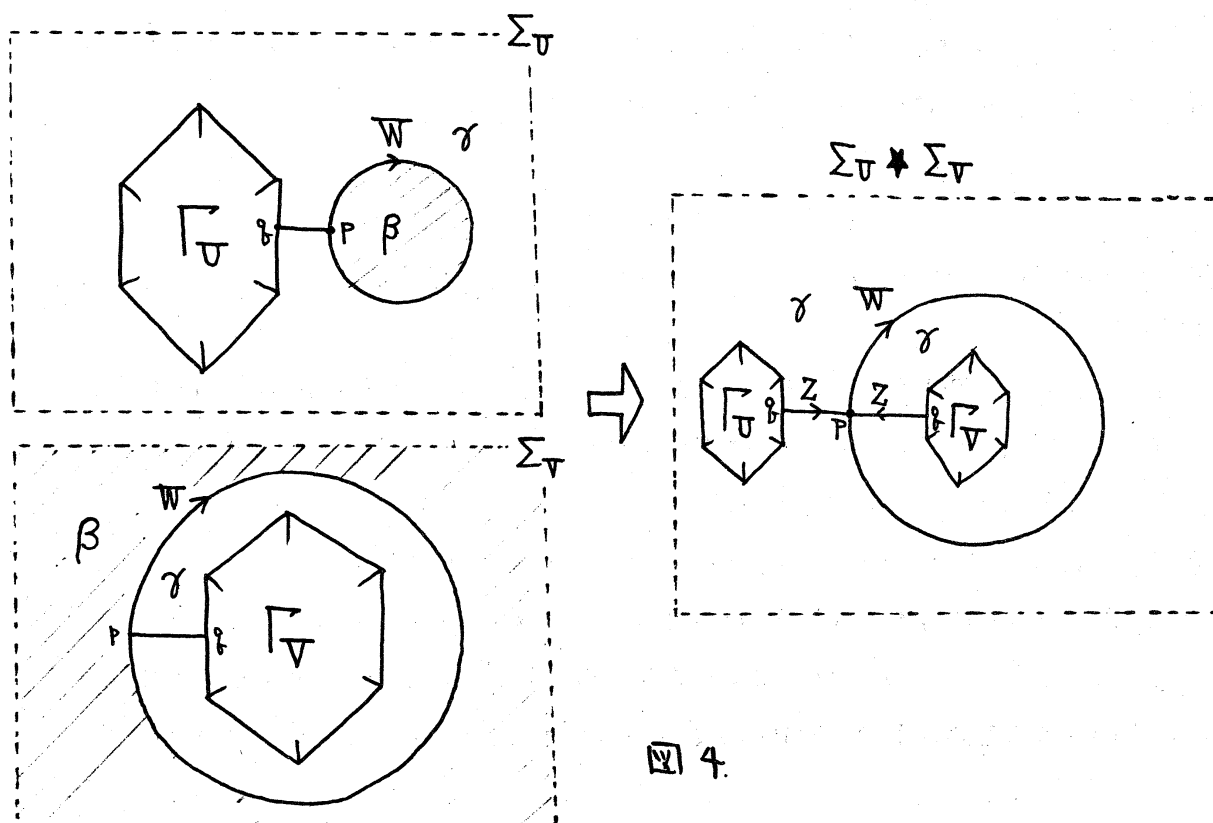


图 4.

適当に選んでこよう。例えばそれを $\alpha_u \subset \Sigma_u$ とし、その相手を $\alpha_v \subset \Sigma_v$ とする。 α_u , α_v の label を α とする。

α_u の境界上にある 1-cell C_u を選ぶ。その内点 p_u を選んで C_u を $X_u \cup Y_u$ に細分する。 $p_u \in X_u \cap Y_u$ である。 p_u , X_u , Y_u の label をそれぞれ p , X , Y とする。 p , X , Y を label に持つ cell は $\Sigma_u + \Sigma_v$ 内に 3 個ずつ発生し、その代わり、 C_u と同じ label を持つものが計 3 個消滅する。

α_u 内に 2-cell β_u を選び、 β_u と同一視される α_v 内の 2-cell を β_v とする。 β_u の境界上に 1 点 q_u を選び、 β_u の境界を q_u から q_u への 1-cell- W_u と考える。 β_u , q_u , W_u と同じ label β , q , W を持った cell β_v , q_v , W_v が α_v 内に定まる。

$\gamma_u = \alpha_u - \text{cl}(\beta_u)$, $\gamma_v = \alpha_v - \text{cl}(\beta_v)$ とする。このようにして α_u , α_v は β_u , β_v と γ_u , γ_v にとって替わられる。

Δ_u と Δ_v を β_u と β_v の部分で貼り合わせたものを $\Delta_u \star \Delta_v$, その表面を $\Sigma_u \star \Sigma_v$ と表わそう。そのとき、自然に polygram $(\Sigma_u \star \Sigma_v, G_u \star G_v)$ が得られる。 $(\Sigma_u \star \Sigma_v, G_u \star G_v)$ は殆どの場所で DS-structure を持っている。すなわち、貼り合わせを行なったところの周辺でのみ DS-structure が崩れている。label で示せば、

1ヶ所の p , 2ヶ所の q ; 1ヶ所の W , 2ヶ所の Z

だけである。他の部分に影響を与えないようにしながらこれらの部分だけを修正することにより、この polygram $(\Sigma_u \star \Sigma_v, G_u \star G_v)$ を DS-diagram に直すことができる。そのための鍵となるテクニックを次の節で述べる。

§4. Key Theorem

[4] において、勝手な polygram を他の polygram へ変える 3 種の初等変形:

- (1) C-変形 (Collapsing and Cleaving),
- (2) CG-変形 (Cut and Grue),
- (3) S-変形 (Subdivision and its inverse operation)

を導入した。これらの各初等変形を施して得られた polygram によって定められる 3 次元複体は、もとの polygram によって定められる 3 次元複体と位相同型である。

これらの 3 種の初等変形の有限列のことを metamorphosis という。polygram

Π_1 から metamorphosis によって polygram Π_2 が得られるならば, polygram Π_2 はこの逆の metamorphosis によって polygram Π_1 になる. すなわち, metamorphosis は polygramsの間の同値関係である. metamorphosis による polygramsの同値類を metamorph class といい, 同じ metamorph class に属する polygramsは互いに metamorphic であるという.

この節で紹介する次の定理はこの稿での主張を支える鍵となるものである.

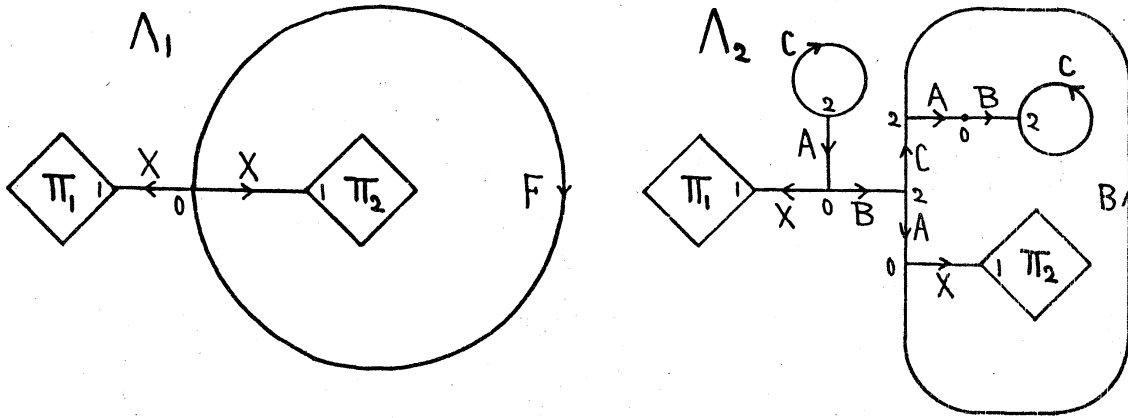


図 5

上の図5の左の Λ_1 は $F, X; 0, 1$ および残りの部分 Π_1, Π_2 からなる polygram で,

F, X は 1-cell の label で $\#F=1, \#X=2$;

$0, 1$ は 0 cell の label で $\#0=1, \#1 \geq 2$;である.

上の図5の右の Λ_2 は $A, B, C, X; 0, 1, 2$ および残りの部分 Π_1, Π_2 からなる polygram で,

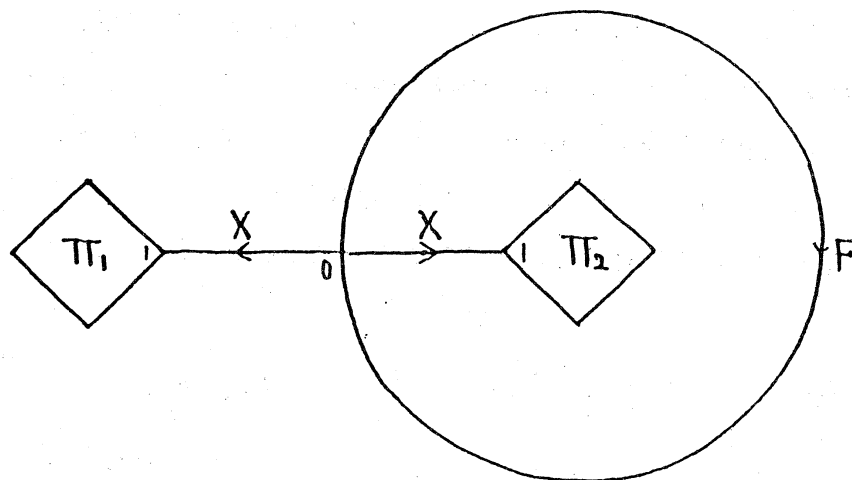
A, B, C, X は 1-cell の label で $\#A=\#B=\#C=3, \#X=2$;

$0, 1, 2$ は 0 cell の label で $\#0=1, \#1 \geq 3, \#2=4$;である.

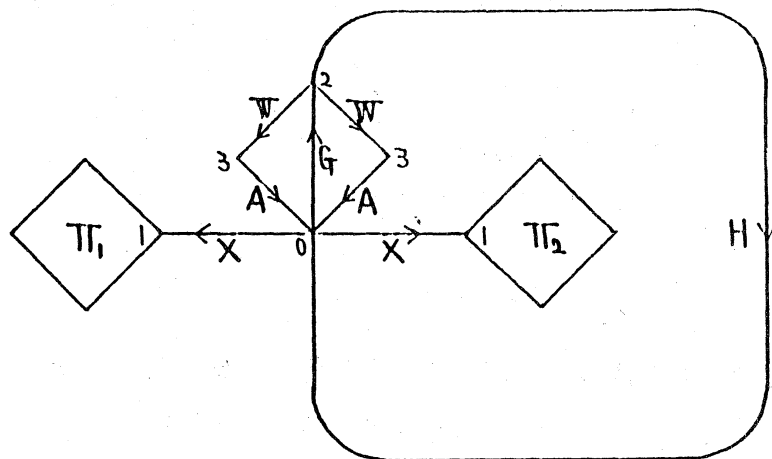
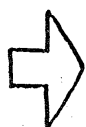
このとき次の定理が成り立つ.

定理1. Λ_1 と Λ_2 は互いに metamorphic である.

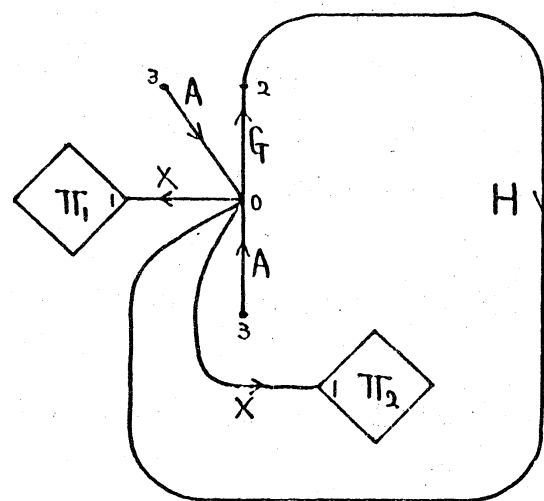
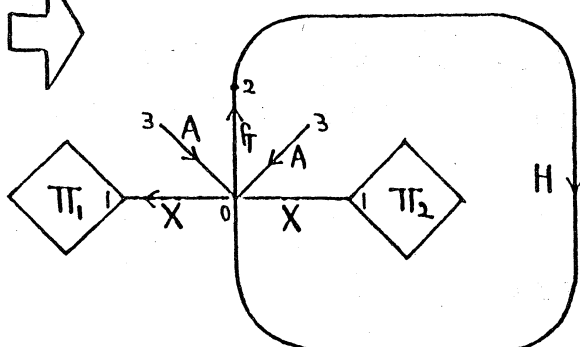
証明は, metamorphosis の様子が分かるようにするため, 図で行なう.



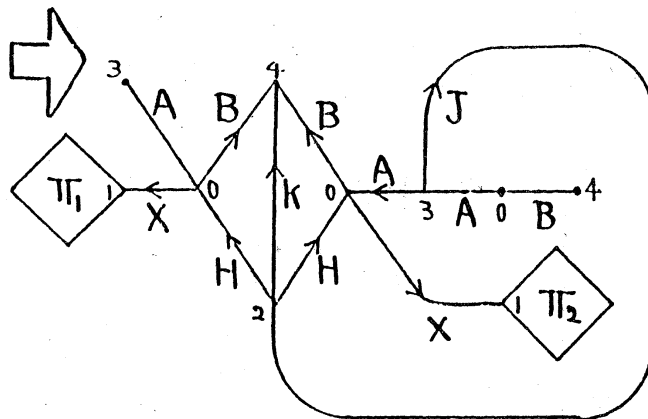
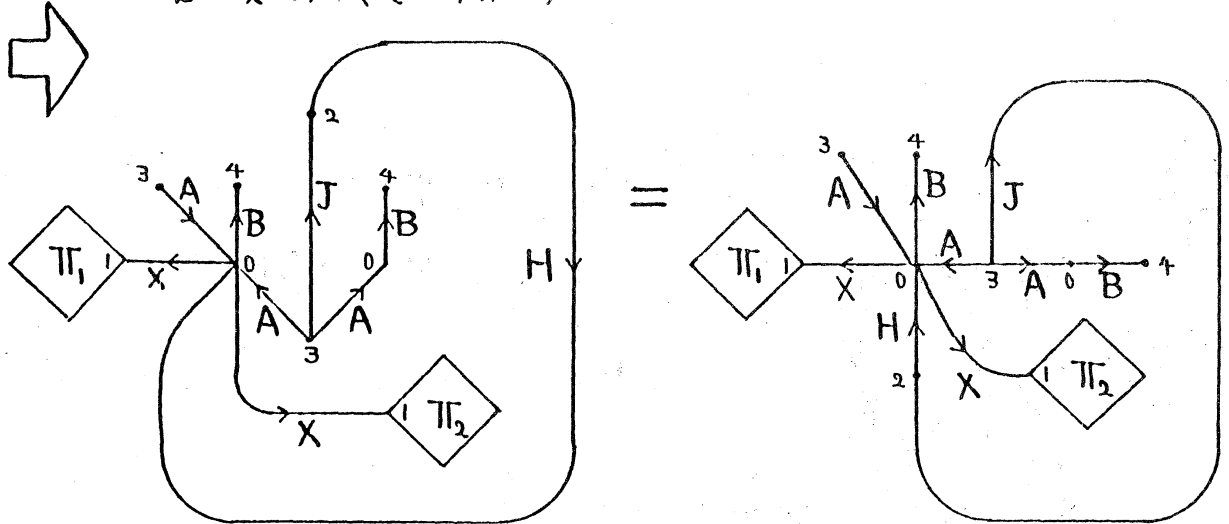
S-変形 (Fの分割: $F=GH$, WA の添加)



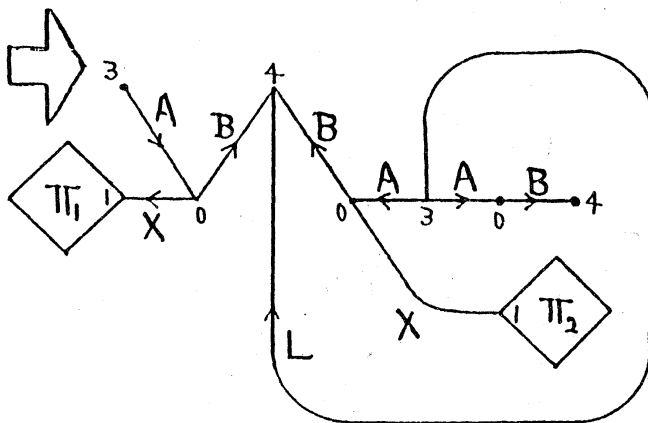
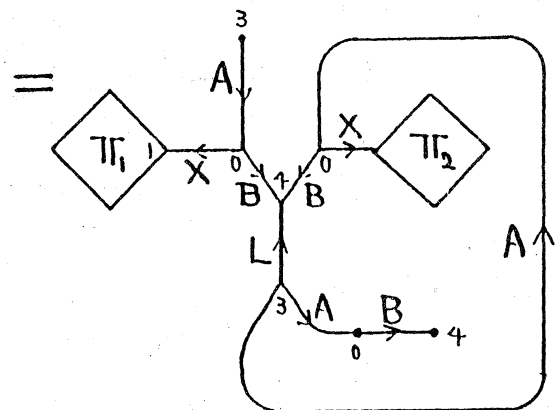
S-変形 (W の除去)

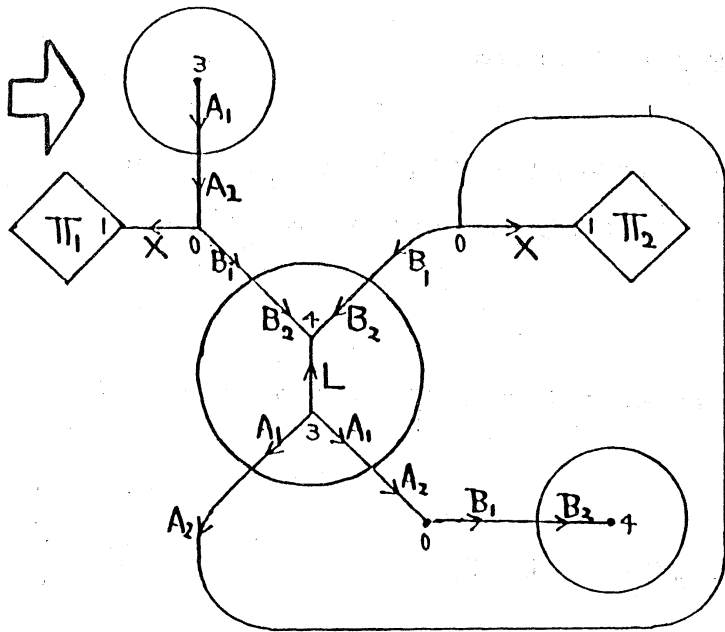


S-変形 (C の除去)



C-変形

 $HB \rightarrow (K, HB)$ S-変形 (H の除去, $JK \rightarrow L$)



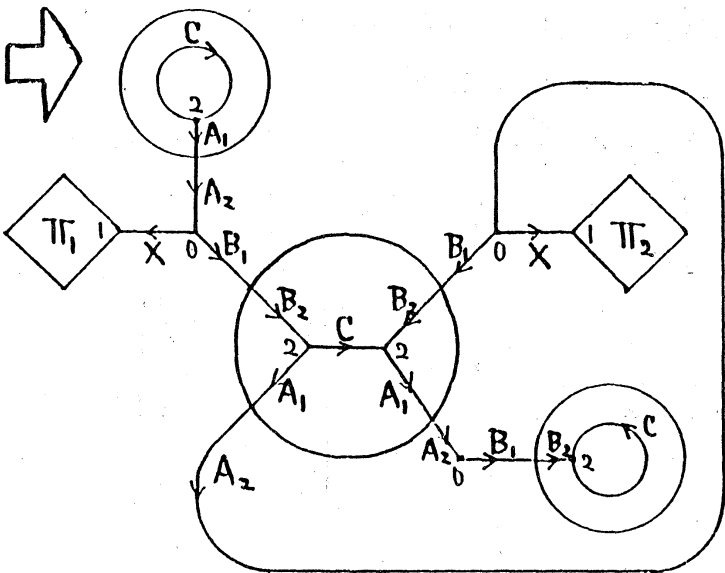
S-変形

Lの近傍も選ぶ。

それに伴って

$$A \rightarrow A_1, A_2$$

$$B \rightarrow B_1, B_2$$



D-変形

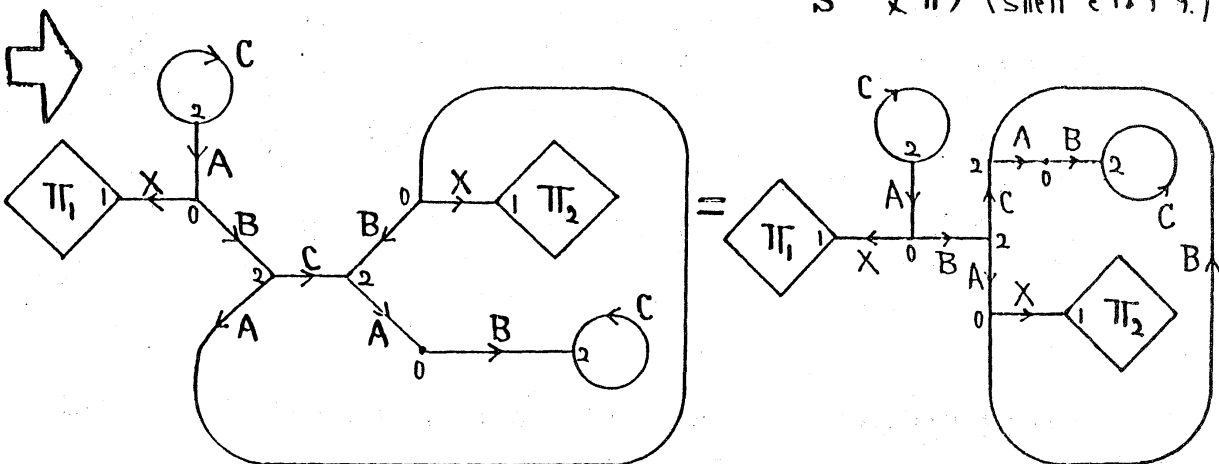
Lの近傍の部分か

図のように変る。

Lが消滅して

Cが発生する。

*このような近傍を
shellという。



S-変形 (shell もはすす)

§ 5. $(\Sigma_u \star \Sigma_v, G_u \star G_v)$ の DS 化の algorism

Heegaard diagram から § 3 の方法によって図 4 の $(\Sigma_u \star \Sigma_v, G_u \star G_v)$ に直しておく。但し, graph G_u, G_v はいずれも connected であるとする。そのとき次の定理がなりたつ。

定理 2. $(\Sigma_u \star \Sigma_v, G_u \star G_v)$ と metamorphic な DS-diagram を構成する algorism が存在する。

この定理を証明するために次の補助定理を用意する。

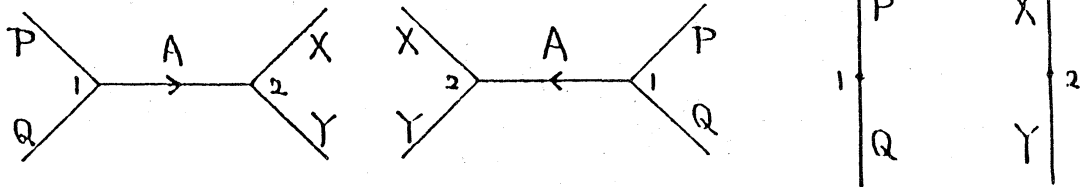
補助定理. 2つの polygram Λ_1, Λ_2 は局所的に, Λ_1 が図 6 (a), Λ_2 が図 6 (b) となっているほかは, 全く一致しているものとする。但し,

Λ_1 においては $\#A=2, \#P=\#Q=\#X=\#Y=3; \#1=\#2=3$,

Λ_2 においては $\#B=\#C=\#P=\#Q=\#X=\#Y=3; \#3=\#4=4$,

とする。そのとき Λ_1, Λ_2 は互いに metamorphic である。

(a)



(b)

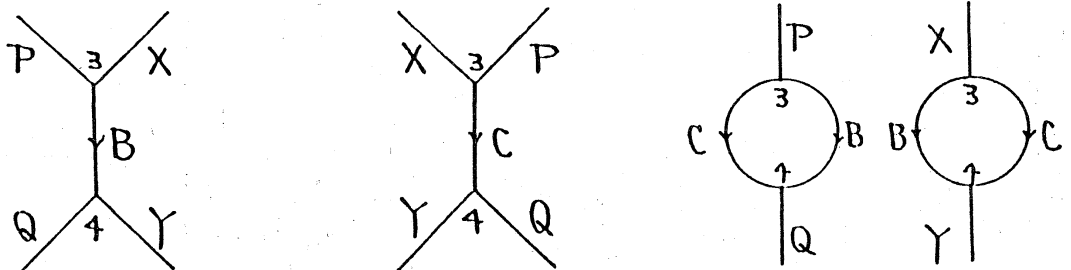


図 6

この補助定理の証明の方法は 池田-山下-横山「4, p. 113-118」の一連の図に見ることができる(図を逆にたどっていけばよい)。

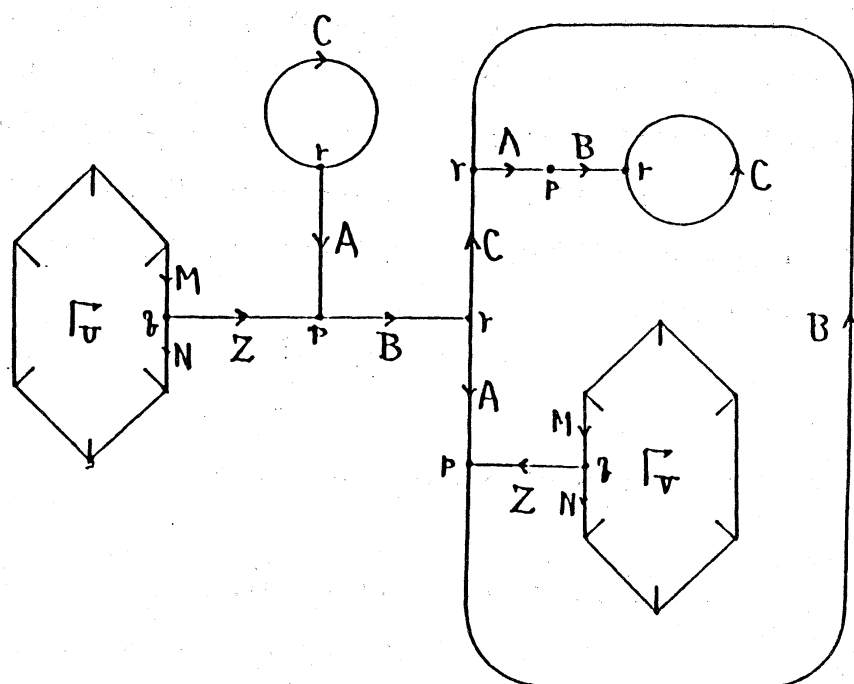


图 7

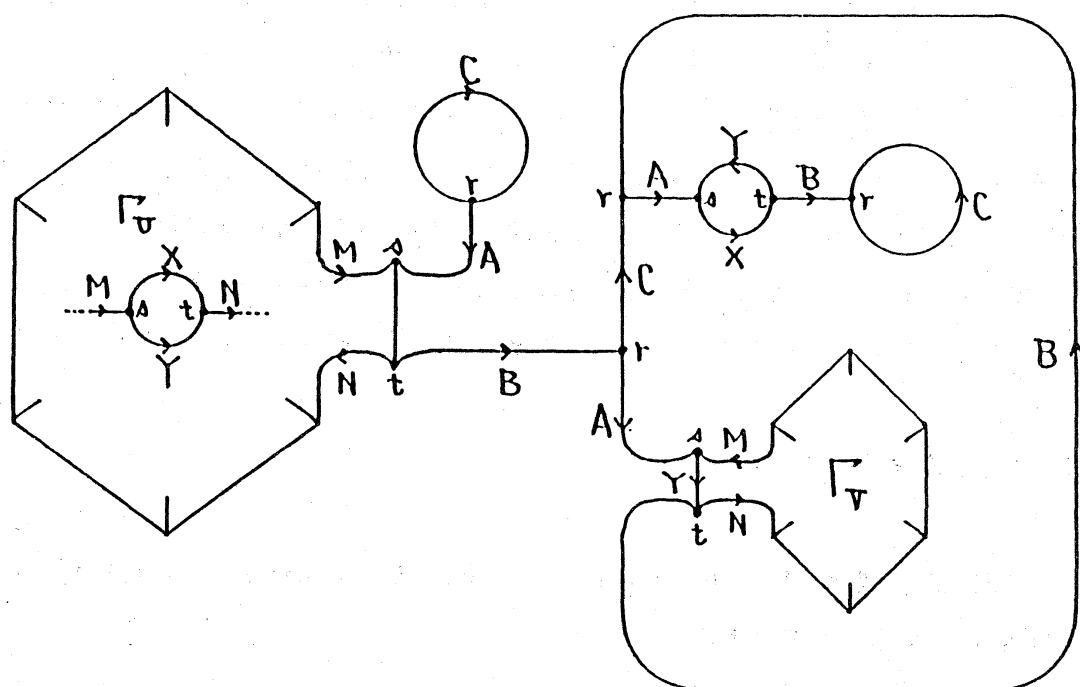


图 8

定理2の証明. $\text{polygram}(\Sigma_u \star \Sigma_v, G_u \star G_v)$ に定理1を適用することにより, $(\Sigma_u \star \Sigma_v, G_u \star G_v)$ と metamorphic な polygram 図7 が得られる.

図7では $\#Z = 2$ であり, それ以外の辺のラベルに対してはすべて $\# = 3$ である. またすべての頂点のラベルの $\#$ は4である. したがって, ラベル M, N およびラベル q の1組が図7の Γ_u か Γ_v のどちらかに隠れている. いま, それらが Γ_u の中にあるとしよう. すると図7は上の補助定理により図8と metamorphic になっている. この図8が求める DS-diagram である.

§ 6. Heegaard diagram から DS-diagram へ

Heegaard diagram から得られる2つの handlebody U, V を meridian disk で切ったとき 3-balls の表面に現われる graphs G_u, G_v は connected であるとは限らない. そのようなときには形式的に $(\Sigma_u \star \Sigma_v, G_u \star G_v)$ を作ってみても $\Sigma_u \star \Sigma_v - G_u \star G_v$ の連結成分の中にアニュラスなど open 2-cell でないものがあるので, このままでは $(\Sigma_u \star \Sigma_v, G_u \star G_v)$ は polygram になっていない. しかし, このような困った穴あき disk は適当な 1-cells で細分することにより 2-cell に分解できるから結局は polygram に直せる. このようにして得られた polygram を § 3 ~ § 5 と同じ方法で DS 化することを試みる. そのとき残された宿題は 2-cell 分解にするために増えた辺の処理である. しかし, これらは $\# = 2$ であるからこのような各 2-cell につぎつぎに補助定理を適用すれば最後には DS 化が完成するはずである. これらの操作は局所的なものであるから, 各操作の段階で他の部分に影響を与えることはない. すなわち, DS 化の作業は滞りなく遂行できる.

以上のことをまとめると

定理3. 3次元閉多様体 M の Heegaard diagram が与えられると, それを利用して DS-diagram を作る方法がある.

系. 任意の3次元閉多様体は DS-diagram で表現することができる.

[注意] この系の命題は 石井一平氏の flow spine による証明 や 池田-山下の collapsing map の inverse の議論などですでに知られている事実である.

REFERENCES

- [1] Hempel, J., 3-manifold, Ann. of Math. Studies 86, Princeton Univ. Press (1976).
- [2] Ikeda, H., Identification map on 2-sphere, Kobe J. Math., 2 (1985), 163-167.
- [3] Ikeda, H.-Inoue, N., Invitation to DS-diagrams, Kobe J. Math. 2 (1985), 169-186.
- [4] Ikeda, H.-Yamashita, M.-Yokoyama, K., Deformations of DS-diagrams, Topology and Computer Science (1987), 81-138.
- [5] Ishii, I., Flows and spines, Tokyo J. Math., 9 (1986), 505-525.
- [6] Ishii, I., Combinatorial construction of a non-singular flow on a 3-manifold, Kobe J. Math., 3 (1986), 201-208.
- [7] Ishii, I., Reducibility of flow-spines, Tokyo J. Math., 10 (1987), 161-177.
- [8] Seifert, H.-Threlfall, W., Lehrbuch der Topologie, Leipzig und Berlin Verlag und Druck von B. G. Teubner (1934).
- [9] Yamashita, M., D_1 -deformation of DS-diagram, Research Rep. of Gen. Ed. Fac. of Eng. Toyo Univ., 22(1987), 49-55.