

Title	ある種のファイバー空間の変形と周期写像(複素解析と複素幾何)
Author(s)	斎藤, 政彦
Citation	数理解析研究所講究録 (1988), 639: 200-209
Issue Date	1988-01
URL	http://hdl.handle.net/2433/100163
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

ある種のファイバー空間の変形と周期写像

(滋賀大教育, Max Planck Institute)

斎藤 政彦 (Masa-Hiko Saito)

1. 楕円曲面の局所変形は A. Kas の Thesis によつて調べられ, その中で 1 次の無限小変形 (1^{st} order Infinitesimal deformation, 以下 1^{st} I.D.) が obstruction を持つ, 可能な倉西空間の次元が $\dim H^1(X, \mathcal{O}_X)$ よりも真に小さい例が発見された。その後, 幾つかの例が発見された (cf. Namba [4], p11, for references) が, Burns-Wahl [1] が, 曲面の中の (-2) -curve E ($\Leftrightarrow E \cong \mathbb{P}^1, N_E \cong \mathcal{O}_E(-2)$) の存在が, 曲面の 1^{st} order I.D. に 1 次元分, 寄与する事を示し, node のみを持つ \mathbb{P}^3 の超曲面の minimal resolution の 1^{st} order Inf. Def に obstruction があるための必要十分条件を得た。さらに, A. Kas [3] は Burns-Wahl の結果を受けて, 曲面 X の (-2) -curve E に対応する 1^{st} order I.D. $\theta_E \in H^1(X, \mathcal{O}_X)$ に対し local な計算ののち $[\theta_E, \theta_E] \in H^2(X, \mathcal{O}_X)$ (primary obstruction) を計算した。後はこれにより, 楕円曲面を含む,

(-2) curve を含むファイバー空間の構造をもつ曲面を計算し、obstructed な曲面が多く存在する事を示した。

一方、楕円曲面 X の 2nd cohomology $H^2(X, \mathbb{C})$ の Hodge 構造を用いた Infinitesimal Torelli 定理は、[5] によって調べられたが、ほとんどの楕円曲面に対し、上の定理が成立するのに対し、幾つかの Kas の例の中に成立しない反例が見出された。この成立しない例は、曲線の Prym 多様体 (分岐をゆるした) の変形理論により説明される。これは、容易に高次元のファイバー空間の Infinitesimal Torelli の反例に拡張される。[6]

さてこの高次元の例は、ある意味で Kas の例の拡張に当たっていると思われる (上記の (-2)-curve E のかわりに、 $Y^{n-1} \subset X^n$ $Y \rightarrow S$ \mathbb{P}^1 bundle $N_{Y/X} \cong \mathcal{O}_Y(-2)$, $\mathcal{O}_Y(1)$ tautological bundle. なるもの存在を考え、これが $H^1(X, \mathbb{H}_X)$ にどのように寄与するかはわかる。)

以下、この高次元の例の変形について調べた事をのべる。現在の所証明は完成してはいないが、この例は、1st order Inf deformation に obstruction を持つと思われる。さらに高次元の変形に際し、2次元の rational double point の simultaneous Resolution と違った現象が見られ、これは高次元の分類の際に singularity を許した mini^{mal} model を考えなければ

いけな事にも関係して興味深い。

2. さて、以下考える例について述べよう。($n \geq 2$ とする)

$$\left\{ \begin{array}{l} B \subset \mathbb{P}^{n-1} : \text{非特異超曲面 (degree } B = 2d) \\ \phantom{B \subset \mathbb{P}^{n-1}} \phantom{\text{非特異超曲面}} B = 2d)} \\ \phantom{B \subset \mathbb{P}^{n-1}} \phantom{\text{非特異超曲面}} B = 2d)} \\ \pi_1: Z \rightarrow \mathbb{P}^{n-1} : \text{double cover branched along } B \\ C : \text{非特異代数曲线 } g = \text{genus of } C \\ \mathcal{L} \in \text{Pic}(C), \deg \mathcal{L} = l \geq 0 \text{ s.t. } H^0(C, \mathcal{L}^2) \neq 0 \\ \delta = P_1 + \dots + P_{2l} \in C \text{ s.t. } \mathcal{O}_C(\delta) \cong \mathcal{L}^2 \\ (P_i \neq P_j \text{ ; } (i+j) \text{ は偶数)} \\ \pi_2: \tilde{C} \rightarrow C \text{ double cover branched at } \delta \\ \text{and s.t. } \pi_2^* \mathcal{O}_{\tilde{C}} = \mathcal{O}_C \otimes \mathcal{L}^{-1}. \end{array} \right.$$

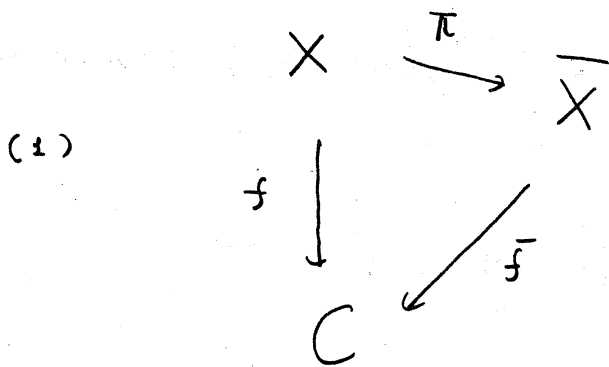
これを注意し、 $Z \times \tilde{C} \rightarrow \mathbb{P}^{n-1} \times C$ なる分岐被覆を考える。これは Galois 被覆であり、Galois 群は $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ である。 $\mathbb{Z}_2 \hookrightarrow \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ (diagonal) と考え、それに対応する多様体 \bar{X} と書く。すなわち、

$$\bar{X} = Z \times \tilde{C} / \langle \tau_1, \tau_2 \rangle$$

(τ_1, τ_2 は Z, \tilde{C} の involution) .

$$\begin{array}{ccccc} & & Z \times \tilde{C} & & \\ & \swarrow & \downarrow u & \searrow & \\ \mathbb{P}^{n-1} \times \tilde{C} & & \bar{X} & & Z \times C \\ & \searrow & \downarrow v & \swarrow & \\ & & \mathbb{P}^{n-1} \times C & & \end{array}$$

また、 $Z \rightarrow \mathbb{P}^{n-1}$ の ramification locus をやはり $B \subset Z$ と書く。 $B \times \delta \subset Z \times \tilde{C}$ が involution $\tau_1 \times \tau_2$ の fixed set であり、 $u: Z \times \tilde{C} \rightarrow \bar{X}$ に付る像 $u(B \times \delta)$ に沿って \bar{X} は 特異点を持つ。その特異点は局所的には $(A_1 \text{ 型}) \times (\text{smooth variety})$ の形としていえる事に注意する。このような特異点を A_1 型とよぶ事にしよう。 $u(B \times \delta) = \bar{B} \times \bar{\delta}$ と書く。 $\bar{B} \times \bar{\delta}$ は \bar{X} の中で余次元 2 である。この特異点集合に若干回 Blow up すると、非特異な多様体 X を得る。又 canonical 写像 $\bar{f}: \bar{X} \rightarrow C$ は自然に $f: X \rightarrow C$ へと拡張される。



f のファイバーは、 $p \in C - \delta \Rightarrow f^{-1}(p) = Z$, $p = p_i \in \delta \Rightarrow f^{-1}(p_i) = 2D_i + E_i$, $D_i \cong \mathbb{P}^{n-1}$, $E_i = \pi^{-1}(\bar{B} \times \bar{p}_i)$, $\rho_i: E_i \rightarrow B: \mathbb{P}^1$ -bundle $E_i \cong \mathbb{P}(\mathcal{E})$, $\mathcal{E} = \mathcal{O}_B \oplus \mathcal{O}_B(-d)$ である。($\mathcal{O}_B(1) = \iota^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(1)$, $\iota: B \hookrightarrow \mathbb{P}^{n-1}$)

$$N_{E_i \subset X} \cong \mathcal{O}_{E_i}(-2) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(-2).$$

3. 2で述べた X あるいは \bar{X} の変形について述べよう。 \bar{X} は cyclic quotient singularity とも呼ばれ、^(normal) V -variety (Schenck, 佐武) とある。 \bar{X} の singular locus $\Sigma (= \bar{B} \times \bar{P})$ と書かれ $j: \bar{X} - \Sigma \hookrightarrow \bar{X}$ は埋め込みと見るとき

$$\mathbb{H}_{\bar{X}} \cong j_* \mathbb{H}_{\bar{X} - \Sigma}$$

$$\Omega_{\bar{X}}^p \cong j_* \Omega_{\bar{X} - \Sigma}^p \quad (p \geq 1)$$

と定義する。($\Omega_{\bar{X}}^p$ は普通の Kähler differential の定義と違いますが、 $\mathbb{H}_{\bar{X}}$ は通常のもので一致する。)

\bar{X} の倉西空間の Zariski tangent space は

$$\mathbb{T}_{\bar{X}}^1 = \text{Ext}^1(\bar{X}; \Omega_{\bar{X}}^1, \mathcal{O}_{\bar{X}})$$

と与えられる。 さて $T_{X^1} \cong \text{Ext}_{\mathcal{O}_x}^1(\Omega_{\bar{X}}^1, \mathcal{O}_{\bar{X}})$ (local ext.)

とみると、次の exact sequence がある。

$$0 \rightarrow H^1(\bar{X}, \mathbb{H}_{\bar{X}}) \rightarrow \mathbb{T}_{\bar{X}}^1 \rightarrow H^0(\bar{X}, T_{X^1})$$

$$\rightarrow H^2(\bar{X}, \mathbb{H}_{\bar{X}}) \rightarrow$$

さて、§2 の状況のもとで、次がわかる。

命題 1. (1) $(d-n)(g+l-2) > 0$, $n \geq 3$ ならば

$$H^1(\bar{X}, \mathbb{H}_{\bar{X}}) = H^1(Z, \mathbb{H}_2) \oplus H^1(C, \mathbb{H}_2(-S))$$

(2) $n \geq 3 \Rightarrow H^2(\bar{X}, \mathbb{H}_{\bar{X}}) = H^1(Z, \mathbb{H}_2) \oplus H^1(C, \mathcal{O}_C)$

(3) $T_{X^1} \cong \text{Ext}^1(\Omega_{\bar{X}}^1, \mathcal{O}_{\bar{X}}) \cong \bigoplus_{B_i} \mathcal{O}_{B_i}(2d)$, $B_i = \bar{B} \times \bar{P}$.

(証明) $H^i(\bar{X}, \mathbb{H}_{\bar{X}}) = H^i(Z \times \tilde{C}, \mathbb{H}_{Z \times \tilde{C}})^{\langle 4, 1, 2 \rangle}$ (cf. e.g. Fujiki [2])

より (1), (2) は明らか。 (3) は Fujiki [2], p125 を modify

すなわち, $T_X^1 \cong \bigoplus \left(\bigwedge^2 N_{B_i \subset \mathbb{C}P^{n-1}} \right)$ を得る. $N_{B_i \subset \mathbb{C}P^{n-1}} \cong \mathcal{O}_{B_i} \oplus \mathcal{O}_{B_i}(2d)$ より (3) を得る.

さて, $H^0(\bar{X}, T_X^1) = \bigoplus_{i=1}^{2l} H^0(B_i, \mathcal{O}_{B_i}(2d))$ の空間は \bar{X} の singularity を smoothing する deformation を表す. これは, local には次の式で書ける. $B = \{ F(x_0, \dots, x_n) = 0 \} \subset \mathbb{C}P^{n-1} \subset \mathbb{C}P^{n-1} \times \Delta_{\epsilon}$ ($\Delta_{\epsilon} = \{ t, |t| < \epsilon \}$) の divisor B と $F(x_0, \dots, x_n) = 0$ で定まる. この double cover $y^2 + t F(x_0, \dots, x_n) = 0$ と考えれば, singular set は $y = t = F(x_0, \dots, x_n) = 0$ である. 新たに $G(x_0, \dots, x_n)$ を $2d$ 次斉次式とし, 新たに変数 s を付け加え, $\mathbb{C}P^{n-1} \times \Delta_{\epsilon} \times \Delta_{\epsilon}$ 上の double cover $\mathcal{X} : y^2 + t F(x_0, \dots, x_n) + s G(x_0, \dots, x_n) = 0$ を考える. $G \in \text{Generic}$ に取り $s \neq 0$ を固定すると \mathcal{X}_s は smooth である. しかし total space \mathcal{X} は, $y = t = s = F = G = 0$ で singularity を持ち, さらに, $n \geq 3$ ならば, simultaneous resolution できない. (この $G \in H^0(B, \mathcal{O}_B(2d))$ は存在しない.)

次に X の 1st order Infinitesimal deformation を考える. この時 \bar{X} の 1st order I.D. のうち, $H^1(\bar{X}, \mathcal{H}_{\bar{X}})$ に対応する部分は, \bar{X} の local trivial な変形に対応し X の変形を導く. 又 命題 1, (1) より

$H^1(\bar{X}, \mathcal{O}_{\bar{X}}) = H^1(Z, \mathcal{O}_Z) \oplus H^1(C, \mathcal{O}_C(-\delta))$ であり前者は
 Z の変形 $((d-n)(g+l-2) > 0, n \geq 3$ かつ, double cover としての変形(あり))
 後者は, C の変形と divisor δ の変形を表現する。これは必ず
 実際に実現されるから unobstructed な変形である。

さて $X \supset \bigcup_{i=1}^{2l} E_i = E$ なる例外集合に注目し, 次の2つ
 の exact sequence

$$(2) \quad \rightarrow H^0(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow H^0(U, \mathcal{O}_U) \rightarrow H_E^1(\mathcal{O}_X) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow H^1(U, \mathcal{O}_U) \rightarrow$$

$$(3) \quad 0 \rightarrow \mathcal{O}_X(-l_E E) \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \begin{array}{c} N_E \rightarrow 0 \\ \oplus_{i=1}^n N_{E_i} \end{array}$$

命題 2. (1) $H_E^1(\mathcal{O}_X) \hookrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X)$

(2) $H_E^1(\mathcal{O}_X) \cong \bigoplus_{i=1}^{2l} H^0(B_i, \mathcal{O}_{B_i}(d))$

証明: $n=2$ の時の Burns-Wahl の証明([1], (1.3)) に従う。 $\pi: X \rightarrow \bar{X}$ に対し, $\pi_* \mathcal{O}_X = \mathcal{O}_{\bar{X}}$ なる事と

\bar{X} の normality から, $H^0(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow H^0(U, \mathcal{O}_U)$ が従う。

(2) $H_E^1(\mathcal{O}_X) = \varinjlim_n \text{Ext}^1(\mathcal{O}_{nE}, X)$ と計算する。(略)

(注)

$n = \dim X = 2$ の時, E_i は, -2 curve $2l$ 個の disjoint
 な集合である。又 B_i は点の集りであるから, $H_E^1(\mathcal{O}_X) \cong \bigoplus \mathbb{C}[E_i]$

$\cong \mathbb{C}^{2ld}$. (1) と合せると, 各 (-2) -curve が $H^1(X, \mathbb{O}_X)$ に独立に寄与する。A. Kas [3]によれば, この時, $d \geq 2$, $g+d-1 \geq 1$ ならば, このふうな 1 つ 1 つ の (-2) curve に対応する, 1st order def. は obstructed.

(3) の exact sequence より次を得る。

命題 3.

$$(1) \quad 0 \rightarrow H^0(X, \mathbb{O}_X(-\log E)) \rightarrow H^1(\mathbb{O}_X) \rightarrow H^1(E, N_E) \rightarrow 0$$

$$(2) \quad H^1(E, N_E) \cong \bigoplus_{i=1}^{2g} H^0(B_i, \mathcal{O}_{B_i}(d))$$

(証明) (2): 命題 2, (2) の証明の途中で, $H_E^1(\mathbb{O}_X) \cong H^1(E, N_E)$ を得る。よって (2) を得る。(1) は (3) の exact sequence と $H^0(E, N_E) \cong H^0(E, \mathcal{O}_E(-2)) = 0$ 及び, $H_E^1(\mathbb{O}_X) \hookrightarrow H^1(\mathbb{O}_X)$ から逆に $H^1(\mathbb{O}_X) \twoheadrightarrow H^1(E, N_E)$ が成り立たなければならない。($H^1(E, N_E) \neq 0$ ならば $E \subset X$ を変形して消して (1) の変形に対応する。)

4. 上の命題 3 における, $H_E^1(\mathbb{O}_X) \cong H^1(E, N_E)$ を, X の変形の \checkmark local contribution と呼ぶ。(Burns-Wahl [1]) さて, ここに注目してほしいのは, \bar{X} の変形の際の local

contribution $H^0(\bar{X}, T_X') \cong \oplus H^0(B_i, \mathcal{O}_{B_i}(2d))$ に対し
 $H^1(\mathcal{O}_X) \cong \oplus H^0(B_i, \mathcal{O}_{B_i}(d))$ と $\mathcal{O}_{B_i}(2d) \rightarrow \mathcal{O}_{B_i}(d)$ に置き代
 へる点である。これは次の事実に対応する。前と同様に
 $y^2 + xF(x_0, \dots, x_n) = 0$ の変形を考えるが、今度は $\phi(x_0, \dots, x_n)$
 という d 次斉次式を取り、 $\bar{X}: y^2 + xF + s^2\phi^2 = 0$ なる
 double cover を考える。 $\bar{X} \rightarrow \mathbb{P}^{n-1} \times \Delta_t \times \Delta_s$ すると
 \bar{X} は $y = x = F = s = 0$ と $y = x = F = \phi = 0$ に $\epsilon > 0$,
 small resolution を許す singularity を持つ。結果的に
 $\bar{X} \rightarrow \bar{X}$ なる resolution が存在し、 $\bar{X} \rightarrow \Delta_s$ は、
 $g^1(0)$ の smooth な変形族になっている。この family
 の様子が $\phi \in H^0(B_i, \mathcal{O}_{B_i}(d))$ に対応する smoothing の状況を表し
 ている。

さて、このようにして $H^1(\mathcal{O}_X)$ の local contribution は
 $f: X \rightarrow C$ の singular fiber の近傍で実現される事が、わか
 ったが、 X 上で global にこの local contribution にあたる
 部分の変形が実現されるかは別の問題である。

予想 $g(C) \geq 1$ ならば、local contribution は
 obstructed である。

これが言えれば、 X は obstructed なる 1st order I.D
 を持つ例となる。

5. 終りに。上のファイバ-空間 $f: X \rightarrow C$ の周期写像については [6] を見よ。

References

- [1] D.M. Burns, J.M. Wahl; Local Contributions of Global Deformations of Surfaces; Inv. Math. 26, 67-88 (1974)
- [2] A. Fujiki; On Primitve Symplectic Compact Kähler V -manifolds of dim. Four; Classification of Alg. and Anaty. Manifold; Progress in Math. Vol 39. 71-250, 1982
- [3] A. Kas; Ordinary double points and obstructed surfaces; Topology, Vol 16, 51-64, 1977
- [4] M. Namba; Families of Meromorphic Functions on Compact Riemann surfaces; Lec. Note in Math. 767,
- [5] M.-H. Saito; On the infinitesimal Torelli problem of elliptic surfaces; J. of Math, Kyoto Univ. 23-3, 441-460, 1983
- [6] _____; Differentials of Prym maps and counterexamples of the infinitesimal Torelli theorem. preprint.