数理解析研究所講究録
637 巻 1988 年 140-167

非圧縮性Navier-Stokes方程式の解の粘性消失極限

京大教養部　浅野　潔　(Kiyoshi Asano)

§1. 問題

我々がここで考察する問題は，半空間 $\mathbb{R}^n_+ = \{ x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n ;\ x' \in \mathbb{R}^{n-1},\ x_n > 0 \}$，$n \geq 2$，における Navier-Stokes 方程式（以下 N-S 方程式と略記する）の初期値境界値問題で，次のように書かれる：

$$
(\mathrm{P}_\nu)\quad
\begin{cases}
\text{(i)} & \partial_t u + u\cdot\nabla u - \nu\Delta u + \nabla p = 0, \quad t>0, \quad x \in \mathbb{R}^n_+, \\
\text{(ii)} & \nabla\cdot u = 0, \\
\text{(iii)} & u|_{t=0} = u_0, \\
\text{(iv)} & \gamma u \equiv u|_{x_n=0} = 0.
\end{cases}
$$

ここで $u = {}^t(u_1, \cdots, u_n) = u(\nu, t, x)$ は時刻 $t \geq 0$，位置 $x \in \mathbb{R}^n_+$ における流速，$\nu \in (0, 1]$ は流体の粘性係数を表わす。また (ii) は流体の非圧縮条件（密度＝一定），(iv) は境界壁面における流体の粘着条件である。初期流速 u_0 は次の条件を満す：

$$
(\mathrm{I})\quad
\begin{cases}
\text{(i)} & \nabla\cdot u_0 = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n_+, \\
\text{(ii)} & \gamma u_0 = 0, \quad x' \in \mathbb{R}^{n-1}.
\end{cases}
$$

我々の目標は，次の結果を示すことである：

① 方程式系 (P_ν) が，パラメタ $\nu \in (0,1]$ によらない時間幅 $[0,T]$ で，普通の意味の解（古典解または強解）$u(\nu,t,x)$ をもつ。

② その解 $u(\nu,t,x)$ が，$\nu \to 0$ のとき，次の Euler 方程式系 (P_0) の解 $u^0(t,x)$ に（適当な意味で）収束する，

$$
(P_0)\quad
\begin{aligned}
&\text{(i)} && \partial_t u + u\cdot\nabla u + \nabla p = 0, \quad t>0,\ x\in \mathbb{R}^n_+,\\
&\text{(ii)} && \nabla\cdot u = 0,\\
&\text{(iii)} && u|_{t=0} = u_0,\\
&\text{(iv)} && \gamma_n u \equiv u_n|_{x_n=0} = 0, \qquad (\text{slip 条件}).
\end{aligned}
$$

上述の問題は，（粘性をもつ）"実在流体"の流れの場に置かれた物体が，流れに及ぼす影響（あるいは流れが物体に及ぼす力）を考察した Prandtl の境界層理論（1904）から始まる。"完全流体"の方程式系 (P_0) を，"粘性流体"の方程式系 (P_ν) で置きかえるとき，流れの場に付加される効果は，$O(\sqrt{\nu})$ の誤差を無視するとき，境界（物体表面）からの距離が $O(\sqrt{\nu})$ の範囲の流れの場に現れるので，この補正項は境界層と名付けられた。これによって，完全流体の一様な流れの場に置かれた物体に，流体が及ぼす力が 0 であるという"D'Alembert の paradox"は，一応回避されたわけである。境界層

は，変数 x_n を $x_n/\sqrt{\nu}$ の形で含むことに注意しておこう。

偏微分方程式論の立場から，簡単なコメントをつけ加える。

① 粘性項 $-\nu\Delta u$ の処理は，粗く（方程式を局所的に，あるいは全空間 $\mathbb{R}^n$ で考える場合に）いえば，$\partial_t - \nu\Delta$ に対する基本解（heat kernel）：

$$U_0(\nu, t, x) = (4\pi\nu t)^{-n/2}\, e^{-|x|^2/4\nu t}$$

を，Euler 方程式の解に，左から合成積（convolution）としてかける手続きによって遂行される。（これに commutator $[U_0(\nu,t), u\cdot\nabla]$ の効果から生ずる補正項が加わる。）この手続きは，いわゆる mollifier と同等の効果をもたらす。

② N-S 方程式（2 階放物型）と Euler 方程式（1 階双曲型）の境界条件の違い（粘着条件と slip 条件）は，Helmholtz 分解（ベクトル場の potential part と solenoidal part への分解）を定義する境界条件の違いとして現れる。たとえば，$n=3$ の場合，$\mathbb{R}^3$ における Helmholtz 分解

$$\mathrm{grad}\,\Delta^{-1}\mathrm{div} - \mathrm{rot}\,\Delta^{-1}\mathrm{rot} = 1 \quad (\equiv \delta(x))$$

に対して，境界条件による補正を行なって，$\mathbb{R}^3_+$ における Helmholtz 分解を構成するのであるが，N-S 的 Helmholtz 分解と Euler 的 Helmholtz 分解において，補正項の効果は全く異る。

上記の事情は，方程式の解法に自然に組み込まれているこ

とが多いので，強くは意識されないけれども，デリケートな問題を扱う場合には，留意しておかなくてはならない．

我々は (P_ν) の解 $u(\nu,t,x)$ として，次の形のものを求める：

$$(1.1)\qquad u(\nu,t,x) = u^0(\nu,t,x) + \varepsilon u^1(\varepsilon,t,x) + \varepsilon u^2(\varepsilon,t,x) + \tilde{u}^1(\varepsilon,t,x',x_n/\varepsilon) + \varepsilon\tilde{u}^2(\varepsilon,t,x',x_n/\varepsilon),$$

$$\tilde{u}^1(\varepsilon,t,x',x_n) = \begin{pmatrix} \tilde{u}^{1\prime}(\varepsilon,t,x',x_n) \\ \varepsilon\tilde{u}^1_n(\varepsilon,t,x',x_n) \end{pmatrix},$$

$$p(\nu,t,x) = p^0(\nu,t,x) + \varepsilon p^1(\varepsilon,t,x) + \varepsilon p^2(\varepsilon,t,x) + \varepsilon^2\tilde{p}^2(\varepsilon,t,x',x_n/\varepsilon),$$

$$\varepsilon = \sqrt{\nu} \in (0,1].$$

後に構成法を示すが，これらは $\{u^0,p^0\}$，$\{u^1,p^1,\tilde{u}^1\}$，$\{u^2,p^2,\tilde{u}^2,\tilde{p}^2\}$ の順に，それぞれが特別な形の N-S 方程式をみたすように定められ，かつ u^0 は (ν,t) について，$u^i,\tilde{u}^i\ (i=1,2)$ は (ε,t) について $[0,1]\times[0,T]$ において，適当な（x 変数の関数空間の）強位相で滑らかとなる。さらに $\tilde{u}^1(\varepsilon,t,x',x_n)$（の成分）は，$\varepsilon$ について一様に $O(e^{-\delta x_n})$ でもある。以下に $u^0, u^1, u^2, \tilde{u}^1, \tilde{u}^2$ のみたすべき N-S 方程式を書く。

$$(P_\nu)^0 \begin{cases} \partial_t u^0 + u^0\cdot\nabla u^0 - \nu\Delta u^0 + \nabla p^0 = 0, \\ \nabla\cdot u^0 = 0, \\ u^0|_{t=0} = u_0, \\ \gamma_n u^0 = 0, \end{cases}$$

$$(P_\nu)^1 \quad \begin{cases} \partial_t u^1 + u^0\cdot\nabla u^1 - \nu\Delta u^1 + u^1\cdot\nabla u^0 + \nabla p^1 = 0\,, \\ \nabla\cdot u^1 = 0\,, \\ u^1|_{t=0} = 0\,, \\ \gamma_n u^1 = -\gamma_n \tilde{u}^1\,. \end{cases}$$

$$(\tilde{P}_\nu)^1 \quad \begin{cases} \partial_t \tilde{u}^{1\prime} + (u^0 + \varepsilon u^1 + \tilde{u}^1)\cdot\nabla\tilde{u}^{1\prime} - \nu\Delta\tilde{u}^{1\prime} + \hat{u}^1\cdot\nabla u^{0\prime} = 0\,, \\ \nabla'\cdot\tilde{u}^{1\prime} \equiv \partial_1\tilde{u}^1_1 + \cdots + \partial_{n-1}\tilde{u}^1_{n-1} = -\partial_n\tilde{u}^1_n\,, \\ \tilde{u}^1|_{t=0} = 0\,, \\ \gamma'\tilde{u}^1 \equiv \tilde{u}^{1\prime}|_{x_n=0} = -\gamma' u^0\,. \end{cases}$$

$$(P_\nu)^2 \quad \begin{cases} \partial_t u^2 + (u^0 + \varepsilon u^1 + \varepsilon u^2)\cdot\nabla u^2 - \nu\Delta u^2 + u^2\cdot\nabla(u^0 + \varepsilon u^1) + \nabla p^2 = -\varepsilon u^1\cdot\nabla u^1\,, \\ u^2|_{t=0} = 0\,, \end{cases}$$

$$(\tilde{P}_\nu)^2 \quad \begin{cases} \partial_t\tilde{u}^2 + (u^0 + \varepsilon u^1 + \tilde{u}^1 + \varepsilon u^2 + \varepsilon\tilde{u}^2)\cdot\nabla\tilde{u}^2 - \nu\Delta\tilde{u}^2 + \varepsilon\nabla\tilde{p}^2 \\ \qquad + \tilde{u}^2\cdot\nabla(u^0 + \varepsilon u^1 + \hat{u}^1 + \varepsilon u^2) = -\tilde{u}^1\cdot\nabla u^1 - r P^\infty e_0 \tilde{h}^1\,. \\ \tilde{u}^2|_{t=0} = 0 \\ \tilde{h}^1 = {}^t(0,\, -\partial_n^{-1}\nabla'\cdot\tilde{v}^{1\prime} + (u^0 + \varepsilon u^1 + \tilde{u}^1)\cdot\nabla\tilde{u}^1_n + \hat{u}^1\cdot\nabla u^0_n) \quad (\text{後述})\,, \end{cases}$$

$$(P_\nu)^2 - (\tilde{P}_\nu)^2 \quad \begin{cases} \nabla\cdot(u^2 + \tilde{u}^2) = 0\,, \\ \gamma(u^2 + \tilde{u}^2) = -{}^t(\gamma' u^1, 0)\,. \end{cases}$$

我々の結果は、次節の記号を用いて次のように表される。

定理. $u_0 \in H^{\ell,\rho_0,\theta_0}_a$, $\ell > \frac{n-1}{2} + 1 + 2$, $\rho_0 > 0$, $0 < \theta_0 < \pi/4$, $a > 0$, かつ u_0 は条件 (I) をみたすとする。このときある $T > 0$ が

存在して，(P_ν) の解 $u(\nu,t,x)$ で (1.1) の形をもつものが $(\nu,t) \in (0,1]\times[0,T]$ に対して（唯1つ）存在する。しかも (1.1) の各項は次の条件をみたす：

$$u^0(\nu,t,x) \in \overset{0}{K}{}^{\ell,\rho_0,\theta_0}_{a,\beta_0,T},$$

$$u^1(\varepsilon,t,x) \in K^{\ell-1,\rho_0,\theta_0}_{a,\beta_1,T},$$

$$\tilde{u}^1(\varepsilon,t,x) \equiv \begin{pmatrix} \tilde{u}^{1\prime}(\varepsilon,t,x',x_n) \\ \tilde{u}^1_n(\varepsilon,t,x',x_n) \end{pmatrix} \in K^{\ell-1,\rho_0,\theta_0,(\mu)}_{a/\varepsilon,\beta_1,T},$$

$$u^2(\varepsilon,t,x) \in K^{\ell-2,\rho_0,\theta_0}_{a,\beta_2,T},$$

$$\tilde{u}^2(\varepsilon,t,x) \equiv \begin{pmatrix} \tilde{u}^{2\prime}(\varepsilon,t,x',x_n) \\ \tilde{u}^2_n(\varepsilon,t,x',x_n) \end{pmatrix} \in K^{\ell-2,\rho_0,\theta_0}_{a/\varepsilon,\beta_2,T}.$$

ただし，$0<\beta_0<\beta_1<\beta_2$，$\mu>0$．

§2. 抽象的 Cauchy-Kowalewski 定理と関数空間

$\{X_\rho\,;\,0\le\rho\le\rho_0\}$ を Banach scale，すなわち Banach 空間 X_ρ（ノルムを $|\ |_\rho$ で表す）の族で，次の性質をもつものとする：

(2.1) $\quad 0\le\rho'\le\rho\le\rho_0$ のとき $X_{\rho'}\supset X_\rho$ かつ $|\ |_{\rho'}\le|\ |_\rho$．

次のような関数族を定義する：

(2.2) $\quad X_{\rho,T}=\{u(t):[0,T]\to X_\rho$ 連続関数$\}$，

$$|u|_{\rho,T}=\sup_{0\le t\le T}|u(t)|.$$

(2.3) $\quad Y_{\rho,\beta}=\{u(t):[0,T]\ni t\longmapsto u(t)\in X_{\rho-\beta t}$ (左)連続関数$\}$，

$$\|u\|_{\rho,\beta} = \sup_{0\le t\le T} |u(t)|_{\rho-\beta t} \qquad (0 < T \le \rho/\beta),$$

$$Y_{\rho,\beta}(R) = \{ u(t) \in Y_{\rho,\beta} ;\ \|u\|_{\rho,\beta} \le R \}.$$

$u(t)$ の定義域を明示したい場合は，$Y_{\rho,\beta,T}$，$Y_{\rho,\beta,T}(R)$ と書くことにする。

次の性質をみたす写像 $F(\varepsilon,t,u(\cdot))$ を考えよう：

(F.1) $F(\varepsilon,t,u(\cdot))$ は $[0,1]\times[0,\tau]\times Y_{\rho,\beta,\tau}(R)$ から $Y_{\rho',\beta,\tau}$ への連続写像，ただし $0 \le \rho' < \rho \le \rho_0 - \beta\tau$，$\beta \ge 0$，$\tau \le T_0$.

(F.2) $u, v \in Y_{\rho,\beta}$，$\beta \ge \beta_0 \ge 0$ のとき $\rho' < \rho(s) < \rho - \beta t \le \rho_0 - \beta_0 t$ に対して次の評価式が成立つ

$$|F(\varepsilon,t,u(\cdot)) - F(\varepsilon,t,v(\cdot))|_{\rho'}$$
$$\le \int_0^t C\,|u(s) - v(s)|_{\rho(s)} / (\rho(s) - \rho')\, ds,$$

(F.3) $|F(\varepsilon,t,0)|_{\rho_0-\beta_0 t} \le R_0 < R$.

この $F(\varepsilon,t,u(\cdot))$ に対して，次の（非線形）方程式を考える。

(E.4) $\quad u(t) = F(\varepsilon,t,u(\cdot))$，$0 \le t \le T \ (\le T_0)$.

これは parameter ε を含み，時間 t について正規型であるような 1 階偏微分方程式系（Kowalewskian system）を，t に関する Volterra 型積分方程式に書きかえたものの一般化である。この一般化は，実際に必要な一般化である。

定理 ACK（抽象的 Cauchy-Kowalewski 定理）．条件 (F.1)，(F.2) および (F.3) の下で，ある $\beta > \beta_0$ と $T < T_0$ が存在して，

方程式 (2.4) は $Y_{\rho_0,\beta,T}(R)$ において唯1つの解 $u(\varepsilon,t)$ をもつ。ただし $0<T\le\rho_0/\beta$。また $u(\varepsilon,t)$ は $[0,1]\times[0,T]\ni(\varepsilon,t)\longmapsto Y_{\rho_0,\beta}(R)$ の連続写像である。β は次のように選べばよい:

$$\beta = \max\{4\beta_0/3,\ 8Ce,\ 16Ce^2R_0/(R-R_0)\}. \tag{2.5}$$

証明は、次の補助的ノルムを利用してなされる:

$$\|u\|_\beta = \sup_{0\le t\le T,\ 0\le\rho\le\rho_0-\beta t} |u(t)|_\rho\ \varphi\left(\frac{\beta t}{\rho_0-\rho}\right),\quad \varphi(t)=(1-t)e^{-t},$$

$$\|u\|_\beta \le \|u\|_{\rho_0,\beta} \le (1-\beta'/\beta)^{-1}e\|u\|_{\beta'},\quad \beta>\beta'\ge 0. \tag{2.6}$$

(F.2) を用いると、$u,v\in Y_{\rho_0,\beta}(R)$, $\beta\ge\beta_0$, に対して,

$$\|F(\varepsilon,t,u(\cdot))-F(\varepsilon,t,v(\cdot))\|_\beta \le (2Ce/\beta)\|u-v\|_\beta$$

が成立つ。(2.5) をみたす β をとり,

$$u_0(\varepsilon,t) = F(\varepsilon,t,0),$$

$$u_{n+1}(\varepsilon,t) = F(\varepsilon,t,u_n(\varepsilon,\cdot))\quad (n\ge 0),$$

$$\beta_n = \beta(1-2^{-n-1}) \iff \beta-\beta_n = \beta 2^{-n-1}$$

とおくと、次の評価式を得る:

$$\|u_{n+1}-u_n\|_{\beta_n} \le (2Ce/\beta_n)\|u_n-u_{n-1}\|_{\beta_n},$$

$$\begin{aligned}\|u_{n+1}-u_n\|_{\rho_0,\beta} &\le (1-\beta_n/\beta)^{-1}e\|u_{n+1}-u_n\|_{\beta_n}\\ &= 2^{n+1}e\|u_{n+1}-u_n\|_{\beta_n}\\ &\le 2^{n+1}e(2Ce/\beta_n)^n\|u_1-u_0\|_{\beta_n}\\ &\le 8/3e(4Ce/\beta)^n\|u_1-u_0\|_{\beta_1}.\end{aligned}$$

これから $\{u_n(\varepsilon,t)\}$ が $Y_{\rho_0,\beta}(R)$ における収束列 ($\varepsilon\in[0,1]$ につ

き一様収束）であることが示される。

以下で記号と関数空間を導入する。簡単のため $n=3$ とする。

① $I(\rho) = (-\rho, \rho)$

$D(\rho)^2 = \mathbb{R}^2 + \sqrt{-1}\, I(\rho)^2$

$= \{ z' = x' + i y' ;\ x' = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ y' = (y_1, y_2) \in I(\rho)^2 \}$,

$\Sigma(\theta, a) = \Sigma_1(\theta, a) \cup \Sigma_2(\theta, a)$, $0 < \theta < \pi/4$, $a > 0$,

$\Sigma_1(\theta, a) = \{ z_3 = x_3 + i y_3 ;\ |y_3| \le x_3 \tan\theta,\ 0 \le x_3 \le a \}$,

$\Sigma_2(\theta, a) = \{ z_3 = x_3 + i y_3 ;\ |y_3| \le a \tan\theta,\ x_3 \ge a \}$,

$\Omega(\rho, \theta, a) = D(\rho)^2 \times \Sigma(\theta, a)$,

$L(y') = \mathbb{R}^2 + \sqrt{-1}\, y' \subset D(\rho)^2$,

$L(\theta', a) = L_1(\theta', a) \cup L_2(\theta', a) \subset \Sigma(\theta, a) \quad (0 \le \theta' \le \theta)$,

$L_1(\theta', a) = \{ z_3 = x_3 + i y_3 ;\ y_3 = \pm x_3 \tan\theta',\ 0 \le x_3 \le a \}$,

$L_2(\theta', a) = \{ z_3 = x_3 + i y_3 ;\ y_3 = \pm a \tan\theta',\ x_3 \ge a \}$.

② Banach空間 X（ノルムを $|\ |_X$）に対し、$B^k([0,T]; X)$ は $[0,T]$ から X への（強位相で）k 回（有界）連続的微分可能関数の全体を表わす。$B^k([0,T]; X)$ のノルムは、

$$|f|_{X,k,T} = \sum_{j=0}^{k} \sup_{0 \le t \le T} |\partial_t^j f(t)|_X < \infty .$$

$[0,T]$ を $\Sigma(\theta, a)$ ないし $\Delta_T = [0,1] \times [0,T]$ でおきかえたものを、$B^k(\Sigma(\theta, a); X)$ ないし $B^k(\Delta_T; X)$ で表わす。

②' Banach scale $\{X_\rho ; 0 \le \rho \le \rho_0\}$ （ノルムを $|\ |_\rho$）に対して、
次のノルムにより $B^k_\beta([0,T]; X_\rho)$ を定義する：

$$|f|_{\rho,k,\beta,T} = \sum_{j=0}^{k} \sup_{0 \le t \le T} |\partial_t^k f(t)|_{\rho-\beta t} .$$

$B^k_\beta(\Delta_T ; X_\rho) = \bigcap_{j=0}^{k} B^j([0,1]; B^{k-j}([0,T]; X_\rho))$ とする。

③ $H'^{l,\rho} \ni f \iff$ (i) $f(x'+iy')$ は $D(\rho)^2$ で解析的,

(ii) $\partial_1^{\alpha_1}\partial_2^{\alpha_2} f \in L^2(L(y'))$, $\alpha_1+\alpha_2 \le l$, $y' \in I(\rho)^2$,

(iii) $|f|_{l,\rho} = \sum_{\alpha_1+\alpha_2 \le l} \sup_{y' \in I(\rho)^2} |\partial_1^{\alpha_1}\partial_2^{\alpha_2} f(\cdot + iy')|_{L^2(\mathbb{R}^2)} < \infty$.

④ $H_a^{l,\rho,\theta} \ni f \iff$ (i) $f(z', z_3)$ は $\Omega(\rho,\theta,a)$ の内部で解析的,

(ii) $\partial^\alpha f(x'+iy', z_3) \in B^0(\Sigma(\theta,a); H'^{0,\rho})$, $|\alpha| = \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 \le l$,

(iii) $|f|_{l,\rho,\theta} = \sum_{|\alpha| \le l} \sup_{z_3 \in \Sigma(\theta,a)} |\partial^\alpha f(\cdot, z_3)|_{0,\rho} < \infty$.

④' $H_a^{l,\rho,\theta,(\mu)} \ni f$ $(\mu \ge 0)$ $\iff$ (i) $f \in H_a^{l,\rho,\theta}$,

(ii) $|f|_{l,\rho,\theta,(\mu)} = \sum_{|\alpha| \le l} \sup_{z_3 \in \Sigma(\theta,a)} |e^{\mu x_3} \partial^\alpha f(\cdot, z_3)|_{0,\rho} < \infty$.

⑤ $K'^{l,\rho}_{\beta,T} = \bigcap_{j=0}^{[l/2]} B^j_\beta([0,T]; H'^{l-2j,\rho})$,

$$|f|_{l,\rho,\beta,T} = \sum_{j=0}^{[l/2]} \sup_{0 \le t \le T} |\partial_t^j f(t,\cdot)|_{l-2j,\rho-\beta t} .$$

$\mathcal{K}'^{l,\rho}_{\beta,T} = \bigcap_{k=0}^{l} B^k([0,1]; K'^{l-k,\rho}_{\beta,T})$.

⑥ $K^{l,\rho,\theta}_{a,\beta,T} = \bigcap_{j=0}^{[l/2]} B^j_\beta([0,T]; H_a^{l-2j,\rho,\theta})$,

$$|f|_{l,\rho,\theta,\beta,T} = \sum_{j=0}^{[l/2]} \sup_{0\le t\le T} |\partial_t^j f(t,\cdot)|_{l-2j,\rho-\beta t,\theta-\beta t},$$

$$\mathcal{K}^{l,\rho,\theta}_{a,\beta,T} = \bigcap_{k=0}^{l} B^k([0,1];\ K^{l-k,\rho,\theta}_{a,\beta,T}).$$

⑥ $$K^{l,\rho,\theta,(\psi)}_{a,\beta,T} = \bigcap_{j=0}^{[l/2]} B^j_\beta([0,T];\ H^{l-2j,\rho,\theta,(\psi)}_a),$$

$$|f|_{l,\rho,\theta,(\psi),\beta,T} = \sum_{j=0}^{[l/2]} \sup_{0\le t\le T} |\partial_t^j f(t,\cdot)|_{l-2j,\rho-\beta t,\theta-\beta t,(\psi)},$$

$$\mathcal{K}^{l,\rho,\theta,(\psi)}_{a,\beta,T} = \bigcap_{k=0}^{l} B^k([0,1];\ K^{l-k,\rho,\theta,(\psi)}_{a,\beta,T}).$$

⑦ $$\mathring{\mathcal{K}}^{l,\rho,\theta}_{a,\beta,T} = \bigcap_{k=0}^{[l/2]} B^k([0,1];\ K^{l-2k,\rho,\theta}_{a,\beta,T}),\quad ([0,1]\ni\nu).$$

§3. 作用素

我々は§1の5個のN-S方程式の解を，それぞれ特別な形に書き下す。その後に定理ACKを用いて，必要な性質を導く。そのためかなり多数の作用素を補助的に用いるので，ここで一括して説明する。$n=3$とし，積分核の形は大体省略する。

① r = $\mathbb{R}^3$の関数の$\mathbb{R}^3_+$への制限，

e = $\mathbb{R}^3_+$の関数の$\mathbb{R}^3$への延長； $ef(x',x_3)=0$，$x_3<0$，

e_0 = $\mathbb{R}^3_+(D(\rho)\times\Sigma(\theta,a))$から$\mathbb{R}^3(D(\rho)\times\{\Sigma(\theta,a)\cup(-\Sigma(\theta,a/2)\})$

への"nice extension" i.e., 滑かさを保つ延長，

γ = $\mathbb{R}^3_+$（又は$\mathbb{R}^3$）の関数の"$x_3=0$"への制限（跡束）．

② $$U_0(\nu,t,x) = (4\pi\nu t)^{-3/2}\, e^{-|x|^2/4\nu t},$$

$$U_0(\nu,t)f(x) = \int_{\mathbb{R}^3} U_0(\nu,t,x-\eta) f(\eta)\, d\eta,$$

$$U_0(\nu) f(t,\cdot) = \int_0^t U_0(\nu, t-s) f(s,\cdot)\, ds,$$

$$U_0'(\nu,t,x') = (4\pi\nu t)^{-1}\, e^{-|x'|^2/4\nu t},$$

$$\bar{U}_0(\nu,t,x',x_3) = U_0'(\nu,t,x')\,(4\pi t)^{-1/2}\, e^{-x_3^2/4t},$$

$\bar{U}_0(\nu,t)$, $\bar{U}_0(\nu)$ は $U_0(\nu,t)$, $U_0(\nu)$ と同様に定義する。

③ N および D を，$\mathbb{R}^3_+$ における Laplacian Δ に対する Neumann 問題および Dirichlet 問題の Poisson operator とする；i.e.,

$$\Delta N\varphi = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^3_+, \qquad \gamma\partial_3 N\varphi = \varphi \quad \text{on } \mathbb{R}^2,$$

$$\Delta D\varphi = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^3_+, \qquad \gamma D\varphi = \varphi \quad \text{on } \mathbb{R}^2, \qquad D = \partial_3 N.$$

④ $\mathbb{R}^2$ (又は $[0,\infty)\times\mathbb{R}^2$) 上の関数 $u(x')$ (又は $u(t,x')$) の Fourier 変換 (又は Fourier-Laplace 変換) を $\hat{u}(\xi')$ (又は $\tilde{u}(\lambda,\xi')$) と書く，

$$\hat{u}(\xi') = (2\pi)^{-1}\int_{\mathbb{R}^2} e^{-ix'\cdot\xi'}\, u(x')\, dx',$$

$$\tilde{u}(\lambda,\xi') = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, \hat{u}(t,\xi')\, dt.$$

⑤ $(Tu)^\wedge(\xi') = \sigma(T)(\xi')\,\hat{u}(\xi')$ (又は $(Tu)^\sim(\lambda,\xi') = \sigma(T)(\lambda,\xi')\,\tilde{u}(\lambda,\xi')$) により，作用素 T の symbol $\sigma(T)(\xi')$ (又は $\sigma(T)(\lambda,\xi')$) を定める．

$$\sigma(N)(\xi',x_3) = -e^{-|\xi'|x_3}/|\xi'|,$$

$$\sigma(D)(\xi',x_n) = e^{-|\xi'|x_3},$$

$$\sigma(U_0'(\nu,t))(\xi') = e^{-\nu t|\xi'|^2}, \quad \sigma(U_0'(\nu))(\lambda,\xi') = (\lambda+\nu|\xi'|^2)^{-1} .$$

⑥ 熱作用素 $\partial_t - \nu\Delta$ (又は $\partial_t - \nu\Delta' - \partial_3^2$) の Neumann (Dirichlet) 問題の Poisson operator を $P_1(\nu)$ ($P_2(\nu)$) (又は $\bar{P}_1(\nu)$ ($\bar{P}_2(\nu)$)) と書く,

$$\begin{cases} (\partial_t - \nu\Delta) P_j(\nu) g = 0, & t>0,\ x \in \mathbb{R}^3_+, \quad j=1,2, \\ P_j(\nu) g\,|_{t=0} = 0, & \\ \gamma\partial_3 P_1(\nu) g = g(t,x'), \quad \gamma P_2(\nu) g = g(t,x'), & t>0,\ x' \in \mathbb{R}^2, \end{cases}$$

$$P_2(\nu) = \partial_3 P_1(\nu), \qquad P_j(\nu) g(t,\cdot) = \int_0^t P_j(\nu, t-s) g(s)\, ds .$$

symbol に対して次の性質がある:

$$\sigma(P_1(\nu))(\lambda,\xi',x_3) = -e^{-\sqrt{\lambda/\nu+|\xi'|^2}\,x_3} / \sqrt{\lambda/\nu+|\xi'|^2} ,$$

$$\sigma(P_2(\nu))(\lambda,\xi',x_3) = e^{-\sqrt{\lambda/\nu+|\xi'|^2}\,x_3} ,$$

$$\sigma(\bar{P}_j(\nu))(\lambda,\xi',x_3) = e^{-\sqrt{\lambda+\nu|\xi'|^2}\,x_3} \left(-1/\sqrt{\lambda+\nu|\xi'|^2}\right)^{2-j}, \quad j=1,2 .$$

⑦ 作用素 $N' = {}^t(N_1, N_2)$, Λ', $\omega(\nu)$, $\tau(\nu)$ を次により定義する,

$$\sigma(N_j) = i\xi_j / |\xi'|, \quad j=1,2, \quad i=\sqrt{-1},$$

$$\sigma(\Lambda') = |\xi'|, \qquad \therefore\ \Lambda' = -\partial_1 N_1 - \partial_2 N_2 .$$

$$\sigma(\omega(\nu))(\lambda,\xi') = |\xi'| / \sqrt{\lambda/\nu+|\xi'|^2} ,$$

$$\sigma(\tau(\nu))(\lambda,\xi') = |\xi'| / \left(\sqrt{\lambda/\nu+|\xi'|^2} + |\xi'|\right) \equiv \sigma(\omega(\nu)) - \sigma(\tau_1(\nu)),$$

次のことが成立つ:

$$\sigma(\omega(\nu,t))(\xi') = \pi^{-1/2}\nu^{1/2}t^{-1/2}|\xi'|\,e^{-\nu t|\xi'|^2},$$

$$\sigma(\omega^2(\nu,t))(\xi') = \nu|\xi'|^2 e^{-\nu t|\xi'|^2}, \qquad \omega(\nu)\tau_1(\nu) = -\tau_1(\nu) .$$

⑧ $$Q^\infty = \mathrm{grad}\,\Delta^{-1}\mathrm{div}\,,\quad P^\infty = 1 - Q^\infty = -\mathrm{rot}\,\Delta^{-1}\mathrm{rot}\,,$$

$$P = \gamma P^\infty e_0 - \nabla N \gamma_n P^\infty e_0\,,\quad Q = 1_{\mathbb{R}^3_+} - P\,.$$

$1_{\mathbb{R}^3_+} = P + Q$ は Euler 方程式に付随する Helmholtz 分解。

$$\sigma(Q^\infty)(\xi) = ({}^t\xi\xi/|\xi|^2)\,,\quad \nabla\cdot Q^{(\infty)} = \nabla\cdot\,,\quad \nabla\cdot P^{(\infty)} = 0\,.$$

⑨ $$V(\nu,t) = P\gamma U_0(\nu,t)e_0 = \gamma P^\infty U_0(\nu,t)e_0 - \nabla N\gamma_n P^\infty U_0(\nu,t)e_0\,.$$

$V(\nu,t)$ は次の条件をみたし，$(P_\nu)^0$ の解法に用いられる：

$$\begin{cases} (\partial_t - \nu\Delta)V(\nu,t) + \nabla N\gamma_n P^\infty \partial_t U_0(\nu,t)e_0 = 0\,, \\ \nabla\cdot V(\nu,t) = 0\,, \\ V(\nu,0) = P\,, \\ \gamma_n V(\nu,t) = 0\,. \end{cases}$$

⑩ $$\bar{U}_1(\nu) = \gamma\bar{U}_0(\nu)e - \bar{P}_1(\nu)\gamma\partial_3\bar{U}_0(\nu)e\,,$$

$$\bar{U}_2(\nu) = \gamma\bar{U}_0(\nu)e - \bar{P}_2(\nu)\gamma\bar{U}_0(\nu)e = \gamma\bar{U}_0(\nu)e + \bar{P}_1(\nu)\gamma\partial_3\bar{U}_0(\nu)e\,.$$

$\bar{U}_j(\nu)$ は次をみたし，$(\tilde{P}_\nu)^1$ に適用される：

$$\begin{cases} (\partial_t - \nu\Delta' - \partial_3^2)\bar{U}_j(\nu)f = f(t,x',x_3)\,, \\ \bar{U}_j(\nu)f\,\big|_{t=0} = 0\,, \\ \gamma\,\partial_3^{2-j}\,\bar{U}_j(\nu)f = 0\,;\quad j = 1,2\,. \end{cases}$$

⑪ $$\Omega(\nu) = N'\omega(\nu)\,{}^tN'\,,$$

$$\mathcal{P}(\nu) = \mathcal{P}_1(\nu) + \mathcal{P}_0(\nu) + \mathcal{P}_2(\nu)\,,$$

$$\mathcal{P}_1(\nu) g = \nabla N g_n - \nabla N N' \cdot \tau(\nu)(1+\Omega(\nu))(g' + N' g_n),$$

$$\mathcal{P}_0(\nu) g = \nu \nabla \gamma U_0(\nu) e D \nabla' \cdot (1+\Omega(\nu))(g' + N' g_n),$$

$$\mathcal{P}_2(\nu) g = P_2(\nu) \begin{pmatrix} E' - \frac{1}{2}\omega(\nu)\tau(\nu) N' {}^t N' \\ \frac{1}{2}\omega(\nu) - \frac{1}{2}\omega(\nu)\tau(\nu) {}^t N' \end{pmatrix} (1+\Omega(\nu))(g' + N' g_n),$$

E' は $(2,2)$ 単位行列.

$u(\nu, t, x', x_3) = \mathcal{P}(\nu) g$ は，次の Stokes 方程式をみたす：

$$\begin{cases} (\partial_t - \nu\Delta) u + \nabla p = 0, & t>0, \ x \in \mathbb{R}^3_+, \\ \nabla \cdot u = 0, & \\ u|_{t=0} = 0, & \\ \gamma u = g, & t>0, \ x' \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

$\mathcal{P}_3(\nu) g$ のみが boundary layer であることに注意しよう。

補助定理 3.1. 上述の作用素は，上述の関数空間で次の性質（作用素ノルムの評価）をもつ。特に，ノルムの評価は，$a>0$ によらない。

(i) $U_0(\nu, t), \ \bar{U}_0(\nu, t), \ U_0'(\nu; t) = O(1)$,

$\varepsilon\Lambda' U_0(\nu; t), \ \varepsilon\Lambda' \bar{U}_0(\nu; t), \ \partial_3 \bar{U}_0(\nu; t), \ \varepsilon\Lambda' U_0'(\nu, t) = O(t^{-1/2})$,

(ii) $D = O(1), \quad N_j = O(1), \quad \nabla N = D\, {}^t(-N', 1) = O(1)$,

(iii) $\bar{P}_1(\nu; t) = (\varepsilon\Lambda')^{-1} \int_0^t \bar{P}_2(\nu, t-s)\, \omega(\nu, s)\, ds = O(t^{-1/2})$,

$(\varepsilon\Lambda')^{\kappa} \bar{P}_1(\nu; t) = O(t^{-1/2-\kappa/2}), \quad \kappa \geq 0$,

(iv) $(\varepsilon\Lambda')^{-\kappa} \omega(\nu, t), \ (\varepsilon\Lambda')^{-\kappa} \tau(\nu, t) = O(t^{-1+\kappa/2}), \quad 0 \leq \kappa \leq 1$,

(v) $Q^{\infty} = O(1)$, $P^{\infty} = O(1)$.

(vi) $\mathcal{P}_1(\nu) g - \nabla N g_n = \int_0^t p_1(\nu, t-s) g(s)\, ds$, $(\varepsilon\Lambda')^{-\kappa} p_1(\nu, t) = O(t^{-1+\kappa/2})$

$\mathcal{P}_0(\nu) g = \int_0^t p_0(\nu, t-s) g(s)\, ds$, $(\varepsilon\Lambda')^{-\kappa} p_0(\nu, t) = O(t^{-1+\kappa/2})$,

$\mathcal{P}_2(\nu) g - P_2(\nu)\begin{pmatrix} g' + N' g_n \\ 0 \end{pmatrix} = \int_0^t p_2(\nu, t-s) g(s)\, ds$,

$(\varepsilon\Lambda')^{-\kappa} p_3(\nu, t) = O(t^{-1+\kappa/2})$, $0 \le \kappa \le 1$.

(vii) $\bar{P}_2(\nu) \gamma \bar{U}_0(\nu) = -\bar{P}_1(\nu) \gamma \partial_3 \bar{U}_0(\nu) = \bar{\pi}_2(\nu, t) *_t$, $\bar{\pi}_2(\nu, t) = O(1)$.

最後に，1階1次の微分作用素の作用素ノルム評価を与える。これにより定理ACKが適用可能となる。

補助定理 3.2. $f(z)$ は $D(\rho) = \mathbb{R} + \sqrt{-1}\, I(\rho)$ で解析的，かつ

$$|f|_\rho = \sup_{y \in I(\rho)} |f(\cdot + iy)|_{L^2(\mathbb{R})} < \infty$$

とする。このとき次のことが成立つ。

(i) $\Gamma_{\rho'} = \{ \zeta = \xi + i\eta \,;\, \xi \in \mathbb{R},\ \eta = \pm\rho' \}$, $0 \le \rho' < \rho$, とおくと，

$$\partial_x f(x+iy) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\rho'}} f(\zeta)/(\zeta - x - iy)^2\, d\zeta, \quad y \in I(\rho').$$

(ii) $|\partial_x f|_{\rho'} \le |f|_\rho / (\rho - \rho')$.

補助定理 3.3. $f(z)$ は $\Sigma(\theta, a)$ 内で（Banach空間の値をとる）解析関数，かつ $|f|_\theta = \sup_{z \in \Sigma(\theta, a)} |f(z)| < \infty$ とする。このとき：

(i) $$\partial_z f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(\theta'', a)} f(\zeta)/(\zeta - z)^2\, d\zeta, \quad z \in \Sigma(\theta', a),$$

$\Gamma(\theta'', a) = L(\theta'', a) \cup L(-\theta'', a)$, $|\theta'| < \theta'' \le \theta$,

(iii) $\chi(z) = \min\{|z|, a\}$ とおくと，a によらぬ $C(\theta_0)$ が存在し，

$$|\chi(\cdot)\partial_z f|_{\theta'} \le C(\theta_0)|f|_\theta/(\theta-\theta'),\quad 0 \le \theta' < \theta \le \theta_0 \;(<\pi/4),$$

$$|\chi(\cdot)\partial_z f|_{\theta',(\mu)} \le C(\theta_0)|f|_{\theta,(\mu)}/(\theta-\theta') + \mu|f|_{\theta',(\mu)},\quad \mu \ge 0.$$

§4. $u^0(\nu, t, x)$ の解法.

我々は $(P_\nu)^0$ の解のうち，§3-⑨ の $V(\nu, t)$ を用いて

(4.1) $$u^0(\nu,t) = V(\nu,t)u_0 - \int_0^t V(\nu, t-s)\, u^0(\nu,s)\cdot\nabla u^0(\nu,s)\,ds$$

と書けるものを求める。$l > (n-1)/2 + 3$，$\rho_0 > 0$，$0 < \theta_0 < \pi/4$ とし，

$$X_{\rho,\theta} = H_a^{l,\rho,\theta} \quad (\text{又は } X_\rho = H_a^{l,\rho,\theta_0\rho/\rho_0})\quad 0 \le \rho \le \rho_0,\ 0 \le \theta \le \theta_0$$

とおく。

$$G(u) = u\cdot\nabla u,\quad u \in \overset{\circ}{X}_{\rho,\theta} = \{u \in X_{\rho,\theta};\ \gamma_n u = 0\}$$

に，Sobolevの補題と補助定理 3.2 - 3.3 を用いて，

$$|G(u)|_{l,\rho',\theta'} \le C_0|u|_{l,\rho',\theta'}\{|u|_{l,\rho,\theta'}/(\rho-\rho') + |u|_{l,\rho',\theta}/(\theta-\theta')\}$$

$$|G(u)-G(v)|_{l,\rho',\theta'} \le C_0(|u|_{l,\rho,\theta} + |v|_{l,\rho,\theta})\times$$

$$\times\{|u-v|_{l,\rho,\theta'}/(\rho-\rho') + |u-v|_{l,\rho',\theta}/(\theta-\theta')\}$$

$$0 \le \rho' < \rho \le \rho_0,\quad 0 \le \theta' < \theta \le \theta_0,\quad C_0 = C(\theta_0, \mu).$$

が成立つ。さらに補助定理3.1を用いると，

$$\overset{\circ}{Y}_{\rho,\theta,\beta} \ni u \longmapsto F(\nu,t,u(\cdot)) = V(\nu,t)u_0 - \int_0^t V(\nu,t-s)u(s)\cdot\nabla u(s)\,ds$$

$\overset{\circ}{Y}_{\rho,\theta,\beta}$ は (2.3) で X_ρ を $\overset{\circ}{X}_{\rho,\theta}$ でおきかえたもの，

は，適当に $0 < R_0 < R$ をとると，定理ACKの仮定 (F.1) - (F.3)

をすべてみたす。（$C=C(R,C_0)$ となる。）故に次の定理を得る。

定理 4.1. ある $T_0>0$, $\rho_0>0$（$T_0 \le \rho_0/\beta_0$ かつ $T_0 \le \theta_0/\beta_0$）が存在して，(4.1) の唯1つの解 $u^0 \in K^{l,\rho_0,\theta_0}_{\alpha,\beta_0,T_0}$ が存在する。かつ $u^0 \in \overset{0}{K}{}^{l,\rho_0,\theta_0}_{\alpha,\beta_0,T_0}$.

§5. $u^1(\varepsilon,t,x)$ と $\tilde{u}^1(\varepsilon,t,x',x_3/\varepsilon)$ の解法

境界層 $\tilde{u}^1$ に対する方程式を書き直すため，$x_3 \to \varepsilon x_3$ ($\varepsilon=\sqrt{\nu}$) の変数変換を行なう。このとき $\partial_3 \to \frac{1}{\varepsilon}\partial_3$ となるので，これに合せて，従属変数も変換する。

$$(5.1)\qquad \bar{u}^j(t,x',x_3) = \begin{pmatrix} u^{j\prime}(t,x',\varepsilon x_3) \\ \frac{1}{\varepsilon} u^j_3(t,x',\varepsilon x_3) \end{pmatrix}, \quad j=0,1,$$

$$\tilde{u}^1(t,x',x_3) = \begin{pmatrix} \tilde{u}^{1\prime}(t,x',x_3) \\ \tilde{u}^1_3(t,x',x_3) \end{pmatrix}.$$

$\tilde{u}^1(t,x',x_3/\varepsilon)$ の本来の形は，(1.1) のように法線成分 $=O(\varepsilon)$ なのであるが，上のように書いても誤解はないであろう。この方が，$\nabla\cdot\bar{u}^i=0$, $\nabla\cdot\tilde{u}^1=0$ などの記述に便利でもある。(5.1) の変換後に，方程式 $(\tilde{P}_\nu)^1$ は次のようになる：

$$(5.2)\quad \begin{cases} \partial_t \tilde{u}^{1\prime} + (\bar{u}^0+\varepsilon\bar{u}^1+\tilde{u}^1)\cdot\nabla\tilde{u}^{1\prime} - (\nu\Delta'+\partial_3^2)\tilde{u}^{1\prime} + \tilde{u}^1\cdot\nabla\bar{u}^{0\prime} = 0, \\ \partial_3\tilde{u}^1_3 = -\nabla'\cdot\tilde{u}^{1\prime}, \qquad \tilde{u}^{1\prime}\big|_{t=0} = 0, \\ \gamma\tilde{u}^{1\prime} = -\gamma' u^0 \equiv -\gamma u^{0\prime}. \end{cases}$$

$(P_\nu)^1$ と (5.2) の解を，次の形で求めよう（$v^1, \tilde v^{1\prime}$ を求める）：

$$(5.3)\quad \begin{cases} u^1(\varepsilon,t) = V(\nu)\,v^1 + \nabla N\gamma\,\partial_3^{-1}\nabla'\cdot\tilde u^{1\prime}, \\ \tilde u^{1\prime}(\varepsilon,t) = \bar U_2(\nu)\,\tilde v^{1\prime} - \bar P_2(\nu)\gamma\,u^{0\prime}, \\ \tilde u^1_3 = -\partial_3^{-1}\nabla'\cdot\tilde u^{1\prime} \equiv \int_{x_3}^{\infty}\nabla'\cdot\tilde u^{1\prime}(\varepsilon,t,x',\eta_3)\,d\eta_3 . \end{cases}$$

この形の u^1 と $\tilde u^1$ は方程式系の第2－第4条件をみたす。故れ第1条件（方程式）をみたすよう v^1 と $\tilde v^{1\prime}$ を定めればよい。

$f\in H_a^{\ell,\rho,\theta,(\mu)}$ なら $\partial_3^{-1}f\in H_a^{\ell,\rho,\theta,(\mu)}$ であること，および

$$(5.4)\quad \begin{cases} \bar P_2(\nu)\gamma u^{0\prime} = \bar\pi_2(\nu,t)\,(\bar P^{\infty\prime}-N'\bar P^{\infty}_3)\,e_0\bar u_0 - \bar\pi_2(\nu)\,(\bar P^{\infty\prime}-N'\bar P^{\infty}_3)\overbrace{[\bar u^0\cdot\nabla\bar u^0]}^{(e_0)}, \\ P^{\infty} = \begin{pmatrix} P^{\infty\prime} \\ P^{\infty}_3 \end{pmatrix},\ P^{\infty}_3 = 1-\partial_3\Delta^{-1}\mathrm{div}.\ \bar\pi_2(\nu,t)\text{ は補助定理 3.1(ii)}, \\ \partial_3^{-1}\nabla'\cdot\tilde u^{1\prime} = \{\gamma\,\partial_3^{-1}\bar U_0(\nu)e - \bar P_1(\nu)\gamma\bar U_1(\nu)e\}\nabla'\cdot\tilde v^{1\prime} - \bar P_1(\nu)\gamma\,\nabla'\cdot u^{0\prime}, \end{cases}$$

に注意する。(5.3) を $(P_\nu)^1$ と (5.2) の第1式に代入すると，v^1 と $\tilde v^{1\prime}$ に対する方程式が得られる：

$$(5.5)\quad v^1(t) + u^0\cdot\nabla V(\nu)v^1 + [u^0\cdot\nabla,\nabla]N\gamma\,\partial_n^{-1}\nabla'\cdot\tilde u^{1\prime} = 0,$$

$$\begin{aligned}(5.6)\quad \tilde v^{1\prime}(t) &+ (\bar u^0+\varepsilon\bar u^1+\tilde u^1)'\cdot\nabla'\bar U_2(\nu)\tilde v^{1\prime} + (\bar u^0_3+\bar u^1_3+\tilde u^1_3)\,\partial_3\bar U_2(\nu)\tilde v^{1\prime} \\ &+ \tilde u^{1\prime}\cdot\nabla'\bar u^{0\prime} + \tilde u^1_3\,\partial_3 u^{0\prime} - (\bar u^0+\varepsilon\bar u^1+\tilde u^1)'\cdot\nabla'\bar P_2(\nu)\gamma u^{0\prime} \\ &- (\bar u^0_3+\bar u^1_3+\tilde u^1_3)\,\partial_3\bar P_2(\nu)\gamma u^{0\prime} = 0.\end{aligned}$$

〜部分が ∇v^1 の（Volterra型）1次式，≈部分が $\nabla\tilde v^{1\prime}$ の1次式である。特に

$$\begin{aligned}(5.7)\quad \bar u^0_3\,\partial_3\bar U_2(\nu)\tilde v^{1\prime} &= [\gamma\,\partial_3\bar U_0(\nu)e_0,\ \bar u^0_3]\,\tilde v^{1\prime} + \gamma\bar U_0(\nu)e_0(\partial_3\bar u^0_3)\,\tilde v^{1\prime} \\ &+ \gamma\bar U_0(\nu)e_0\,\bar u^0_3\,\partial_3\tilde v^{1\prime} + \bar u^0_3\,\partial_3\bar P_1(\nu)\gamma\,\partial_3\bar U_0(\nu)e_0\tilde v^{1\prime},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(5.8)\quad &|\bar u^0_3(\nu,t,x)| \le \min\{\sup|u^0_3|/\varepsilon,\ x_3\sup|\partial_3u^0_3|\}, \\ &|\bar u^0_3(\nu,t,x)-\bar u^0_3(\nu,t,\eta)| \le |x'-\eta'|/\varepsilon\,\sup|\nabla'u^0_3| + |x_3-\eta_3|\sup|\partial_3u^0_3|.\end{aligned}$$

従って $H^{\ell-j,\rho,\theta,(\mu)}_{a/\varepsilon}$ で（$L(\theta', a/\varepsilon) \subset \mathcal{L}(\rho,\theta,a/\varepsilon)$ を用いて）

(5.9) $$|\bar{u}^0_3(t)\partial_3\tilde{v}^{1'}|_{\ell-j,\rho',\theta',(\mu)} \le C_0(\theta_0,\mu)|u^0_3|_{\ell,\rho_0,\theta_0,\beta_0}|\tilde{v}^{1'}|_{\ell-j,\rho',\theta,(\mu)}/(\theta-\theta'),$$

$$0 \le \theta' < \theta \le \theta_0 - \beta_0 t,\quad 0 \le \rho' \le \rho_0 - \beta_0 t,\quad 1 \le j \le \ell.$$

$w^1(t) = {}^t(v^1(t), \tilde{v}^{1'}(t))$ とおくと，(5.5)-(5.6) は，

(5.10) $$w^1(t) = F^1(\varepsilon, t, w^1(\cdot))$$

と書けて，定理ACKの条件 (F.1)-(F.3) をみたす。u^1 は $\nabla'\cdot\tilde{v}^{1'}$ を含むが，$\varepsilon\nabla'\cdot\tilde{u}^{1'}$ は $\tilde{v}^{1'}$ の1次式で書けるので，εu^1 は $\tilde{v}^{1'}$ と εv^1 の連続な1次写像であることに注意しよう。ある $\beta_1 > \beta_0$ と $0 < T_1 \le T_0$ に対して，(5.10) の解 $w^1 \in K^{\ell-1,\rho_0,\theta_0}_{a,\beta_1,T_1} \times K^{\ell-1,\rho_0,\theta_0,(\mu)}_{a/\varepsilon,\beta_1,T_1}$ が唯1つ存在する。故に次の定理を得る。

定理5.1. ある $\beta_1 > \beta_0$ と $0 < T_1 < T_0$（$T_1 \le \rho_0/\beta_1$ かつ $T_1 \le \theta_0/\beta_1$）に対して，$(P_\nu)^1$ および (5.2) の解 $(u^1, \tilde{u}^1) \in K^{\ell-1,\rho_0,\theta_0}_{a,\beta_1,T_1} \times K^{\ell-1,\rho_0,\theta_0,(\mu)}_{a/\varepsilon,\beta_1,T_1}$ が存在する。このとき $(u^1, \tilde{u}^1) \in \mathcal{K}^{\ell-1,\rho_0,\theta_0}_{a,\beta_1,T_1} \times \mathcal{K}^{\ell-1,\rho_0,\theta_0,(\mu)}_{a/\varepsilon,\beta_1,T_1}$!

（注1） $\tilde{u}^1_3 = -\partial_3^{-1}\nabla'\cdot\tilde{u}^{1'} \equiv \tilde{F}^1_3(\varepsilon, t, \tilde{v}^{1'}(\cdot))$（(5.4) 参照）と書けて (F.1)-(F.3) をみたすので，$\tilde{u}^1_3 \in \mathcal{K}^{\ell-1,\rho_0,\theta_0,(\mu)}_{a/\varepsilon,\beta_1,T_1}$ が導びかれる。

（注2） 方程式 (5.2) から $O(\varepsilon)$ の項を落すことを考える。

$$\bar{u}^1_3(t,x) = u^1_3(t,x',0) + u^1_3(t,x',\varepsilon x_3) - u^1_3(t,x',0) = \gamma u^1_3 + O(\varepsilon),$$

$$\tilde{u}^1_3(t,x) + \gamma u^1_3 = -\partial_3^{-1}\nabla'\cdot\tilde{u}^{1'} - \gamma\tilde{u}^1_3 = -\int_0^{x_3}\nabla'\cdot\tilde{u}^{1'}(t,x',\eta)\,d\eta \equiv -\partial_{3,0}^{-1}\nabla'\cdot\tilde{u}^{1'}$$

に注意して，$\tilde{u}^{1'}$ について閉じた方程式を得ることができる：

$$
(5.2)' \quad \begin{cases} \partial_t \tilde{u}^{1'} + (\bar{u}^0 + \tilde{u}^1)' \cdot \nabla' \tilde{u}^{1'} + (\bar{u}_3^0 + \partial_{3,0}^{-1} \nabla' \cdot \tilde{u}^{1'}) \partial_3 \tilde{u}^{1'} - (\nu \Delta' + \partial_3^2) \tilde{u}^{1'} + \tilde{u}^{1'} \cdot \nabla' \bar{u}^{0'} = 0, \\ \tilde{u}^{1'}|_{\tau=0} = 0 \\ \gamma \tilde{u}^{1'} = -\gamma u^{0'}. \end{cases}
$$

(5.3) で定義された $\tilde{u}^{1'}$ を $(5.2)'$ に代入すれば，$\tilde{v}^{1'}$ に対する閉じた方程式が得られ，定理 ACK を用いて解 $\tilde{v}^{1'}$ の存在，従って $(5.2)'$ の解 $\tilde{u}^{1'} \in K^{l-1, \rho_0, \theta_0, (H)}_{a/\varepsilon, \beta_1, T_1}$ の存在を示すことができる。このとき $(P_\nu)^1$ は u^1 に対する線形方程式で，u^0 と同様な手続きで存在を示すことができる。方程式 $(5.2)'$ は Plandtl の境界層方程式と少し異なる非線形方程式であるが，厳密解に対応するものであるから，より情報を含んでいるかもしれない。

§6. $u^2(\varepsilon, t, x)$ と $\tilde{u}^2(\varepsilon, t, x', x_3/\varepsilon)$ の解法.

まず $u^2 + \tilde{u}^2$ に対する方程式は次のようになる：

$$
(6.1) \quad \begin{cases} \partial_t (u^2 + \tilde{u}^2) + (u^0 + \varepsilon u^1 + \tilde{u}^1 + \varepsilon u^2 + \varepsilon \tilde{u}^2) \cdot \nabla (u^2 + \tilde{u}^2) - \nu \Delta (u^2 + \tilde{u}^2) \\ \qquad + (u^2 + \tilde{u}^2) \cdot \nabla (u^0 + \varepsilon u^1 + \tilde{u}^1) + \nabla p^2 + \varepsilon \nabla \tilde{p}^2 \\ = -\varepsilon u^1 \cdot \nabla u^1 - \tilde{u}^1 \cdot \nabla u^1 + \tilde{h}^1 \equiv f^2 + \tilde{f}^2, \quad (\tilde{h}^1 \text{ は } (P_\nu)^2 \text{ を参照}), \\ \nabla \cdot (u^2 + \tilde{u}^2) = 0, \\ u^2|_{t=0} = 0, \quad \tilde{u}^2|_{t=0} = 0, \\ \gamma (u^2 + \tilde{u}^2) = -{}^t(\gamma' u^1, 0) \equiv g \in K'^{\,l-1, \rho_0}_{\beta_1, T_1}. \end{cases}
$$

Stokes equation に対する Poisson operator $\mathcal{P}(\nu)$ (§3 11) を用いて，

(6.2) $$u^2+\hat{u}^2 = \gamma P^\infty U_0(\nu)\, e_0 (v^2+\tilde{v}^2) - \mathcal{P}(\nu)\gamma P^\infty U_0(\nu)\, e_0 (v^2+\tilde{v}^2) + \mathcal{P}(\nu) g$$

とおく。$\mathcal{P}_3(\nu)$ のみが境界層を作ることに注意すれば，(6.2) は

(6.2)' $$\begin{cases} u^2 = \gamma P^\infty U_0(\nu)\, e_0 v^2 - (\mathcal{P}_1(\nu)+\mathcal{P}_0(\nu))\gamma P^\infty U_0(\nu)\, e_0 (v^2+\tilde{v}^2) + (\mathcal{P}_1(\nu)+\mathcal{P}_0(\nu)) g, \\ \hat{u}^2 = \gamma P^\infty U_0(\nu)\, e_0 \tilde{v}^2 - \mathcal{P}_2(\nu)\gamma P^\infty U_0(\nu)(v^2+\tilde{v}^2) + \mathcal{P}_2(\nu) g \end{cases}$$

と同等である。(6.1) の第2－第4条件は成立しているので，(6.2)' を (6.1) に代入して第1式（方程式）が成立つように v^2 と $\tilde{v}^2$ を定めればよい。非境界層と境界層を分離すれば，u^2 と $\hat{u}^2$ はそれぞれ $(P_\nu)^2$ と $(\tilde{P}_\nu)^2$ をみたすべきである。$\hat{h}^1$ は $\hat{u}^1_3$ の定め方から出てくる。

補助定理 3.1 などから次のことがわかる：

(6.3) $$\mathcal{P}_1(\nu) = \nabla N \gamma_n + \nabla N \mathcal{R}_1(\nu,t) *_t \varepsilon\Lambda', \quad \mathcal{R}_1(\nu;t) = O(t^{-1/2}),$$

$$\mathcal{P}_0(\nu) = \varepsilon\nabla \mathcal{R}_0(\nu,t) *_t \varepsilon\Lambda', \quad \mathcal{R}_0(\nu;t) = O(1), \quad \varepsilon\nabla\mathcal{R}_0(\nu;t) = O(t^{-1/2}).$$

(6.2)' の u^2 を $(P_\nu)^2$ に代入し，適当に potential part を省くと，

(6.4) (i) $$\begin{aligned} v^2(t) &+ u^0\cdot \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\nabla\gamma P^\infty U_0(\nu)\, e_0 v^2} + (u^1+u^2)\cdot\varepsilon\nabla\gamma P^\infty U_0(\nu)\, e_0 v^2 + u^2\cdot\nabla(u^0+\varepsilon u^1) \\ &- [(u^0+\varepsilon u^1)\cdot\nabla, \nabla](N\gamma_n + N\mathcal{R}_1(\nu)\varepsilon\Lambda')\gamma P^\infty U_0(\nu)\, e_0(v^2+\tilde{v}^2) \\ &- [(u^0+\varepsilon u^1)\cdot\nabla, \varepsilon\nabla]\,\mathcal{R}_0(\nu)\varepsilon\Lambda'\gamma P^\infty U_0(\nu)\, e_0(v^2+\tilde{v}^2) \\ &- u^2\cdot\varepsilon\nabla(\nabla N\gamma_n + \nabla N\mathcal{R}_1(\nu)\varepsilon\Lambda' + \varepsilon\nabla\mathcal{R}_0(\nu)\varepsilon\Lambda')\gamma P^\infty U_0(\nu)\, e_0(v^2+\tilde{v}^2) \\ &+ [(u^0+\varepsilon u^1)\cdot\nabla, \nabla](N\mathcal{R}_1(\nu)+\varepsilon\nabla\mathcal{R}_0(\nu))\varepsilon\Lambda' g \\ &+ u^2\cdot\varepsilon\nabla(\nabla N\mathcal{R}_1(\nu)+\varepsilon\nabla\mathcal{R}_0(\nu))\varepsilon\Lambda' g \quad = f^2 = -\varepsilon u^1\cdot\nabla u^1 \end{aligned}$$

となる。～部分が ∇v^2 に対する連続な (Volterra 型) 1次写像である。(5.4)

の第3式より

$$(6.5)\qquad \varepsilon\nabla(\nabla N\mathcal{R}_1(v)+\varepsilon\nabla\mathcal{R}_2(v))\Lambda' g\in K^{\ell-2,\delta_0,\theta_0}_{a,\beta_1,T_1}.$$

$\tilde{u}^2$を計算するため，変数変換 $x_3\longrightarrow\varepsilon x_3$ を行ない，これにともない次の変換を行なう：

$$\partial_3\longrightarrow\frac{1}{\varepsilon}\partial_3,\quad \nabla\longrightarrow\bar{\nabla}={}^t(\nabla',\frac{1}{\varepsilon}\partial_3),$$

$$(6.6)\qquad Q^\infty\longrightarrow\bar{Q}^\infty,\quad P^\infty\longrightarrow\bar{P}^\infty=1-\bar{Q}^\infty,\quad \sigma(\bar{Q}^\infty)(\xi)=\begin{pmatrix}\frac{\xi'\,{}^t\xi'}{|\xi'|^2+\xi_3^2/\varepsilon^2} & \frac{\xi'\xi_3/\varepsilon}{|\xi'|^2+\xi_3^2/\varepsilon^2}\\ \frac{\xi_3\,{}^t\xi'/\varepsilon}{|\xi'|^2+\xi_3^2/\varepsilon^2} & \frac{\xi_3^2/\varepsilon^2}{|\xi'|^2+\xi_3^2/\varepsilon^2}\end{pmatrix}$$

$$U_0(v,t)\longrightarrow\bar{U}_0(v,t),$$

$$P_j(v,t)\longrightarrow\bar{P}_j(v,t),\quad j=1,2.$$

従属変数 $\tilde{u}^i$, $i=0,1,2$, は前節のとおりであるが，$\tilde{u}^i$とu^iを次のようにおき直す（混乱は生じないと思う）：

$$u^i(\varepsilon,t,x',x_3)\equiv\begin{pmatrix}u^{i\prime}(\varepsilon,t,x',\varepsilon x_3)\\ u^i_3(\varepsilon,t,x',\varepsilon x_3)\end{pmatrix},\quad i=0,1,2,$$

$$\tilde{u}^1(\varepsilon,t,x',x_3)\equiv\begin{pmatrix}\tilde{u}^{1\prime}(\varepsilon,t,x',x_3)\\ \varepsilon\tilde{u}^1_3(\varepsilon,t,x',x_3)\end{pmatrix},$$

$$\tilde{u}^2(\varepsilon,t,x',x_3)\equiv\begin{pmatrix}\tilde{u}^{2}(\varepsilon,t,x',x_3)\\ \tilde{u}^2_3(\varepsilon,t,x',x_3)\end{pmatrix}.$$

$(6.2)'$に従って$\tilde{u}^2$は次のように表わされる：

$$(6.7)\qquad \tilde{u}^2=\gamma\bar{P}^\infty\bar{U}_0(v)e_0\tilde{v}^2-\bar{P}_2(v)\gamma\bar{P}^\infty\bar{U}_0(v)e_0(v^2+\tilde{v}^2)+\bar{P}_3(v)g.$$

$\tilde{v}^2$と$\tilde{u}^2$を捉える関数空間は，§2で定義したものでは十分でないので，更に新しい空間を定義する。参照の便のため，§2からの通し番号を用いる。

⑧ $H^{l,\rho,\theta}_{1,a} \ni f \iff$ (i) $f(z',z_3)$ は $\Omega(\rho,\theta,a)$ の内部で解析的,

(ii) $\partial^\alpha f(z',z_3) \in L^1(L(\theta',a); H'^0)$, $0\le\theta'<\theta$, $|\alpha|\le l$,

(iii) $|f|_{l,\rho,\theta,1} \equiv \sum_{|\alpha|\le l}\sup_{0\le\theta'<\theta} \| |\partial^\alpha f(\cdot,z_3)|_0 \|_{L^1(L(\theta',a))} < \infty$,

⑨ $\tilde H^{l,\rho,\theta}_a = H^{l,\rho,\theta}_a \cap H^{l,\rho,\theta}_{1,a}$, $|f|^\sim_{l,\rho,\theta} = |f|_{l,\rho,\theta} + |f|_{l,\rho,\theta,1}$,

⑩ $\tilde K^{l,\rho,\theta}_{a,\beta,T} = \bigcap_{j=0}^{[l/2]} B^j_\beta([0,T]; \tilde H^{l-2j,\rho,\theta}_a)$,

$$|f|^\sim_{l,\rho,\theta,\beta,T} = \sum_{j=0}^{[l/2]} \sup_{0\le t\le T} |\partial_t^j f(t,\cdot)|^\sim_{l-2j,\rho-\beta t,\theta-\beta t}.$$

⑪ $\tilde{\mathcal{K}}^{l,\rho,\theta}_{a,\beta,T} = \bigcap_{k=0}^{l} B^k([0,1]; \tilde K^{l-k,\rho,\theta}_{a,\beta,T})$.

(6.7) における $\tilde v^2$ は，実際は次の形のものでおきかえる：

$$(6.8)\quad \begin{cases} \tilde v^2 \longrightarrow \begin{pmatrix} \tilde v^{2'} \\ \tilde v^2_3 \end{pmatrix} + \varepsilon\Lambda'_1\tilde v^3, & \tilde v^{2'} \in K^{l-2,\rho_0,\theta_0,(\mu)}_{a/\varepsilon}, \\ & \tilde v^2_3 \in \tilde K^{l-2,\rho_0,\theta_0}_{a/\varepsilon}, \\ \Lambda'_1 = \Lambda' + 1, & \tilde v^3 \in K^{l-2,\rho_0,\theta_0}_{a/\varepsilon}. \end{cases}$$

ただし (6.4) においては，$\tilde v^2$ が $K^{l-2,\rho_0,\theta_0}_{a/\varepsilon}$ に属するという性質以外は用いない。補助定理 3.1−3.2 の内容は，D と ∇N の性質以外は $H^{l,\rho,\theta}_{1,a}$ でも成立つ。特に $\bar P_1(\nu,t) = O(1)$, $\bar P_2(\nu,t) = O(t^{-1/2})$.
補助定理 3.3 の内容（$\chi(z_3)\partial_3$ の評価）は $\tilde K^{l,\rho,\theta}_a$ では成立たない。$\tilde v^2$ のおきかえ (6.8) に対応して，$\tilde u^2$ も次のように書く：

$$(6.9)\quad \tilde u^2 \to {}^t(\tilde u^{2'}, \tilde u^2_3) + \varepsilon\Lambda'_1\tilde u^3 \equiv \hat u^2 + \varepsilon\Lambda'_1\tilde u^3,$$

$$\tilde u^2 + \varepsilon \Lambda_1' \tilde u^3 = r \bar P^\infty \bar U_0(\nu)\, e_0 (\tilde v^2 + \varepsilon\Lambda_1' \tilde v^3)$$
$$- \bar{\mathcal P}_2(\nu)\, r \bar P^\infty \bar U_0(\nu)\, e_0(v^2+\tilde v^2+\varepsilon\Lambda_1'\tilde v^3) + \bar{\mathcal P}_2(\nu)\, g ,$$

$$(6.10)\quad \begin{cases} \tilde u^{2\prime} = r\bar U_0(\nu)\, e_0 \tilde v^{2\prime} - \bar{\mathcal P}_2(\nu)' r \bar P^\infty \bar U_0(\nu)\, e_0 (v^2+\tilde v^2) - \bar{\mathcal P}_2(\nu)' g , \\ \tilde u^2_3 = r\bar U_0(\nu)\bar R^\infty_3 e_0 \tilde v^2 - \bar{\mathcal P}_2(\nu)_3\, r\bar P^\infty \bar U_0(\nu)\, e_0(v^2+\tilde v^2) - \bar{\mathcal P}_2(\nu)_3\, g , \\ \tilde u^3 = r\bar P^\infty \bar U_0(\nu)\, e_0 \tilde v^3 - \bar{\mathcal P}_2(\nu)\, r \bar P^\infty \bar U_0(\nu)\, e_0 \tilde v^3 . \end{cases}$$

ただし次のことに注意しておく：

$$(6.11)\quad \begin{cases} \bar Q^\infty = \begin{pmatrix}\bar Q_1^\infty & \bar Q_2^\infty \\ {}^t\bar Q_2^\infty & \bar Q_3^\infty\end{pmatrix}, \quad \bar P^\infty = \begin{pmatrix}E'&0\\0&0\end{pmatrix} + \bar R^\infty, \quad \bar R^\infty = \begin{pmatrix}-\bar Q_1^\infty & -\bar Q_2^\infty\\ -{}^t\bar Q_2^\infty & \bar Q_0^\infty\end{pmatrix}, \\ \frac1\varepsilon \partial_3 \bar Q_1^\infty = \bar Q_2^\infty\, {}^t\nabla', \quad \frac1\varepsilon\partial_3 \bar Q_2^\infty = \bar Q_3^\infty \nabla', \quad \frac1\varepsilon\partial_3\bar Q_0^\infty = \bar Q_2^\infty\cdot\nabla', \\ R_3^\infty = (-{}^t\bar Q_2^\infty, \bar Q_0^\infty) , \quad \frac1\varepsilon\partial_3 \bar R_3^\infty = (-\bar Q_3^\infty\, {}^t\nabla', \bar Q_2^\infty\cdot\nabla') . \end{cases}$$

(6.11)により $\tilde v^2_3$ に対する方程式に $\frac1\varepsilon\partial_3$ は現れない。

(6.9)-(6.10)を $(\tilde P_\nu)^2$ に代入して，それぞれの性質を考慮して整理すると，$\tilde v^{2\prime}, \tilde v^2_3, \tilde v^3$ に対する(6.4)(i)と似た方程式が得られる（〰部分が $\bar\nabla\tilde v^{2\prime}, \nabla'\tilde v^2_3, \bar\nabla\tilde v^3$（と ∇v^2）に関するVolterra型作用素）：

$$(6.4)(\mathrm{ii})\quad \tilde v^{2\prime} + (u^0\cdot\bar\nabla + \tilde u^{1\prime}\cdot\nabla')\, r\bar U_0(\nu)\, e_0\tilde v^{2\prime}$$
$$+ \{\tilde u^1_3\partial_3 + \varepsilon(u^1+u^2+\tilde u^2+\varepsilon\Lambda_1'\tilde u^3)\cdot\bar\nabla\}\, r\bar U_0(\nu)\, e_0\tilde v^{2\prime}$$
$$- (u^0\cdot\bar\nabla + \tilde u^{1\prime}\cdot\nabla')\,\bar{\mathcal P}_2(\nu)' r\bar P^\infty\bar U_0(\nu)\, e_0(v^2+\tilde v^2)$$
$$-\{\tilde u^1_3\partial_3 + \varepsilon(u^1+u^2+\tilde u^2+\varepsilon\Lambda_1'\tilde u^3)\cdot\bar\nabla\}\,\bar{\mathcal P}_2(\nu)' r\bar P^\infty\bar U_0(\nu)\, e_0(v^2+\tilde v^2)$$
$$+(u^0+\varepsilon u^1+\tilde u^1+\varepsilon u^2+\varepsilon\tilde u^2+\varepsilon^2\Lambda_1'\tilde u^3)\cdot\bar\nabla\,\bar{\mathcal P}_2(\nu)' g$$
$$+\tilde u^{2\prime}\cdot\nabla'(u^{0\prime}+\varepsilon u^{1\prime}+\tilde u^{1\prime}+\varepsilon u^{2\prime}) + \frac1\varepsilon\tilde u^2_3\partial_3\tilde u^{1\prime} + (\varepsilon\Lambda_1'\tilde u^3)\cdot\bar\nabla\tilde u^{1\prime}$$
$$= -\tilde u^1\cdot\bar\nabla u^{1\prime} ,$$

$$\hat{u}_3^2 = \varepsilon r \bar{U}_0(\nu)\{-\bar{Q}_3^\infty \nabla'\cdot\partial_3^{-1} e_0 \tilde{v}^{2\prime} + \bar{Q}_2^\infty\cdot\nabla'\partial_3^{-1} e_0 \hat{v}_3^2\}$$

$$- \varepsilon\Lambda' \bar{\mathcal{R}}_2(\nu)_3\, r \bar{P}^\infty \bar{U}_0(\nu)\, e_0(v^2+\tilde{v}^2) + \varepsilon\Lambda' \bar{\mathcal{R}}_2(\nu)_3\, g\,,$$

(6.4) (iii)
$$\tilde{v}_3^2 + (u^0\cdot\bar\nabla + \tilde{u}^{1\prime}\cdot\nabla')\, r\bar{U}_0(\nu)\{-{}^t\bar{Q}_2^\infty e_0 \tilde{v}^{2\prime} + \bar{Q}_0^\infty e_0 \hat{v}_3^2\}$$

$$+ \{\tilde{u}_3^1\partial_3 + \varepsilon(u^1+u^2+\tilde{u}^2+\varepsilon\Lambda_1'\tilde{u}^3)\cdot\bar\nabla\} r\bar{U}_0(\nu)\bar{R}_3^\infty e_0 \tilde{v}^2$$

$$- (u^0\cdot\bar\nabla + \tilde{u}^{1\prime}\cdot\nabla')\, \bar{\mathcal{P}}_2(\nu)_3\, r\bar{P}^\infty \bar{U}_0(\nu)\, e_0 (v^2+\tilde{v}^2)$$

$$- \{\tilde{u}_3^1\partial_3 + \varepsilon(u^1+u^2+\tilde{u}^2+\varepsilon\Lambda_1'\tilde{u}^3)\cdot\bar\nabla\}\bar{\mathcal{P}}_2(\nu)_3\, r\bar{P}^\infty\bar{U}_0(\nu)\, e_0(v^2+\tilde{v}^2)$$

$$+ (u^0+\varepsilon u^1+\tilde{u}^1+\varepsilon u^2+\varepsilon\tilde{u}^2+\varepsilon^2\Lambda_1'\tilde{u}^3)\cdot\bar\nabla\,\bar{\mathcal{P}}_2(\nu)_3\, g$$

$$+ \tilde{u}^2\cdot\bar\nabla(u_3^0+\varepsilon u_3^1+\varepsilon\hat{u}_3^1+\varepsilon u_3^2) + \varepsilon^2\Lambda_1'\tilde{u}^3\cdot\bar\nabla\tilde{u}_3^1$$

$$= -\hat{u}^1\cdot\bar\nabla u_3^1 + \tilde{h}_3^1\,,$$

(iv)
$$\Lambda_1'\tilde{v}^3 + (u^0\cdot\bar\nabla + \hat{u}^{1\prime}\cdot\nabla')\, r\bar{P}^\infty\bar{U}_0(\nu)\, e_0\Lambda_1'\tilde{v}^3$$

$$+ \{\hat{u}_3^1\partial_3 + \varepsilon(u^1+u^2+\tilde{u}^2+\varepsilon\Lambda_1'\tilde{u}^3)\cdot\bar\nabla\} r\bar{P}^\infty\bar{U}_0(\nu)\, e_0\Lambda_1'\tilde{v}^3$$

$$+ r\bar{\mathcal{R}}^\infty\partial_3^{-1} e_0 \nabla'\tilde{v}^2$$

$$- (u^0\cdot\bar\nabla + \tilde{u}^{1\prime}\cdot\nabla')\,\bar{\mathcal{P}}_2(\nu)\, r\bar{P}^\infty\bar{U}_0(\nu)\, e_0\Lambda_1'\tilde{v}^3$$

$$- \{\hat{u}_3^1\partial_3 + \varepsilon(u^1+u^2+\varepsilon\tilde{u}^2+\varepsilon\Lambda_1'\tilde{u}^3)\cdot\bar\nabla\} r\bar{P}^\infty\bar{U}_0(\nu)\, e_0\Lambda_1'\tilde{v}^3$$

$$+ \frac{1}{\varepsilon^2}\tilde{u}_3^2\,\partial_3\big(\underbrace{u^{0\prime}+\varepsilon u^{1\prime}+\varepsilon u^{2\prime}}_{0}\big) + \Lambda_1'\tilde{u}^3\cdot\bar\nabla(u^0+\varepsilon u^1+\varepsilon u^2+\varepsilon\tilde{u}^2)$$

$$= 0\,.$$

ここで (6.4) (iv) 第4項の $\bar{\mathcal{R}}^\infty$ は次の関係から定まる：

(6.12)
$$(\partial_t - \nu\Delta' - \partial_3^2)\, r\bar{U}_0(\nu)\{-{}^t\bar{Q}_2^\infty e_0\tilde{v}^{2\prime} + (1-\bar{Q}_3^\infty)\, e_0\tilde{v}_3^2\}$$

$$= \tilde{v}_3^2 - r\,{}^t\bar{Q}_2^\infty e_0\tilde{v}^{2\prime} - r\bar{Q}_3^\infty e_0\tilde{v}_3^2$$

$$= \tilde{v}_3^2 - \varepsilon r\bar{Q}_3^\infty\partial_3^{-1} e_0\nabla'\cdot\tilde{v}^{2\prime} - \varepsilon(\bar\nabla\bar\Delta^{-1}\partial_3 e_0\tilde{v}_3^2)_3\,,$$

$$\bar{R}^\infty \nabla' \tilde{v} = {}^t\left(-\bar{Q}_3^\infty \nabla' \tilde{v}_3,\ \bar{Q}_3^\infty \nabla' \tilde{v}'\right).$$

$w^2(t) = {}^t(v^2(t), \tilde{v}^{2\prime}(t), \tilde{v}_3^2(t), \tilde{v}^3(t)) \in K_{a,\beta,T}^{l-2,\rho_0,\theta_0} \times K_{a/\varepsilon,\beta,T}^{l-2,\rho_0,\theta_0(H)} \times \tilde{K}_{a/\varepsilon,\beta,T}^{l-2,\rho_0,\theta_0}$ $\times K_{a/\varepsilon,\beta,T}^{l-2,\rho_0,\theta_0}$ $(\beta \ge \beta_1,\ 0 < T \le T_1)$ とおき，(6.4)(ii)-(iii) を (iv) の $\gamma\bar{R}^\infty \times \partial_3^{-1} e_0' \nabla' \tilde{v}^2$ の所に代入すると，(6.4) は

(6.13) $\quad w^2(t) = F^2(\varepsilon, t, w^2(\cdot))$

の形となり，定理ACKの条件 (F.1)-(F.3) が満される。故に (6.13) の解 $w^2(t)$ が，ある $\beta_2 > \beta$ と $0 < T_2 < T_1$ に対して，上の関数空間で唯1つ存在する。$\tilde{v}^3 \longmapsto \varepsilon\Lambda_1' \tilde{v}^3$ が連続写像であること ($K_{a/\varepsilon,\beta,T}^{l-2,\rho_0,\theta_0}$ で) などに注意する。

定理6.1　ある $\beta_2 > \beta_1$ と $0 < T_2 < T_1$ $(T_2 \le \rho_0/\beta_2,\ T_2 \le \theta_0/\beta_2)$ に対して，$(P_\nu)^2$ および $(\tilde{P}_\nu)^2$ の解 $(u^2, \tilde{u}^2 + \varepsilon\Lambda_1' \tilde{u}^3) \in K_{a,\beta_2,T_2}^{l-2,\rho_0,\theta_0} \times K_{a/\varepsilon,\beta_2,T_2}^{l-2,\rho_0,\theta_0}$ が存在する。このとき $(u^2, \tilde{u}^2 + \varepsilon\Lambda_1' \tilde{u}^3) \in \mathcal{K}_{a,\beta_2,T_2}^{l-2,\rho_0,\theta_0} \times \mathcal{K}_{a/\varepsilon,\beta_2,T_2}^{l-2,\rho_0,\theta_0}$.

(注3) 解の滑かさの order を落せば，実は $u^2 = O(\varepsilon)$ である。従って展開 (1.1) は次の形になる ($u^2 \to u^2/\varepsilon$ として)：

(1.1)′ $\quad u(\nu,t,x) = u^0 + \varepsilon u^1 + \varepsilon^2 u^2 + \tilde{u}^1 + \varepsilon\tilde{u}^2 + \varepsilon^2 \Lambda_1 \tilde{u}^3.$

$\tilde{u}^j$ の番号を1つずらす方が見易いかもしれない。

(注4) 境界層方程式について再論する。$u^0(\nu,t,x)$ は ν につ

いて滑らか，$u^\nu(\nu,t,x) = u^\nu(0,t,x) + O(\nu)$，であるから，$U(t,x) = u^\nu(0,t,x)$ は Euler 方程式 (P_0) の1意解である。$(\tilde{P}_\nu)^1$ または (5.2)' において $O(\varepsilon)$ の項をすべて省略し，パラメタ ν を含まない方程式系を求めると，

$$
(\mathrm{BL})\quad
\begin{cases}
\partial_t \tilde{u}' + (\bar{U}\cdot\nabla + \tilde{u}'\cdot\nabla' + \tilde{u}_3\partial_3)\tilde{u}' - \partial_3^2\tilde{u}' + \tilde{u}'\cdot\nabla'\bar{U}' = 0, \\
\tilde{u}_3(t,x',x_3) = -\int_0^{x_3} \nabla'\cdot\tilde{u}'(t,x',\eta_3)\,d\eta_3 \equiv -\partial_{3,0}^{-1}\nabla'\cdot\tilde{u}', \\
\tilde{u}'|_{t=0} = 0, \\
\gamma\tilde{u}' = -\gamma U' = U'(t,x',0).
\end{cases}
$$

これは $\tilde{u}'$ について閉じた方程式であり，§5 と同様にして $\tilde{v}'$ の方程式に書きかえ，定理ACK を適用すれば，ある区間における解の存在が示される。

(BL) はまた，$(\partial_t - \partial_3^2)$ の Dirichlet 問題の Poisson operator $P_2(t)$ と基本解 $U_2(t,x_3,\eta_3)$ を用いて，

$$
(\mathrm{BL})'\quad \tilde{u}'(t) = -\int_0^t U_2(t-s,x_3,\eta_3)\Big\{(\bar{U}\cdot\nabla + \tilde{u}\cdot\nabla' - \partial_{3,0}^{-1}\nabla'\cdot\tilde{u}'\partial_3)\tilde{u}'(s,x',\eta_3) + (\bar{U}\cdot\nabla + \tilde{u}'\cdot\nabla' - \partial_{3,0}^{-1}\nabla'\cdot\tilde{u}'\partial_3)P_2\gamma U'(s,x',\eta_3)\Big\}\,ds\,d\eta_3 - P_2\gamma U'
$$

と書きかえ，$\tilde{u}'$ の1意的存在を示すこともできる。しかし，(BL) は通常の L^2-norm による関数空間では，well-posed でない。(BL) が Prandtl 境界層方程式と異なる情報を与えることがあると面白いかもしれない。