

Ramsey Theorems for Knots, Links
and Spatial Graphs

東京工業大学 理学部 根上生也 (Seiya NEGAMI)

§ 1 はじめに

グラフとは頂点と辺からなる 1 次元図形である. その中にはいくつもの単純閉曲線 (閉路と呼ぶ) が存在するから, グラフを空間の中に埋め込めば, それは結び目や絡み目を含むことになる. もちろん, その結び目や絡み目がすべて自明なものになってしまうこともある. 例えば, 平面的なグラフを平面に埋め込み, それを平面ごと空間に埋め込んでしまえば, どこにもほどけない結ぶ目やはずせない絡み目が存在しない. しかし, ある程度以上グラフが複雑になれば, そのどんな埋め込みも自明でない結び目や絡み目を含みそうである.

その期待に初めて答えてくれたのが, Conway と Gordon の次の定理である. ただし, n 頂点上の完全グラフ K_n とは n 個の頂点を持つグラフで, その頂点のどの組も辺で結ばれているものである. 即ち, $(n-1)$ 次元単体の 1-骨格の部分である.

(結び目・絡み目の理論に関する用語は [Ro] を, グラフ理論に関する用語は [BM] を参照して下さい.)

定理 1. (Conway-Gordon [CG])

- (i) K_6 の R^3 への任意の埋め込みは自明でない絡み目を含む.
- (ii) K_7 の R^3 への任意の埋め込みは自明でない結び目を含む.

彼らの証明を追うと, K_6 は絡み数 $lk(L_1, L_2)$ が偶数の二つの連結成分 L_1, L_2 を持つ絡み目を含み, K_7 は Arf 不変量が 1 のハミルトン閉路 (すべての頂点をちょうど 1 度ずつ通る閉路) を持つことがわかるが, それ以上は何も特定できない. そこで, 指定した絡み目や結び目を含むことにしたら, 上の定理をどう修正した

らよいだろうか？もちろん、 K_6 や K_7 をもっと頂点数の多い完全グラフに換える必要がある。が、それだけでは求める定理は成立しない。例えば、完全グラフの各辺に適当な局所的な結び目を作ってしまうと、その完全グラフが含むどんな閉路も今作った結び目をその部分に持つことになり、予め指定しておいた結び目にならない。

そこで、この局所的な結び目の問題を回避するために、埋め込みを制限することにする。例えば、各辺が空間内のまっすぐな線分になっている埋め込みを考える。このような埋め込みをグラフの線形埋め込みと呼ぶ。線形埋め込みが局所的な結び目を含まないことは明かだろう。すると、次のような定理が成立する。

定理2. 任意の結び目（または絡み目） k に対して、次のような自然数 $R(k)$ が存在する： $n \geq R(k)$ ならば、 K_n のどんな線形埋め込みも k と同値な結び目（または絡み目）を含む。

ここで、二つの結び目または絡み目が互いに R^3 上の同相写像で移り合うとき、それらは同値であるという。この定義では鏡像関係にあるものは同値になる。それらを区別するために、結び目または絡み目が R^3 上の向きを保つ同相写像で移り合うとき、それらはアンビエント・アイソトピックであるという。アンビエント・アイソトピーに関して同様の定理が成立する。

定理3. 任意の結び目（または絡み目） k に対して、次のような自然数 $R_+(k)$ が存在する： $n \geq R_+(k)$ ならば、 K_n のどんな線形埋め込みも k とアンビエント・アイソトピックな結び目（または絡み目）を含む。

定理3は定理2を含んでいるが、証明のアイデアからすると、逆に定理2の証明を若干修正すれば定理3が証明できる。いずれにせよ、定理が保証する有限の数 $R(k), R_+(k)$ の最小値を同じ記号で表し、それぞれ結び目または絡み目 k の同値性に関するラムゼー数およびアンビエント・アイソトピーに関するラムゼー数と呼ぶことにする。後で簡単に触れることになるが、Hopf link と torfoil knot の同値性に関するラムゼー数はそれぞれ6と7である。が、一般にはラムゼー数

は非常に大きな数になる。

定理2,3をさらに一般化して空間に埋め込まれたグラフ (spatial graph) のラムゼー数を考えることができる。その最も一般的なものとして、次の定理が証明できる。見かけは複雑だが、証明の基本的なアイデアは定理2のものと同様と変わらない。

定理4. G_1, \dots, G_s を空間に埋め込まれたグラフとすると、これらに対して次のような自然数 $R(G_1, \dots, G_s)$ が存在する: $n \geq R(G_1, \dots, G_s)$ ならば、 K_n の任意の線形埋め込みとその辺集合の分割 $E(K_n) = E_1 \cup \dots \cup E_s$ に対して、 G_1, \dots, G_s のうちの少なくとも一つ (それを G_i とする) の細分とアンビエント・アイソトピックで、その辺集合が E_i に含まれる K_n の部分グラフが存在する。

簡単にいうと、辺集合の分割は辺に s 個の色を着色することに対応している。例えば $s = 2$ とすると、空間に埋め込まれた二つのグラフ G_1, G_2 を予め指定しておき、 K_n の辺を勝手に赤と青で塗り空間に線形に埋め込むと、必ず赤い G_1 が青い G_2 がその中に含まれていることになる。ただし、 G_1 と G_2 のどちらが含まれているかは特定できない。

実は、上の定理からトポロジ的な要素をすべて取り去ると、グラフ理論ではよく知られているグラフのラムゼー数の存在を示すものになっている。そもそも、そのグラフ理論のラムゼー数も Ramsey が証明した非常に一般的な定理に基づいている。実際、定理2,3,4 も結び目理論的な考察を経た後で、この定理を繰り返し用いて証明できるのである。(定理中の $\binom{X}{t}$ は X の t 個の元からなる部分集合全体の族を表している。)

定理5. (Ramsey [Ra]) 自然数 t, k, a_1, \dots, a_k に対して、次のような自然数 $R(t, k; a_1, \dots, a_k)$ が存在する: 有限集合 X が少なくとも $R(t, k; a_1, \dots, a_k)$ 個の元を含むならば、 $\binom{X}{t}$ の任意の分割 $\binom{X}{t} = X_1 \cup \dots \cup X_k$ に対して、ある $i \in \{1, \dots, k\}$ と a_i 個の元を持つ X の部分集合 A が存在して、 $\binom{A}{t} \subset X_i$ となる。

簡単に言うと、この定理は十分大きいものを考えておけば、必ずどこかには期待した状況が存在するということを述べている。このような現象は組合せ理論にかぎらず代数学、幾何学、位相的力学系などの分野でもいろいろと発見されており、大抵、この定理が出発点になっている。（詳しくは[GRS]を参照）

§ 2 証明の概要

定理2の証明は、逆に反例を構成しようと試みていたときに思い付いた。いずれにせよ、線形埋め込みされた完全グラフの頂点は空間の中で一般の位置にある（任意の4点が同一平面上にない）と仮定することができる。そこで、なるべく特殊な一般の位置にある点集合を考え、それを頂点集合とする線形な完全グラフを考えて、その特殊事情からそこに含まれない結び目を発見しようともくろんだ。例えば、次の曲線上の任意の部分集合が一般の位置にあることが知られている。

$$\Gamma^{\pm} = \{(x, x^2, \pm x^3) \in \mathbb{R}^3 : x > 0\}$$

この曲線は $y = x^2$ ($x > 0$) のグラフに沿って立てられたグラフ用紙に書かれた $y = \pm x^3$ のグラフだと思えることができるから、特に Γ^+ は鰻登りに跳ね上がっている。すべての曲がり角が Γ^+ 上に位置している折れ線で閉曲線を書こうとすると、細い部分を往復することになる。おまけに、その折れ線を $x y$ 平面に射影してみると、そこに現れる線分の交差は図1の正の交差ばかりになってしまう。（図1において各辺には空間内で上昇する向きが与えられている。結び目全体で一貫した向きではないことに注意。）

これはかなり無理がありそうだとさらに議論を突き詰めていくと、証明が出来上がってしまったのだった。その粗筋を述べると、次の四つのステップに分けられる。簡単のために、以下では結び目の場合だけ解説するが、絡み目の場合はもちろんのこと、空間内のグラフに対しても、若干の修正を施せば同様の流れで証明ができる。（詳細は[Ne]をご覧ください。）

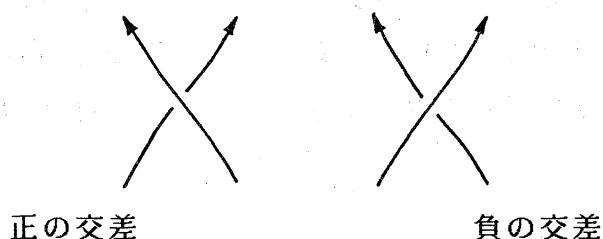


図1. 正の交差と負の交差

ステップ1: 「任意の結び目は正の交差だけからなるブラット表現を持つ。」

結び目のブラット表現とは図2のようなものである。それは、初めに上下方向に延びる長丸を用意しておいて、その数カ所を正負の交差で置き換えて得られる図形である。絡みながら上下に流れている紐の部分に下から上に向かうように向きを与え、それに従って各交差の正負を判断する。もちろん、紐の向きは丸くなっている極大点と極小点で切り替わっているので、結び目全体に一つの向きを定めているわけではない。任意の結び目がこのようなブラット表現を持つのは明かだろう。与えられた状態から極大点と極小点をそれぞれ上下に引っ張って行って同じ高さになるようにすればよい。

一般のブラット表現は正負の交差が混在している。それから出発して正の交差だけのブラット表現を作るには、ブラット表現を下から見て行って負の交差が現れるたびに、そこより下の部分を図2のように右ネジの方向にひねっていく。すると、正の交差は増えるが、負の交差が一つずつ解消されていくことになる。■

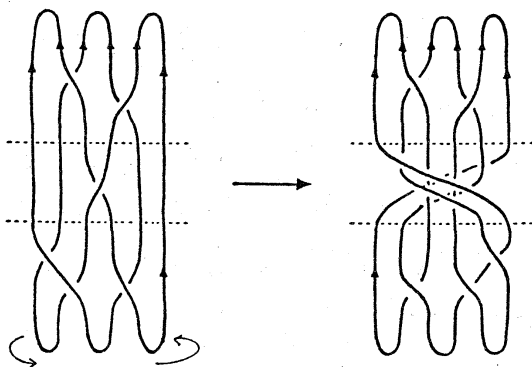


図2. 負の交差の解消

ステップ2: 「任意の結び目は Γ^+ に乗せられる。」

結び目 k を Γ^+ 上の点だけで曲がっている折れ線を実現できるとき、 k は Γ^+ に乗るといふことにする。すでに述べたように、 Γ^+ に乗っている折れ線の $x y$ 平面への射影は正の交差だけからなっている。また、折れ線を構成している二つの辺の射影が交差するのは、それらの端点の射影が互いに他のものを分離するように、 Γ^+ の射影 ($y = x^2$ のグラフ) 上に並んでいるときだけである。どちらの辺が交差の上を通るかも、その端点の射影の並ぶ順番だけで決ってしまう。

ステップ1で与えられた結び目 k の正の交差のみからなるプラット表現を作ったから、これを利用して k を Γ^+ に乗せる。自明なプラット表現 (交差のない長丸だけのもの) は交わりのない三角形として Γ^+ に乗せられる。これに上から順に交差を追加していく。その際、プラット表現の極大点・極小点に対応している頂点 (折れ線の角) と仕方なくこしらえた頂点を区別して追跡していかないと、 Γ^+ に乗せた折れ線ともともとの結び目が同じものであることを結論するのが難しくなるだろう。その議論をきちんと書くと長くなるので、ここで省略する。いずれにせよ、プラット表現でまっすぐな部分を激しく上下する折れ線で置き換えていかないと、 k を Γ^+ に乗せることはできない。■

ステップ3: 「一般の位置にある十分大きな点集合は与えられた大きさの正または負の位置にある点集合を含む。」

前のステップまでは幾何学的な準備だったが、このステップでラムゼーの定理を使って組合せ論と結び付ける。簡単にいうと、一般の位置にある十分大きな点集合の中に Γ^+ 上の点集合と同じ配置を発見する。その「同じ」という意味はそれらを頂点集合とする完全グラフの $x y$ 平面への射影の交差の状況が同じになるということである。

例えば、4点 a_1, a_2, a_3, a_4 に対して、次の行列式を考える。

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & x_4 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 & y_4 - y_1 \\ z_2 - z_1 & z_3 - z_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix}$$

ここで $a_i = (x_i, y_i, z_i)$ である。この値が正のとき a_1, a_2, a_3, a_4 がこの順番で凸四角形の頂点に移るように $x y$ 平面に射影すると、この4点を作る四面

体の二つの有向辺 $a_1 a_3$ と $a_2 a_4$ の射影が正の交差を持つようになる。そこで、どの4点に対しても上の行列式の値が正になるとき、その点集合を正の位置にあるということにする。（本当はこの条件だけではまずいのだが、話の流れだけを汲んでもらうためにインチキをする。）逆に行列式が負になるとき、負の位置にあるという。 Γ^+ 上の点集合および Γ^- 上の点集合がそれぞれ正の位置、負の位置にある点集合のモデルになっていることは言うまでもない。

そこで、 X を一般の位置ある全順序点集合とする。その順序は上の行列式を計算するとき4点の座標をどの順で並べるかを決定するためのもので、でたらめで構わない。その行列式の値の正負に従って $\binom{X}{4}$ の元 (X の4点部分集合) を二つの族 X^+, X^- に分類する。（ X が一般に位置にあるので、行列式は0にならない。）ここでラムゼーの定理（定理5）を使うと、 X が $R(4, 2; n, n)$ 個以上の点を含めば、正または負の位置にある n 点集合 A を含むことになる。（ほんとうの正負の位置の定義にはさらに条件が加えられているので、ラムゼーの定理をもう一度使わないと結論は得られない。）■

ステップ4：「結論」

定理2, 3, 4を結び目バージョンで順に証明する。（ステップ3と同様のインチキを引きずって解説していることに注意。）

まず、十分大きな頂点数 N の完全グラフ K_N の線形埋め込みを考える。その頂点集合は一般の位置にあると仮定して差し支えない。すると、ステップ3の主張からその部分集合で正または負の位置にある n 点集合 A が存在する。ただし、与えられた結び目 k を Γ^+ に乗せるのに、 n ヶ所で曲がった折れ線 (n 辺形) が必要であるとする。その n 辺形の Γ^+ 上の n 個の点を頂点とし、それらをまっすぐな辺でつないで得られる完全グラフ K_n を考えると、その頂点集合 $V(K_n)$ は正の位置にある。

もし A が正の位置にあるときには、 A を頂点集合とする K_N の完全部分グラフと K_n の $x y$ 平面への射影の辺の交差の状況は完全に同じになっている。ということは、両者は空間の中でも同じ配置にあると思ってよい。したがって、 K_N の中には A の点を頂点とする折れ線で k を実現しているものが存在する。この場合

はその折れ線と k はアンビエント・アイソトピックである。逆に、 A が負の位置にあるときには、 k の鏡像とアンビエント・アイソトピックな折れ線が K_N の中に存在する。いずれの場合にも K_N は k と同値な結び目を含むことになり、定理 2 が成立する。

A が正の位置になるか負の位置になるかはコントロールできないので、ステップ 3 を改良して定理 3 を証明するのは不可能である。そこで、今度は k を Γ^- に乗せることを考える。これはステップ 2 と同様にしてできる。 k を Γ^+ に乗せると n_+ 辺形になり、 Γ^- に乗せると n_- 辺形になるとし、 $n = \max \{n_+, n_-\}$ と置いて上の議論を繰り返すと、 A が正の位置にあるならば Γ^+ に乗せたものが、 A が負の位置にあるならば Γ^- に乗せたものが K_N の中に存在することになる。いずれの場合のそれは k とアンビエント・アイソトピックであるから、定理 3 が成立する。

今度は s 個の結び目 k_1, \dots, k_s を用意し、それらのアンビエント・アイソトピックに関するラムゼー数が N 以下であるとする。完全グラフの頂点数が定理 5 のラムゼー数 $R(2, s; N, \dots, N)$ 以上ならば、その辺を s 色で任意に塗ると必ずすべての辺が同一の色で塗られた N 頂点の完全部分グラフ K_N が存在する。(これを示すにはグラフの辺を二つの頂点からなる集合と見なして、ラムゼーの定理を使えばよい。) その K_N の辺の色が i ならば、もとの大きな完全グラフは色 i で塗られた k_i を含むことになる。この事実を空間内のグラフの場合に拡張したのが定理 4 である。■

§ 3 ラムゼー数の推定

上の議論に従えば、結び目のラムゼー数 $R(k)$ の上界を与えることができるが、ラムゼー数 $R(t, k, a_1, \dots, a_k)$ 自身存在は示せても決定は非常に困難なので、 $R(k)$ を求める一般的な方法はないに等しい。下界についても効果的な方法があるわけではないが、この節では比較的具体的な議論で $R(k)$ の下界を与えることを試みる。

本稿で考えている完全グラフの埋め込みは線形なものだけであるから、それが結び目または絡み目 k を含むならば、 k は数本の線分の和集合で実現されている。

そこで、 k を線分の和集合（単に折れ線という）として表すときに必要な最少の線分の本数を k の折れ線数と呼び、 $bl(k)$ と書くことにする。例えば、自明な結び目 0_1 、Hopf link 2_1^2 、trefoil knot 3_1 、figure-eight knot 4_1 の折れ線数は次の通りである。（この結び目・絡み目の表記は[Ro]に従っている。）

$$bl(0_1) = 3, \quad bl(2_1^2) = 6, \quad bl(3_1) = 6, \quad bl(4_1) = 7$$

もし $bl(k) = n$ ならば、 k は n 個以上の角を持つ折れ線でないと表現できないから、それを含む完全グラフも n 個以上の頂点を持たなければならない。つまり、

$$bl(k) \leq R(k)$$

となるので、以下では $bl(k)$ の値を $cr(k)$ を用いて評価する。ただし、 $cr(k)$ は k の射影の交差点（十字形のみ考える）の個数の最少数で、 k の交差数と呼ばれる。

例えば、

$$cr(0_1) = 0, \quad cr(2_1^2) = 2, \quad cr(3_1) = 3, \quad cr(4_1) = 4$$

である。

定理 6. (i) 結び目または絡み目 k が自明な結び目でなければ、

$$\frac{5 + \sqrt{25 + 8(cr(k) - 2)}}{2} \leq bl(k)$$

が成立する。

(ii) 結び目または絡み目 k が Hopf link と trivial link のどちらも連結和の因子に持たないならば、

$$bl(k) \leq 2 cr(k)$$

が成立する。

証明. (i) $n (= bl(k))$ 本の線分の和集合 Q として k が表せたとする。そのすべての連結成分が三角形のときは、任意の二つの連結成分の射影は高々2点で交差する。したがって、三角形の個数を t とすると、 $bl(k) = 3t$ であり、 Q の射影の交差点の総数は高々 $t(t-1)$ である。 k の交差数はこの値を越えないから、

$$cr(k) \leq t(t-1)$$

となる。このとき、 $bl(k)$ の値を評価してみると、 $t \geq 2$ ならば (i) の不等式に矛盾しないことがわかる。即ち、 k が自明な結び目でなければよい。

Qが三角形でない連結成分を含むときには、その成分に乗っている辺の一つを $x y$ 平面に垂直に立ててQを射影する。すると、その辺は1点に射影され、辺の交差とは無関係になる。このとき、Qの射影は $n - 1$ 本の辺からなり、各辺は自分とそれに隣接した2辺を除く高々 $n - 4$ 本の辺と交差することができる。したがって、Qの射影は高々 $(n-1)(n-4)/2$ 個の交差を持つ。この値はやはり k の交差数の上界を与えている。

$$\frac{(n-1)(n-4)}{2} \geq cr(k)$$

この2次不等式を解くと、(i)の不等式が得られる。

(ii) まず、 k の平面上への射影を交差点を頂点とする4-正則グラフ（各頂点からちょうど4本の辺が出ているグラフ）と見なす。簡単のために、そのグラフ G は多重辺やループを持たないとする。[Fa],[Sa],[Wa]などで示されているように、どんな単純平面グラフも各辺がまっすぐな線分になるように修正できる。 G をそのような状態に置いて、各辺の上に竹ひごを置いて、頂点のところで k の射影の交差の上下関係に対応して竹ひごをつないでいけば、折れ線により k の表現が得られる。多重辺やループがある場合には工夫が必要だが、このような構成法がうまくいかないのは定理にあるような場合だけである。今用意した竹ひごの本数を n 、グラフの頂点を v とすると、 $2n = 4v$ である。特に、 $v = cr(k)$ とすれば(ii)の不等式を得る。■

上の定理の(i),(ii)から、trefoil knot 3_1 の折れ線数 ($bl(3_1) = 6$) をびったり求めることができる。(i)の証明で一つの辺を垂直に立てて射影を考えたが、そういう技巧的なことをしないと $bl(3_1) \geq 5$ しか結論できない。もし結び目または絡み目 k の線分による表現の中で同時に平行にできる線分の本数が多ければ多いほど、定理6の(i)の下界は改善できることになる。

アンビエント・アイソトピックに関するラムゼー数 $R_+(k)$ については $bl(k)$ のような組合せ的な不変量ではコントロールできないだろう。が、次の不等式は定義から用意にわかる。ただし、 \bar{k} は k の鏡像である。

$$R(\bar{k}) = R(k) \leq R_+(k) = R_+(\bar{k})$$

特に、 \bar{k} と k がアンビエント・アイソトピックならば、 $R(k) = R_+(k)$ である。

定理 7. (i) $R_+(2_1^2) = R(2_1^2) = 6$.

(ii) $R_+(3_1) > R(3_1) = 7$.

証明. (i) 定理 1 から K_6 の任意の埋め込みは二つの連結成分を持つ自明でない絡み目を含み、その各成分は 3 個ずつ K_6 の頂点を含んでいる。したがって、その埋め込みが線形ならば各成分は三角形になっており、二つの三角形がはずれないのはそれが Hopf link 2_1^2 になっているときだけである。これから $R(2_1^2) \leq 6$ がわかる。また、 $bl(2_1^2) = 6$ だから、 $R(2_1^2) = 6$ となる。さらに、 2_1^2 はその鏡像とアンビエント・アイソトピックだから、 $R_+(2_1^2) = R(2_1^2)$ となる。

(ii) $bl(3_1) = 6$ だから $R(3_1) \geq 6$ であるが、残念ながら図 3 が示す K_6 の線形埋め込みは自明でない結び目を含まないので、 $R(3_1) \geq 7$ である。さらに残念なことに $bl(4_1) = 7$ なので、定理 1 の (ii) が保証する K_7 内の自明でないハミルトン閉路が必ずしも 3_1 にはならない。そこで、大変な作業になるが、7 本の線分で表される結び目をすべて分類してみる。その結果が図 4 で、左から二つは 6 本以下の線分でも実現できる。 ([CF, p:11, Exercise 2] を見よ。)

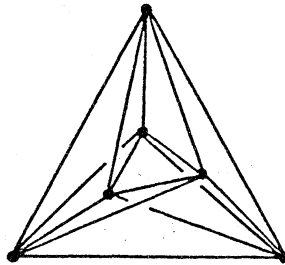


図 3. 結び目を含まない K_6 の線形埋め込み

この分類から、 K_7 の線形埋め込みが含む自明でない結び目になっているハミルトン閉路が 3_1 でないならば、それは図 4 の右の 4_1 の状態になっている。これに辺を加えて K_7 全体の埋め込みを復元してみると、その中に 3_1 が含まれていることがわかる。例えば、図 4 では 1734562 と通る閉路が 3_1 である。これから K_7 のどんな線形埋め込みも 3_1 を含むことになり、 $R(3_1) = 7$ となる。また、図 5 が示す K_7 の線形埋め込みは 3_1 を含むがその鏡像は含まないので、 $R_+(3_1) > 7$

である。（実際、1234567以外の閉路はすべて自明な結び目である。）■

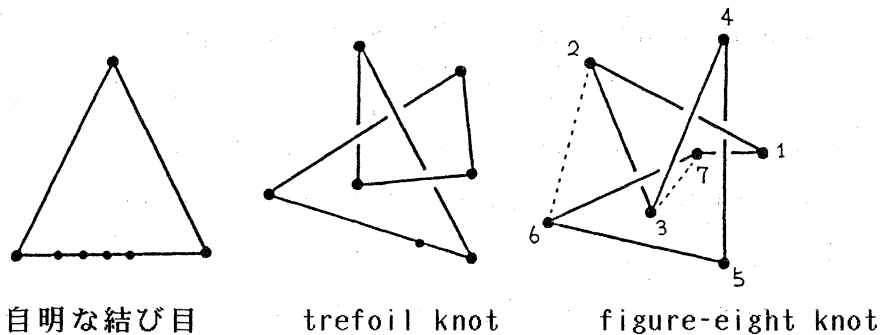


図4. 7本の線分で表される結び目

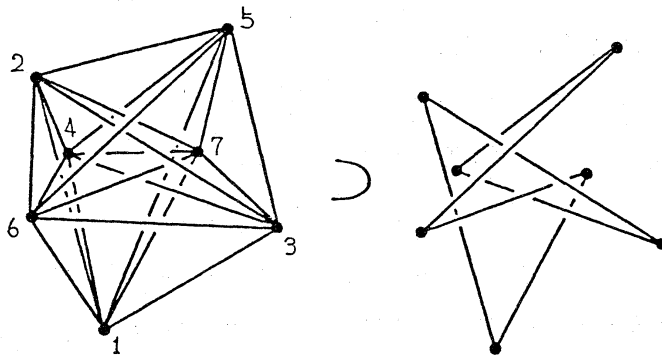


図5. 唯一の結び目を含む K_7 の線形埋め込み

本稿では完全グラフの埋め込みのみを考察してきたが、完全グラフでないグラフに対して同様の議論をするのもおもしろいだろう。例えば、[Sa]にはどんな埋め込みも自明でない絡み目を含むいくつかのグラフが紹介されている。その証明は怪しいところもあるが、グラフが含む閉路の組の絡み数の総和を考えて、[CG]の議論をまねすれば、その証明を完成することができる。

【参考文献】

- [BM] J.A. Bondy and U.S.R. Murty, "Graph theory and its application", Macmillan, 1976.
- [CF] R.H. Crowell and R.H. Fox, "Introduction to knot theory",

Springer-Verlag, 1963.

- [CG] J.H. Conway and C.McA. Gordon, Knots and links in spatial graphs, *J. Graph Theory* 7 (1983), 445-453.
- [Fa] I. Fáry, On straight line representation of planar graphs, *Acta Sci. Math. Szeged.* 11 (1948), 229-233.
- [GRS] R.L. Graham, B.L. Rothschild and J.H. Spencer, "Ramsey Theory", Wiley, 1980.
- [Ne] S. Negami, Ramsey theorems for knots, links and spatial graphs, preprint.
- [Ra] F.P. Ramsey, On a problem of formal logic, *Proc. London Math. Soc.* 30(2) (1930), 264-286.
- [Ro] D. Rolfsen, "Knots and Links", Math. Lecture Series 7, Publish or Perish, Inc., 1976.
- [Sa] H. Sachs, On a spatial analogue of Kuratowski's theorem on planar graphs - an open problem, in *Graph Theory, Łagów 1981, Proceedings, Lecture Notes in Math.* 1018, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (1983), 230-241.
- [St] S.K. Stein, Convex maps, *Proc. Amer. Math. Soc.* 2 (1951), 464-466.
- [Wa] K. Wagner, Bemerkungen zum Vierfarbenproblem, *Jber. Deutsch. Math-Verein.* 46 (1936), 26-32.