数理解析研究所講究録
636巻 1987年 42-45

# Boundaries for spaces of quasi-Fuchsian groups

都立大 理　　大鹿健一(Ken'ichi Ohshika)

本稿では 拙論文 "Limits of geometrically tame groups" のうち 曲面群の $PSL_2\mathbf{C}$ への表現に関する結果を述べる。

S を双曲型閉曲面とする。AH(S)で$\pi_1$(S)から $PSL_2\mathbf{C}$ への faithful discrete表現全体のつくる空間にalgebraic convergenceによる位相をいれたものとする。AH(S)のよく知られた部分空間として、quasi-Fuchsian groupsの空間QH(S)がある。Bers によって QH(S)は$\mathcal{T}$(S) × $\mathcal{T}$(S)と位相同型であることが知られている。$\mathcal{T}$(S) × $\mathcal{T}$(S) からQH(S)へのこの同相写像を qf で表そう。

Bersは[Be]において、$\mathcal{T}$(S)の固定された元 $m_0$ と無限遠へいく列 $\{m_i\}$ について、$\{qf(m_0,m_i)\}$のある部分列は AH(S) で収束することを示した。このようにして得られる群をboundary groupとよぶ。

一般にKlein群 $\Gamma$ で $\Omega_\Gamma$ に唯一つの不変成分があるようなものをb-groupとよぶ。Boundary groupはb-groupの例になっている。一方Abikoff [Ab] によって幾何学的有限なb-groupはboundary groupになることが示された。

さてThurstonはuniformization theoremの証明の過程で、ある条件を満たす$\mathcal{T}$(S)の無限遠にいく列$\{g_i\}$,$\{h_i\}$について $qf(g_i,h_i)$ がAH(S) で収束することを示した。このようにboundary group以外にもAH(S)におけるQH(S)の境界に含まれる群がある。そこでAH(S)全体と$\overline{QH(S)}$ を比較することによってAH(S)を調べようという方針がたてられる。

まず幾何学的有限な場合については次の定理が得られた。

定理　1．$\Gamma$　をAH(S)に属するKlein群で幾何学的有限とする。このとき$\Gamma$　は $\overline{QH(S)}$ に含まれる。即ち擬Fuchs群の列で代数的に$\Gamma$　に収束するものがある。

上の定理は私の幾何学的有限Klein群に関する収束定理を使ってAbikoffと類似の議論をすることによって得られる。

定理　2．$\Gamma$　を定理　1と同様とする。このとき$\Gamma$は正則boundary groups の代数的極限となっている。

この定理も本質的に収束定理とMardenの同型定理によって示される。

上の二つの定理を一般の場合に拡張することを考える。予想として次のものが考えられる。

予想　1　AH(S) = $\overline{QH(S)}$.

予想　2　AH(S) の元は全てboundary groupsの極限である。

予想　1は定理　1とあわせると、Thurstonの予想 "geometrically tame group は geometrically finite groups の極限としてあらわされる。" の特殊な場合である。予想　2はBers予想 "b-group は boundary groups の極限である。" の一般化である。

上の二つの予想を解く為の障害はgeometrically tame groupについてMardenの同型定理の様な定理がない点にある。

さてそこで今一度Mardenの同型定理を振り返ってみよう。Mardenの同型定理

は幾何学的有限なendを無限遠の等角構造によって記述しているとみなせる。即ちEをMの幾何学的有限なendとするときそれに対応する$\Omega_\Gamma$ の成分$\Omega_1$ についてRiemann面$\Omega_1/\Gamma$ によってEの双曲構造は決まるということを述べている。

そこで幾何学的無限endに対してもその双曲構造を決定する道具がほしい。幾何学的無限endに対しては、無限遠の等角構造は対応しない。しかしgeometrically tame (infinite) end に対しては、ending lamination が唯一つ定まる。それがend を記述する指標となっていることが期待される。

以上のことを念頭に置いてAH(S)の元$\Gamma$ に対してそのmarkingなるものを以下のように定義する。 MのなかにSをhomotopy 同値写像によって埋め込む。SによってMは二つの成分$M^+$ と$M^-$ に分けられる。それぞれに含まれる accidental parabolic elements によって二つのSの分割が得られる。その分割によって得られたSの部分曲面はそれぞれM（のnon-cuspidal component)のendに対応している。そのendに対して幾何学的有限の場合は無限遠球面から誘導される等角構造が、幾何学的無限の場合はending lamination が定まる。そこで各部分曲面と等角構造,或はending laminationの対を考え、それを並べたものを$\Gamma$ のmarking と定義する。

このとき以下の二つの定理を示すことができる。

定理 3 AH(S) の任意の元に対して、それと同じmarking を持つ$\overline{QH(S)}$ の元が存在する。

定理 4 AH(S) の任意の元に対して、boundary groups の極限でそれと同じ marking を持つものがある。

これらの定理により予想 1、2 は次の予想に帰着される。

予想　3　AH(S) の二つの元が同じmarking を持てば、それらは同一の元である。