数理解析研究所講究録
638巻 1988年 80-96

On the global existence of real analytic solutions and hyperfunction solutions of linear differential equations

by

KAWAI Takahiro (河合隆裕)
RIMS, Kyoto University

and

TAKEI Yoshitsugu (竹井義次)
Department of Mathematics, Kyoto University

Abstract

We first show the closed range property of a linear differential operator P acting on the space $\mathcal{A}(K)$ of real analytic functions on a compact set $K \subset \mathbb{R}^n$, assuming some convexity condition on K with respect to P. Using this closed range property, we obtain some global existence theorems first for real analytic solutions, and then for hyperfunction solutions. The details of the first topic can be found in [5], and the details of the second and the third can be found in [4]. Our expectation is that the reasoning employed in [5] will eventually shed a new light upon our understanding of the role of bicharacteristics in the complex analytic category, although this expectation is not well visualized in [5]. We also note that Kiro [6] claimed some closed range property of P acting on $\mathcal{A}(K)$, although his original reasoning contains serious gaps, as he himself admits in his letter to Kawai dated October 21, 1986.

He also says in the letter that he has corrected his original version. However we have not received the revised version up to now (= December 17, 1986). Hence we cannot say what his final claim is, and one of us (T.K.) wants to replace the condition (1.2) in his announcement paper [3] by the condition (1) given in the main text below.

シンポジウムの折には，単独線型微分方程式 $P(x, D_x)u = f$ の実解析解及び超函数解の大域的存在に関して，それぞれある条件の下で，以下の様な結果を得ることができることを話した。

(I) $\mathbb{R}^n$ のコンパクト集合K上の実解析函数の空間 $\mathcal{A}(K)$ において，作用素Pは全射。

(II) $\mathbb{R}^n$ の相対コンパクトな開集合 Ω 上の実解析函数の空間 $\mathcal{A}(\Omega)$ において，作用素Pは全射。

(III) Ω ((II)と同様)上の hyperfunction の空間 $\mathcal{B}(\Omega)$ において，作用素Pは全射。

このうち(II)(III)の詳細については Kawai [4] を参照して頂くこととし，ここではその idea に触れるにとどめたい。ただ(II)(III)については，(I)と異り，Pが real かつ simple characteristic (又は real かつ constant multiplicity)の場合に話を限っていることは注意しておこう。(II)について言えば，Pの陪特性曲線についての或る種の凸性の仮定の下で，Pが $\mathcal{A}(\Omega)$ / $\mathcal{A}(\overline{\Omega})$ で全

射であることをまず示し，(I) を援用して $\mathcal{A}(\Omega)$ での結果を得るのである。又 (III) について言えば，同様の凸性の条件をみたす開集合の族で Ω を sweep out できると仮定し，P が real かつ simple characteristic であることにより $Pu=f$ が可解な領域を少しずつ拡げていく，という方法がとられる。

なお，本稿とほぼ同様の内容の論文が，Proc. Japan Acad. に近く掲載される予定である。(Kawai - Takei [5])

さて，(I) についての議論の詳細を述べるために必要とされる記号を準備しよう。K を $\mathbb{R}^n$ のコンパクト集合とし，$P(x, D_x)$ を K の開近傍 U で定義された実解析函数を係数にもつ次数 m の線型微分作用素，$p_m(x,\xi)$ をその principal symbol とする。また，K 上の実解析函数の空間を $\mathcal{A}(K)$ で表す。

$\mathcal{A}(K)$ は，K の複素近傍 Ω を用いて

$$\mathcal{A}(K) = \varinjlim_{\Omega\supset K} \tilde{\mathcal{O}}(\Omega) \qquad \left(\begin{array}{l} \mathbb{C}^n \supset \Omega \ : \ \text{Stein} \\ \tilde{\mathcal{O}}(\Omega) : \Omega\text{上の有界な正則函数の空間} \end{array} \right)$$

とも表される。$\tilde{\mathcal{O}}(\Omega)$ は sup - norm で Banach 空間となり，$\mathcal{A}(K)$ にはその帰納極限としての位相を与える。Montel の定理により，$\mathcal{A}(K)$ はこの位相で (DFS) 空間 (dual Fréchet - Schwartz space) となることに注意されたい。

これから議論せんとする問題は，適当な十分条件を見出し

て，その条件の下に $P:\mathcal{A}(K)\longrightarrow\mathcal{A}(K)$ が全射を示すことにある。それには，

(i) P の値域，即ち $P\mathcal{A}(K)$，が閉であること

(ii) $P\mathcal{A}(K)$ が稠密であること

の二点を示せば十分である。勿論，単独方程式の場合には，(i) と比べると (ii) は格段に易しい。実際，$\mathcal{A}(K)$ の dual space は $\mathcal{B}_K$（K に台をもつ hyperfunction の空間）であるから，(ii) は P の adjoint operator ${}^tP$ が $\mathcal{B}_K$ から $\mathcal{B}_K$ への作用素として単射であることと同値で，これは P に何らかの非退化性の条件を課せば，かなり一般的に期待できる事実である。例えば，P が real かつ simple characteristic の場合には，Sato - Kawai - Kashiwara [9] の特異性の伝播についての結果を用いれば，容易に次の命題を得ることができる。

Proposition

P は real かつ simple characteristic とする。更に，P が次の条件：

任意の $(x,\xi)\in\mathring{T}^*U$ 但し $p_m(x,\xi)=0$，$x\in K$ に対して $b_{(x,\xi)}$ を (x,ξ) を通る p_m の陪特性帯とするとき，

$$b_{(x,\xi)}\cap\mathring{T}^*(U\setminus K)\neq\phi$$

をみたすならば，$P\mathcal{A}(K)$ は稠密である。

（ここで，$\mathbb{R}^n$ の開集合 U に対して $\mathring{T}^*U\overset{\text{def}}{=}T^*U\setminus T^*_UU$ ）

従って，以下では (i)，即ちどのような条件の下で P の値域が閉となるかについて考えることにしよう。

我々は，作用素 P に対するコンパクト集合 K のある種の凸性を仮定する。以下，重複度一定の作用素をも対象としていることを強調する為に，ξ について次数 $r\ (=\frac{m}{\ell})$ の斉次多項式となる (x,ξ) の実解析函数 $q(x,\xi)$ を用いて，$P_m(x,\xi) = q(x,\xi)^{\ell}$ と書けているとする。

Definition 1 (uniform P- convexity)

コンパクト集合 K が，次の条件 (1) をみたす U 上で定義された実数値実解析函数 $\psi(x)$ を用いて $K = \{x \in U \mid \psi(x) \leqq 0\}$ と表されるとき，K は uniformly P- convex であるという。

$z = x + \sqrt{-1}\,y$，$\zeta = \frac{1}{2}\operatorname{grad}\psi(x) - \sqrt{-1}\,Ay$ とおくとき，適当な正定数 A_0, C に対して，$A > A_0$ なる限り，不等式：

$$(1)\quad \frac{1}{2}\sum_{1\leq j,k\leq n}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_j\partial x_k}(x)\, q^{(j)}(z,\zeta)\,\overline{q^{(k)}(z,\zeta)} + \mathrm{Re}\Big(\sum_{1\leq j\leq n} q_{(j)}(z,\zeta)\,\overline{q^{(j)}(z,\zeta)}\Big) - \frac{1}{A}\sum_{1\leq j\leq n}|q_{(j)}(z,\zeta)|^2 \geq C(1+A|y|)^{2(r-1)}$$

が，$q(z,\zeta) = 0$ かつ $A\psi(x) + A^2|y|^2 = 1$ をみたす任意の (x,y) に対して成り立つ。

ここで $q^{(j)}(z,\zeta) = \frac{\partial q}{\partial \zeta_j}(z,\zeta)$，$q_{(j)}(z,\zeta) = \frac{\partial q}{\partial z_j}(z,\zeta)$ という

略記法を用いた。定義に関して一つ注意を述べておこう。上の定義においてAは十分大としてよいから，付帯条件 $A\psi(x) + A^2|y|^2 = 1$ により $|y|$ は十分小となり，従って (1) で q の変数として $z = x + \sqrt{-1}\,y$ を代入することは意味をもつ。($q(x,\xi)$ は実解析函数)

(1) に現われる不等式は多少複雑であるので，その幾何学的な意味について二，三触れておこう。

(a) Kの開近傍 $\{ x \in U \mid \psi(x) < \frac{1}{A} \}$ を K_A で表す。(1) の条件の下では，$\psi(x) = \frac{1}{A}$ をみたす点においては $\operatorname{grad}\psi(x) = 0$ となることはない。即ち，K_A の境界は smooth である。従って，K は smooth な境界をもつ開集合の交わりと表される。

(b) さらに強く，K_Aは次の性質をみたすこともわかる。例えば q が real としよう。この時 $q(x, \operatorname{grad}\psi(x)) = 0$ をみたす K_A の境界上の点においては，(1) から

$$\sum_{1\le j,k\le n} \frac{\partial^2\psi}{\partial x_j \partial x_k}(x)\, q^{(j)}(x, \operatorname{grad}\psi(x))\, q^{(k)}(x, \operatorname{grad}\psi(x)) + \sum_{1\le j\le n} q_{(j)}(x, \operatorname{grad}\psi(x))\, q^{(j)}(x, \operatorname{grad}\psi(x)) > 0$$

が従う。この不等式は，$(x, \operatorname{grad}\psi(x))$ を初期値とするPの陪特性帯，即ち q で定まるハミルトンベクトル場の解曲線 $(x(t), \xi(t))$ に対して，

$$\left.\frac{d^2\psi(x(t))}{dt^2}\right|_{t=0} > 0$$

が成り立つことと同値である。それ故 (1) は，K_A がPの陪特

性曲線に関して凸であるという内容も含んでいる。

(C) 一方，(1) は g に対しても非常に強い制限を加えている。実際，$A|y| \gg 1$ である限り $1+A|y| \sim |\zeta|$ であることに注意して，(1) の両辺の ζ についての斉次性に注目する。すると，左辺の第二項に現われる $\sum g_{(j)}\overline{g^{(j)}}$ のみ斉次性が1次高い。しかも奇数次であることを考慮すれば，(1) は $\sum g_{(j)}\overline{g^{(j)}}$ の最高次の項の実部が消えていることを意味する。例えば，$n=2$ で $g=\xi_1+ix_1\xi_2$ とすると (1) は決してみたされない。

また，ここで定義した uniform P-convexity が Hörmander [1] の strong P-convexity と似ているという事実も指摘しておきたい。Hörmander の方法は解の a priori 評価に基くものであり，我々が以下で採用する方法とは根本的に異なるにもかかわらず，得られた条件が非常に似通っている点は興味深いと思われる。

この K が uniformly P-convex であるという仮定の下に，P の $\mathcal{A}(K)$ における閉値域性を得ることができる。

<u>Theorem 1</u>

K を $\mathbb{R}^n$ のコンパクト集合，$P(x, D_x)$ を K の近傍で実解析的な係数をもつ線型微分作用素とする。

この時，K が uniformly P-convex であるならば，$P\mathcal{A}(K)$ は $\mathcal{A}(K)$ の閉部分空間である。

以下，この定理の証明を与えることにしよう。

Proof of Theorem 1.

仮定から，条件 (1) をみたす $\psi(x)$ を用いて $K = \{x \in U \mid \psi(x) \leqq 0\}$ と表されている。そこで A を十分大きい正の数として，次式で定義される K の基本近傍系 $\{\Omega_A\}_{A>0}$ を考える。

$$\Omega_A = \{ z = x + \sqrt{-1}y \in U \times \sqrt{-1}\mathbb{R}^n_y \mid \varphi_A(z) \overset{\text{def}}{=} \psi(x) + A|y|^2 < \frac{1}{A} \}$$

まず A が十分大きい時，Ω_A は Stein であり，しかも上記 (a) と同様の理由によりその境界は smooth であることに注意する。また，P は Ω_A で正則な函数を係数にもつ微分作用素 $P(z, D_z)$ と見なすことができる。さて，Ω_A 上の正則函数の空間を $\mathcal{O}(\Omega_A)$ で表すと，$\mathcal{A}(K) = \varinjlim_{A \to +\infty} \mathcal{O}(\Omega_A)$ であるから，

$$(2) \quad \mathcal{A}(K) / P\mathcal{A}(K) = \varinjlim_{A \to \infty} \mathcal{O}(\Omega_A) / P\mathcal{O}(\Omega_A)$$

ここでもし $\mathcal{O}(\Omega_A)/P\mathcal{O}(\Omega_A)$ が有限次元であることが示せたとしよう。すると，(2) の右辺において基本近傍系 $\{\Omega_A\}_{A>0}$ は可算個で十分ゆえ，$\mathcal{A}(K)/P\mathcal{A}(K)$ は可算次元となる。一方，先に述べた様に $\mathcal{A}(K)$ は (DFS) 空間であるから，函数解析の結果（例えば Komatsu [7] を参照）を用いれば，$P\mathcal{A}(K)$

が $\mathcal{A}(K)$ の閉部分空間であるという結論を得る。従って問題は $\mathcal{O}(\Omega_A)/P\mathcal{O}(\Omega_A)$ が有限次元であることの証明に帰着された。

ところで Ω_A は Stein であるから，$\bar{\partial}_j = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} + \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial y_j}\right)$ として方程式系 $\bar{\partial}_j u = g_j$ （$1 \leq j \leq n$，但し $\bar{\partial}_j g_k = \bar{\partial}_k g_j$）が Ω_A で可解である。従って Ω_A で

$$\begin{cases} P(z, D_z)\, u(z) = f(z) \\ \bar{\partial}_j u = 0 \quad , \quad 1 \leq j \leq n \end{cases} \qquad \text{但し} \quad \bar{\partial}_j f = 0 \quad (1 \leq j \leq n)$$

を解くということは，同じく Ω_A で

$$\begin{cases} P(z, D_z)\, u(z, \bar{z}) = g(z, \bar{z}) \\ \bar{\partial}_j u = g_j(z, \bar{z}) \quad , \quad 1 \leq j \leq n \end{cases} \qquad \text{但し} \quad \begin{matrix} \bar{\partial}_j g = P(z, D_z)\, g_j \quad (1 \leq j \leq n) \\ \bar{\partial}_j g_k = \bar{\partial}_k g_j \quad (1 \leq j, k \leq n) \end{matrix}$$

を解くことに還元される。ここで $P(z, D_z)$ と $\bar{\partial}_j$ が可換であることに注意されたい。より厳密に述べると，$\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_y$ の複素化を X とし，$\mathcal{D}_X$ - module $\mathcal{M}$ を $\mathcal{M} = \mathcal{D}_X / (\mathcal{D}_X P(z, D_z) + \sum_{1 \leq j \leq n} \mathcal{D}_X \bar{\partial}_j)$ で定義すれば，次の同型が成り立つ。

$$(3) \qquad \mathcal{O}(\Omega_A)/P\mathcal{O}(\Omega_A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{D}_X}(\Omega_A ; \mathcal{M}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^{2n}_{(x,y)}})$$

従って (3) の右辺が有限次元であることを証明すればよい。$\mathcal{M}$ は elliptic system であるから，我々はコホモロジー群の有限次元性に関する Kawai [2] の結果を援用することができる。Kawai [2] によれば，

$\mathcal{M}$ から induce される Ω_A の境界上の "positive" tangential

(4) system $\mathcal{M}_{A,+}$ の generalized Levi form が，各（$\mathcal{M}_{A,+}$ の）characteristic point において正定値

であれば，(3) の右辺は有限次元となる。それ故，uniform P-convexity の仮定の下に，上で述べた条件 (4) を確かめさえすれば証明は完了する。

$\mathcal{M}_{A,+}$ の generalized Levi form を計算しよう。tangential system や generalized Levi form の定義に関しては Sato - Kawai - Kashiwara [9] を，またそれらの具体的な計算については Pallu de La Barrière [8] をも参照されたい。今の場合，例えば $\frac{\partial\varphi_A}{\partial \bar{z}_1} \neq 0$ となる $N \overset{\mathrm{def}}{=} \partial\Omega_A$ の点の近傍においては，Y を N の複素化として，$\mathcal{M}_A$ は次式で与えられる。

$$\mathcal{M}_A = \mathcal{D}_Y \Big/ \Big(\mathcal{D}_Y P^N + \sum_{2\le j\le n} \mathcal{D}_Y \bar{\partial}_j^N \Big)$$

(5)
$$\begin{cases} P^N = P(z, \widetilde{D}_z) \quad (z \in N) \\ \qquad \text{但し} \quad \widetilde{D}_{z_j} \overset{\mathrm{def}}{=} \dfrac{\partial}{\partial z_j} - \Big(\dfrac{\partial\varphi_A}{\partial z_j}\Big)\Big(\dfrac{\partial\varphi_A}{\partial \bar{z}_1}\Big)^{-1} \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}_1} \\ \bar{\partial}_j^N = \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}_j} - \Big(\dfrac{\partial\varphi_A}{\partial \bar{z}_j}\Big)\Big(\dfrac{\partial\varphi_A}{\partial \bar{z}_1}\Big)^{-1} \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}_1} \end{cases}$$

これより $\mathcal{M}_A$ の characteristic は，

(6)
$$\{ (z, \pm n(z)) \mid z \in N,\ p_m(z, n(z)) = 0 \}$$
$$\text{但し} \quad n(z) = \Big(\frac{1}{\sqrt{-1}} \frac{\partial\varphi_A}{\partial \bar{z}_j}(z) \Big)_{1\le j\le n}$$

となることがわかる。このうち，特に cotangential component が $n(z)$ となる characteristic のみに注目するというのが，"positive" tangential system の意味である。従って $\mathcal{M}_{A,+}$ の characteristic point は，その base point z により定まる。z_0（即ち $(z_0, n(z_0))$）を $\frac{\partial\varphi_A}{\partial z_1}(z_0) \neq 0$ となる $\mathcal{M}_{A,+}$ の characteristic point としよう。この時 (6) により $z_0 \in N = \partial\Omega_A$ かつ $P_m(z_0, \frac{\partial\varphi_A}{\partial z}(z_0)) = 0$ である。z_0 における $\mathcal{M}_{A,+}$ の generalized Levi form を $L_{z_0}(\sigma)$ $(\sigma \in \mathbb{C}^n)$ とかくことにすれば，

$$
(7) \quad \begin{aligned}
L_{z_0}(\sigma) = & \sum_{2\le j,k\le n} \frac{1}{2\sqrt{-1}} \{\bar{\partial}_j^N, \bar{\partial}_k^{N,c}\}(z_0, n(z_0))\, \sigma_j \overline{\sigma_k} \\
& + 2\,\mathrm{Re}\Big(\sum_{2\le j\le n} \frac{1}{2\sqrt{-1}} \{\bar{\partial}_j^N, g^{N,c}\}(z_0, n(z_0))\, \sigma_j \overline{\sigma_{n+1}} \Big) \\
& + \frac{1}{2\sqrt{-1}} \{g^N, g^{N,c}\}(z_0, n(z_0))\, |\sigma_{n+1}|^2
\end{aligned}
$$

ここで $\left(\begin{array}{l} \{f, g\} \text{ は } f \text{ と } g \text{ の Poisson 積} \\ f^c \text{ は } f \text{ の複素共役} \end{array}\right.$

となる。但し (5) で P^N を定義したのと同様に，g から g^N を定めた。(7) 式中の $\bar{\partial}_j^N$ などは (5) に与えられているから，それを用いて $L_{z_0}(\sigma)$ を計算すれば，次式を得る。

$$
L_{z_0}(\sigma) = \sum_{2\le j,k\le n+1} a_{j,k}(z_0)\, \sigma_j \overline{\sigma_k} \qquad (\overline{a_{j,k}} = a_{k,j})
$$

$$
(8) \quad \begin{aligned}
a_{j,k}(z_0) = & \frac{\partial^2\varphi_A}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(z_0) - \Big(\frac{\partial\varphi_A}{\partial \bar{z}_j}(z_0)\Big)\Big(\frac{\partial\varphi_A}{\partial \bar{z}_1}(z_0)\Big)^{-1} \frac{\partial^2\varphi_A}{\partial z_1 \partial \bar{z}_k}(z_0) - \Big(\frac{\partial\varphi_A}{\partial z_k}(z_0)\Big)\Big(\frac{\partial\varphi_A}{\partial z_1}(z_0)\Big)^{-1} \frac{\partial^2\varphi_A}{\partial z_j \partial \bar{z}_1}(z_0) \\
& + \Big(\frac{\partial\varphi_A}{\partial \bar{z}_j}(z_0)\Big)\Big(\frac{\partial\varphi_A}{\partial z_k}(z_0)\Big)\Big(\frac{\partial\varphi_A}{\partial \bar{z}_1}(z_0)\Big)^{-1}\Big(\frac{\partial\varphi_A}{\partial z_1}(z_0)\Big)^{-1} \frac{\partial^2\varphi_A}{\partial z_1 \partial \bar{z}_1}(z_0) \qquad (2 \le j,k \le n)
\end{aligned}
$$

$$a_{j,n+1}(z_0) = (2\sqrt{-1})^{r-1}\Big[\overline{q_{(j)}(z_0, \operatorname{grad}_z \varphi_A(z_0))} - \overline{q_{(1)}(z_0, \operatorname{grad}_z \varphi_A(z_0))}\Big(\frac{\partial\varphi_A}{\partial\bar z_j}(z_0)\Big)\Big(\frac{\partial\varphi_A}{\partial\bar z_1}(z_0)\Big)^{-1}$$
$$+\sum_{1\le k\le n}\overline{q^{(k)}(z_0, \operatorname{grad}_z \varphi_A(z_0))}\Big\{\frac{\partial^2\varphi_A}{\partial\bar z_j\partial\bar z_k}(z_0) - \Big(\frac{\partial\varphi_A}{\partial\bar z_j}(z_0)\Big)\Big(\frac{\partial\varphi_A}{\partial\bar z_1}(z_0)\Big)^{-1}\frac{\partial^2\varphi_A}{\partial\bar z_1\partial\bar z_k}(z_0)\Big\}\Big]$$
$$(2 \le j \le n)$$

$$a_{n+1,n+1}(z_0) = 2^{2(r-1)}\sum_{1\le j,k\le n} q^{(j)}(z_0, \operatorname{grad}_z \varphi_A(z_0))\,\overline{q^{(k)}(z_0, \operatorname{grad}_z \varphi_A(z_0))}\,\frac{\partial^2\varphi_A}{\partial z_j\partial\bar z_k}(z_0)$$

ここで以後の計算を簡単にする為に，別の Hermite 形式 $Q_{z_0}(\tau)$ $(\tau\in\mathbb{C}^{n+1})$ を次の様に導入しよう。

$$Q_{z_0}(\tau) = \sum_{1\le j,k\le n+1} b_{j,k}(z_0)\,\tau_j\overline{\tau_k} \qquad (\overline{b_{j,k}} = b_{k,j})$$

(9)
$$b_{j,k}(z_0) = \frac{\partial^2\varphi_A}{\partial z_j\partial\bar z_k}(z_0) \qquad (1\le j,k\le n)$$
$$b_{j,n+1}(z_0) = \overline{q_{(j)}(z_0, \operatorname{grad}_z \varphi_A(z_0))} + \sum_{1\le k\le n}\overline{q^{(k)}(z_0, \operatorname{grad}_z \varphi_A(z_0))}\,\frac{\partial^2\varphi_A}{\partial\bar z_j\partial\bar z_k}(z_0)$$
$$(1\le j\le n)$$
$$b_{n+1,n+1}(z_0) = \sum_{1\le j,k\le n} q^{(j)}(z_0, \operatorname{grad}_z \varphi_A(z_0))\,\overline{q^{(k)}(z_0, \operatorname{grad}_z \varphi_A(z_0))}\,\frac{\partial^2\varphi_A}{\partial z_j\partial\bar z_k}(z_0)$$

(8) 及び (9) を比較すると，$\sigma\in\mathbb{C}^n$ に対して $\tau\in\mathbb{C}^{n+1}$ を

$$\begin{cases} \tau_1 = -\displaystyle\sum_{2\le j\le n}\Big(\frac{\partial\varphi_A}{\partial\bar z_j}(z_0)\Big)\Big(\frac{\partial\varphi_A}{\partial\bar z_1}(z_0)\Big)^{-1}\sigma_j \\ \tau_j = \sigma_j \qquad (2\le j\le n) \\ \tau_{n+1} = (-2\sqrt{-1})^{r-1}\sigma_{n+1} \end{cases}$$

と定めれば，$L_{z_0}(\sigma) = Q_{z_0}(\tau)$ が成り立っている。従って Q_{z_0} が正定値であれば L_{z_0} も正定値となる。特に各 characteristic point z_0 において Q_{z_0} が正定値ならば，条件 (4) が成立

する。そこで以下においては，Q_{z_0} が正定値かどうかについて考えることにしよう。

最初に，次の二点について注意されたい。まず第一に，$1 \leq j, k \leq n$ に対しては $b_{jk}(z_0) = \frac{1}{4}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_j \partial x_k}(\mathrm{Re}\, z_0) + \frac{1}{2}A\delta_{jk}$（$\delta_{jk}$：Kronecker のデルタ）であるから，$Q_{z_0}$ に対応する Hermite 行列 $\alpha(z_0) \overset{\mathrm{def}}{=} (b_{jk}(z_0))_{1\leq j,k\leq n+1}$ の第 $(n+1)$ 行を含まない主小行列式は，A が大きければすべて正である。従って A が十分大の時 Q_{z_0} が正定値であるためには，$\alpha(z_0)$ の行列式 $\det(\alpha(z_0))$ が正でありさえすればよい。第二に，uniform P-convexity は実の直交変換に対して不変である。実際，実直交行列 M に対して，$\tilde{z} = \tilde{x} + \sqrt{-1}\,\tilde{y}$ を $z - \mathrm{Re}\, z_0 = M\tilde{z}$，即ち $x - \mathrm{Re}\, z_0 = \tilde{x}$，$y = M\tilde{y}$ で定義したとする。この時，領域 Ω_A は，

$$\Omega_A = \{\tilde{z} = \tilde{x} + \sqrt{-1}\,\tilde{y} \in \mathbb{C}^n \mid \psi(\mathrm{Re}\, z_0 + M\tilde{x}) + A|\tilde{y}|^2 < \frac{1}{A}\}$$

と表せる。一方，条件 (1) に現われる不等式については，左辺の最初の二項が，ζ を $\tilde{\zeta} = \mathrm{grad}_{\tilde{z}}\,\varphi_A(\tilde{z})$ で置きかえれば，座標変換に関して不変な形である上に，左辺の第三項及び右辺も実直交変換で不変である。故に，この新しい変数 $\tilde{z}$ に対しても uniform P-convexity が成立する。ところで今 M をうまくとると，新しい座標 $(\tilde{x}, \tilde{y})$ においては $\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\tilde{x}_j \partial\tilde{x}_k}(\mathrm{Re}\,\tilde{z}_0)\right)_{1\leq j,k\leq n}$ を対角行列とすることができる。Q_{z_0} の正定値性は各点 z_0

毎に示せばよいので，従って $\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x_j \partial x_k}(\mathrm{Re}\, z_0)\right)_{1\le j,k\le n}$ さらに $\left(\frac{\partial^2\varphi_A}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(z_0)\right)_{1\le j,k\le n}$ は対角行列であるとして一般性を失わない。

以上述べた注意から，$\left(\frac{\partial^2\varphi_A}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(z_0)\right)_{1\le j,k\le n}$ が対角行列であるという仮定の下に，$\det(\alpha(z_0))$ の正値性を確かめればよいことがわかった。(9) 式を用いて行列式の計算を実行すれば，

(10)
$$\det(\alpha(z_0)) = \left\{\prod_{1\le j\le n}(c_j+\tilde{A})\right\}\cdot\left[\sum_{1\le j\le n}(c_j+\tilde{A})\,|q^{(j)}(z_0, \mathrm{grad}_z \varphi_A(z_0))|^2\right.$$
$$\left. -\sum_{1\le j\le n}\frac{\prod_{1\le k\le n}(c_k+\tilde{A})}{(c_j+\tilde{A})}\,|q_{(j)}(z_0, \mathrm{grad}_z\varphi_A(z_0)) + (c_j-\tilde{A})\,q^{(j)}(z_0, \mathrm{grad}_z\varphi_A(z_0))|^2\right]$$

を得る。ここで $c_j = \frac{1}{4}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_j^2}(\mathrm{Re}\, z_0)$，$\tilde{A} = \frac{1}{2}A$ とかいた。これから容易に次式が導かれる。

(11)
$$\det(\alpha(z_0)) = \Big[\,4\sum_{1\le j\le n} c_j\,|q^{(j)}(z_0, \mathrm{grad}_z\varphi_A(z_0))|^2$$
$$+2\,\mathrm{Re}\left\{\sum_{1\le j\le n} q_{(j)}(z_0, \mathrm{grad}_z\varphi_A(z_0))\,\overline{q^{(j)}(z_0, \mathrm{grad}_z\varphi_A(z_0))}\right\}$$
$$-\frac{1}{\tilde{A}}\sum_{1\le j\le n}|q_{(j)}(z_0, \mathrm{grad}_z\varphi_A(z_0))|^2\,\Big]\,\tilde{A}^n + R(z_0)$$

剰余項については，q が r 次斉次であることにより，ある定数 C_1 があって，

(12) $|R(z_0)| \leqq C_1 \tilde{A}^n \rho^{2(r-1)}\left(1+\frac{\rho}{\tilde{A}}\right)\frac{\rho}{\tilde{A}}$ 　但し $\rho \overset{\mathrm{def}}{=} 1 + A\,|\mathrm{Im}\, z_0|$

が成り立つ。さて，z_0 は $\partial\Omega$ の点であったから $\varphi_A(z_0) = \frac{1}{A}$ をみたしており，従って ρ は A について高々 $\frac{1}{2}$ 次の order

しか持たない。ゆえに $A \to +\infty$ のとき $\frac{\rho}{\tilde{A}} \to 0$。(11), (12) 式を眺めれば，これより uniform P-convexity が，十分大きい A に対して，$\det(\alpha(z_0))$ の正値性を保証することがわかる。よって定理は証明された。　　　Q.E.D.

最後に，ここで述べた閉値域性の system の場合への拡張について一言触れておこう。一般の system の場合に，閉値域性，ひいては解の大域的存在を得ることは今後の課題であるが，少くとも最も簡単な場合，即ち未知函数が一個の一階連立方程式系に対しては，ここで述べたのと全く同様の方法で次の閉値域性を証明することができる。それを定理の形で述べて，この報告を終えることとしたい。

K を $\mathbb{R}^n$ のコンパクト集合とし，K の近傍 U で定義された一階線型微分方程式系 $\mathfrak{M} = \mathcal{D}_{\mathbb{C}^n} / (\sum_{1 \le i \le I} \mathcal{D}_{\mathbb{C}^n} P_i)$ を考える。以下，簡単の為 $\operatorname{proj} \dim \mathfrak{M} = I$ と仮定する。また P_i の principal symbol を $p_i(x, \xi)$ とし，$\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_I) \in \mathbb{C}^I$，$|\alpha| = 1$ に対し，

$$\tilde{p}_\alpha(x, \xi) = \sum_{1 \le i \le I} \alpha_i \, p_i(x, \xi)$$

と定める。

Definition 2

K が次の条件 (1)′ をみたす U 上で定義された実数値実解

析函数 $\psi(x)$ を用いて $K = \{ x \in U \mid \psi(x) \leqq 0 \}$ と表されるとき，K は uniformly $\mathcal{M}$-convex であるという。

$z = x + \sqrt{-1}\, y$ ，$\zeta = \frac{1}{2} \operatorname{grad} \psi(x) - \sqrt{-1}\, A y$ とおくとき，適当な正定数 A_0，C に対して，$A > A_0$ なる限り，不等式：

$$(1)' \quad \begin{aligned} &\frac{1}{2} \sum_{1 \leq j,k \leq n} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_j \partial x_k}(x)\, \tilde{p}_\alpha^{(j)}(z,\zeta)\, \overline{\tilde{p}_\alpha^{(k)}(z,\zeta)} + \operatorname{Re}\Big(\sum_{1 \leq j \leq n} \tilde{p}_{\alpha(j)}(z,\zeta)\, \overline{\tilde{p}_\alpha^{(j)}(z,\zeta)} \Big) \\ &- \frac{1}{A} \sum_{1 \leq j \leq n} | \tilde{p}_{\alpha(j)}(z,\zeta) |^2 \ \geqq \ C \end{aligned}$$

が，$p_i(z,\zeta) = 0 \ (1 \leq i \leq I)$ かつ $A\psi(x) + A^2 |y|^2 = 1$ をみたす任意の (x, y)，及び任意の α に対して成り立つ。

例えば，$\mathbb{R}^{2n}_{(x_1,\cdots,x_{2n})} \simeq \mathbb{C}^n_{(z_1,\cdots,z_n)}$ （$z_i = x_i + \sqrt{-1}\, x_{n+i}$）において，$\mathcal{M} = \mathcal{D}_{\mathbb{C}^{2n}} / \sum_{1 \leq i \leq n} \mathcal{D}_{\mathbb{C}^{2n}} \bar{\partial}_i$ （$\bar{\partial}_i = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_i} + \sqrt{-1} \frac{\partial}{\partial x_{n+i}} \right)$）を考えれば，多変数函数論でいう強擬凸なコンパクト集合 K は，この uniform $\mathcal{M}$-convexity の条件をみたすことがわかる。

<u>Theorem 2</u>

K を $\mathbb{R}^n$ のコンパクト集合，$\mathcal{M} = \mathcal{D}_{\mathbb{C}^n} / \sum_{1 \leq i \leq I} \mathcal{D}_{\mathbb{C}^n} P_i$ を K の近傍で定義された一階線型微分方程式系で，proj dim $\mathcal{M} = I$ をみたすものとする。

この時，K が uniformly $\mathcal{M}$-convex であるならば，

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}(K) & \longrightarrow & \mathcal{A}(K)^I = \mathcal{A}(K) \times \cdots \times \mathcal{A}(K) \\ \Psi & & \Psi \\ u & \longmapsto & (P_1 u, \cdots, P_I u) \end{array}$$

の値域は，$\mathcal{A}(K)^I$ の閉部分空間である。

References

[1] Hörmander, L. : Linear Partial Differential Operators, Springer, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1963.

[2] Kawai, T.: Theorems on the finite-dimensionality of cohomology groups. III, Proc. Japan Acad., 49 (1973), 243-246.

[3] ________ : On the golbal existence of real analytic solutions and hyperfunction solutions of linear differential equations, Proc. Japan Acad., 62-A (1986), 77-79.

[4] ________ : On the global existence of real analytic solutions and hyperfunction solutions of linear differential equations. RIMS, Preprint 555.

[5] Kawai, T. and Y. Takei: On a closed range property of a linear differential operator. Proc. Japan Acad. 62-A (1986). In press.

[6] Kiro, S.: On the global existence of holomorphic solutions and the semi-global existence of real analytic solutions of linear partial differential equations, Weizmann Institute Preprint. (Rehovot, Israel, 1985, Nov.) A revised version will reportedly appear in J. Analyse Math.

[7] Komatsu, H.: Projective and injective limits of weakly compact sequences of locally convex spaces, J. Math. Soc. Japan, 19 (1967), 366-383.

[8] Pallu de La Barrière, P.: Existence et prolongement des solutions holomorphes des équations aux dérivées partielles, I. J. Math. Pures et Appl, 55 (1976), 21-46.

[9] Sato, M., T. Kawai and M. Kashiwara, Microfunctions and pseudo-differential equations, Lecture Notes in Math., No.287 Springer, Berlin-Heidelberg-New York, pp. 265-529, 1973.