

Navier-Stokes 方程式の解の安定性

(東大. 理) 増田 久弥

(Kyūya Masuda)

1. 3次元空間 \mathbb{R}^3 の中、有界な物体の外部 Ω を流れる非圧縮性粘性流は、Navier-Stokes 方程式に以下の支配される。

$$(1) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + (u \cdot \nabla) u + \nabla p = 0, & \operatorname{div} u = 0 \\ & (x \in \Omega, t > 0) \\ u(x, t) = b(x) & (\Omega \text{ の境界 } \Gamma \text{ 上}) \\ u(x, t) \rightarrow b_\infty & (|x| \rightarrow \infty) \\ u(x, 0) = a(x) & (x \in \Omega) \end{cases}$$

ここで、 u は Ω における速度ベクトル場、 p は圧力を表わすスカラー場、 ν は粘性係数で正定数、 $b = b(x)$ は Γ 上にて与えられたベクトル場、 $a = a(x)$ は Ω 上で与えられた初速度ベクトル場、 b_∞ は定数ベクトル。

ただし、 $\operatorname{div} u = 0$ の条件より、次の条件を満たす b と a を与えることが自然である。

$$(2) \quad \begin{cases} \int_{\Gamma} m \cdot b \, dS_x = 0 \\ \operatorname{div} a = 0 \end{cases}$$

(m は Γ の外向き法線ベクトルを表す.)

特に, 定常流は (便宜上, $u, p \in \mathcal{V}, q \in \mathcal{Z}$)

$$(3) \quad \begin{cases} -\nu \Delta u + (u \cdot \nabla) u + \nabla q = 0 & (x \in \Omega) \\ \operatorname{div} u = 0 & (x \in \Omega) \\ u(x) = b(x) & (x \in \Gamma), \quad u(x) \rightarrow b_{\infty} \\ & (|x| \rightarrow \infty) \end{cases}$$

が存在。 (3) の解, 存在する定常流の安定性が問題になる。

2.

これに關係して, R. Finn [1, 2, 3] は, "物理的に妥当な" 解 (physically reasonable solution) という概念を導入した。すなわち, (3) の解の中で,

$$(4) \quad |v(x) - b_{\infty}| \leq \frac{\text{const.}}{|x|} \quad (|x| \rightarrow \infty)$$

をみたす解をいふ。 (4) をみたす (3) の解は, 必然的に,

に,

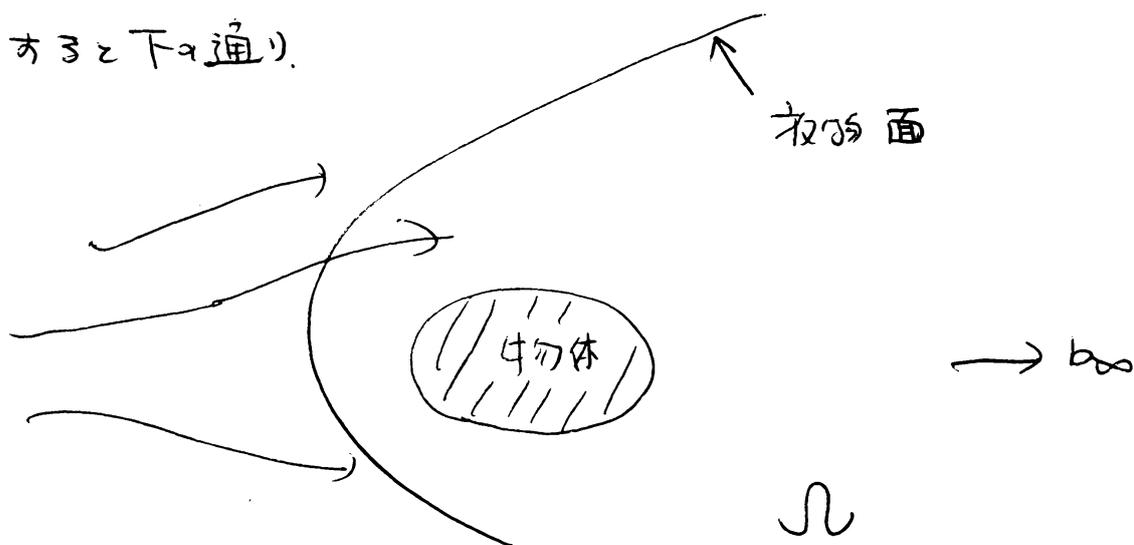
$$(5) \quad v(x) = b_{\infty} + O\left(\frac{1}{|x| (1 + S_x)}\right)$$

をみたすことが示される。 (上記 Finn の論文を参照。)

但し, S_x は 次で定義される!

$$(6) \quad S_x = |x| - \frac{b_{\infty} \cdot x}{|b_{\infty}|}$$

図示すると下の通り。



放物面の外部の内部では b_{∞} に近づく speed が異なることに注意する。あるいは, wake region が存在する。
 (4) をみたす解の存在は, K.I. Babenko に示された。あるいは, 有限な Dirichlet norm

$$(7) \quad \int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx < \infty$$

をみたす解の存在が知られていたが, (7) から (4) が成り立つことを示したことがある。([4])

その後, D. Clark ([5]), Babenko-Vasil'ev ([6]) は, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し,

$$(8) \quad \text{rot } v(x) = O(|x|^{-2} \exp(-(R-\varepsilon)|x|))$$

を示した。($R = |b_{\infty}|/2v$) paraboloid の外では,

$\text{rot } v$ は "殆ど" 0 とみられる。

上にあることが, 非定常 Navier-Stokes 方程式に対しても成立する。この結果は, Mizumachi ([7]) により得られた。

3.

2.より, (4) をみたす (3) の解の安定性を論ずるが;
 大切と存するところがある。

Masuda は次の結果を得た. ([8]).

$$(9) \quad \sup_{x \in \Omega} |x| |v(x) - b_{\infty}| < \frac{1}{2} \epsilon$$

存する, v は摂動 $a' = a'(x)$ を与えたとき,

$$(10) \quad a' \in L^2(\Omega), \quad a(x) = v(x) + a'(x)$$

をみたす a を初期値にとり (1) の解 $u = u(x, t)$ は,

$$\|\nabla u(\cdot, t) - \nabla v(\cdot)\|_{L^2} \leq M t^{-1/4}$$

$$(11) \quad \sup_{x \in \Omega} |u(x, t) - v(x)| \leq M t^{-1/8}$$

但し, M は大に与えぬ正定数である。すなわち,

(9) を満たす (3) の解は安定である。 ($\|\cdot\|_{L^2}$ は Ω 上の L^2 -norm を表わす)

4.

流体のエネルギーは、 u の t へのエネルギーに近づくことがわかる。

$$(12) \quad \|u(\cdot, t) - v(\cdot)\|_{L^2} \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty)$$

Masuda は、これを示した ([9])。この以後、 n の位 n order 2 $0 < n < \infty$ かつ $n < \infty$ の数学者による研究は行われた。文献表に掲げた論文を参照していただきたい。例えば、 n の $n < \infty$

P. Secchi, On the stationary and nonstationary Navier-Stokes equations in \mathbb{R}^n

を (著者が改良した形) で述べる。

\mathbb{R}^n ($n \geq 3$) において

$$(13) \quad \begin{cases} -\nu \Delta u + (u \cdot \nabla) u + \nabla p = f(x) & \text{in } \mathbb{R}^n \\ \nabla \cdot u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0 \end{cases}$$

このとき、

定理 次の $R > 0$, $d \geq 3$ が存在するとする:

$$f \in L^{m/2}(|x| < R), \quad \text{ess. sup}_{|x| \geq R} |x|^d |f(x)| < \infty$$

$$R \|f\|_{L^m(|x| < R)} + \text{ess. sup}_{|x| \geq R} |x|^d |f(x)| < C_1 \nu^2$$

(C_1 ; $n, \alpha = \alpha$ 依存する定数) のとき,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x| |v(x)| < \infty, \quad \nabla v \in L^m, \quad \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} v \in L^{\frac{m}{2}}$$

$$p \in L^m, \quad \nabla p \in L^{m/2}$$

をみたす (13) の解がただひとつ存在する。

非定常 Navier-Stokes 方程式の場合は,

$$(14) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + (u \cdot \nabla) u + \nabla q = f(x) & x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ \nabla \cdot u = 0 \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x, t) = 0 & t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

を考へる。このとき、

定理 $p > n$, $f \in L^p$ とする。 v は (13) の解とする。

$u_0 \in L^p$ を $\nabla \cdot u_0 = 0$ かつ $u_0 - v \in L^2$ とし、このとき、次の定数 C_1, C_2 が存在する。

$$A(v) \equiv \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x| |v(x)| < C_1$$

$$\|u_0 - v\|_2^{2(p-n)/(m(p-2))} \|u_0 - v\|_p^{p(m-2)/(m(p-2))} < C_2 (C_1 - A(v))$$

ならば (14) の解は存在する。これは、

$$\|u(t) - v\|_p \leq C_4 (t+t)^{-\frac{m}{2}(\frac{1}{2} - \frac{1}{p})}$$

と減衰する。ただし、 C_4 は、 $m, p, N, A(u), \|u_0 - v\|_2, \|u_0 - v\|_p$ に依存する (t に關する) 定数である。

$\| \cdot \|_p$ は \mathbb{R}^m 上の $L^p(\mathbb{R}^m)$ のノルムを表わす。

1. R.Finn, On the steady state solutions of the Navier-Stokes equations III Acta Math.,105(1961),197-244.
2. R.Finn, On the exterior stationary problem for the Navier-Stokes equations, and associated perturbation problems. Arch.Rat.Mech.Anal.,19(1965),363-406.
3. R.Finn, Mathematical questions relating to viscous fluid flow in an exterior domain, Rocky Mt. J.Math.,3(1973) 107-140.
4. K.I.Babenko, On stationary solutions of the problem of flow past a body of a viscous incompressible fluids Mat.Sbornik 91(133)91973),3-26 (English transl. in Math.USSR-Sb.,20(1973),1-25.)
5. K.I.Babenko-M.M.Vasilev, On the asymptotic behavior of viscous fluid at some distance from an immersed body, Prikl.Mat.Mech.,37(1973),690-705 (English transl.in J.Appl.Math.Mech.,37(1973),651-665)
6. D.Clark,The vorticity at infinity for solutions of the stationary Navier-Stokes equations in exterior domains, Indiana Univ.Math.J.,20(1971),633-651.
7. R.Mizumachi, On the asymptotic behavior of incompressible viscous fluid motions past objects. J.Math Soc.Japan 36(1984),497-522.
8. K.Masuda, On the stability of incompressible viscous fluid motions past objects. J.Math.Soc.Japan27 (1975),294-327.

9. K. Masuda, Weak solutions of Navier-Stokes equations. Tohoku Math.J., 36 (1984), 627-646.
10. T.Kato, Strong L^p -solutions of the Navier-Stokes equations in \mathbb{R}^n , with applications to weak solutions. Math.Z., 187 (1984), 471-480.
11. M.E. Schonbek, L^2 -decay for weak solutions of the Navier-Stokes equations. Arch.Rat.Mech.Anal., 89 (1985), 209-222.
12. R.Kajikiya-T.Miyakawa, On L^2 decay of weak solutions of the Navier-Stokes equations in \mathbb{R}^n . Math.Z. 192 (1986), 135-148.
13. G.P.Galdi-P.Maremonti, Monotonic decreasing, and asymptotic behavior of the kinetic energy for weak solutions of the Navier-Stokes equations in exterior domains. Arch.Rat.Mech.Anal., 90 (1986), 253-266.
14. H.Beirao da Veiga, Existence and asymptotic behavior for strong solutions of the Navier-Stokes equations in the whole space. Indiana Univ.Math.J., 36 (1987), 149-166.
15. H. Beirao da Veiga-P.Secchi, L^p -stability for the strong solutions of the Navier-Stokes equations in the whole space. Arch.Rat.Mech.Anal. 98 (1987), 65-69.