

Title	複素力学系と tree 上の区分的線型写像(複素解析と複素幾何)
Author(s)	宍倉, 光広
Citation	数理解析研究所講究録 (1988), 639: 68-76
Issue Date	1988-01
URL	http://hdl.handle.net/2433/100174
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

複素力学系と tree 上の区分的線型写像

京大理 実倉 光広 (Mitsuhiro Shishikura)

$f(z)$ を \mathbb{C} 係数の一変数有理関数 (次数 ≥ 2) とするとき、Riemann 球面 $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ から 它れ自身への写像 $f: \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ が定義される。これが表題の「複素力学系」である。本稿では、この力学系が (a) attractive periodic point を持つ場合 と (b) Siegel disk または Herman ring を持つ場合 (定義は後で述べる) に、ある種の tree T と其の上の区分的線型写像 $F: T \rightarrow T$ を結びつける方法について述べる。この tree は、もとの複素力学系の不変集合 (Julia set など — 後述) の位相的、関数論的性質を反映するものである。

1. f -invariant foliation, \mathcal{F} と B .

この節では、(a), (b) それぞれの場合に、次の性質をもつ foliation \mathcal{F} (real codimension 1) を定義する:

\mathcal{F} は ある open set $U \subset \bar{\mathbb{C}}$ ($U \neq \emptyset, f^+(U) = U$) 上の特異点 (次ページの図) を持つ foliation で、 f で不変。さらに、

f の regular leaf (特異点を含まない leaf) は Jordan curve.



f の特異点の例

(a) attractive periodic point を持つ場合.

$z_0 \in \bar{\mathbb{C}}$ が attractive periodic point とは、ある $p \geq 1$ があって、 $f^p(z_0) = z_0$ (ただし $f^p = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_p$) かつ $|(f^p)'(z_0)| < 1$ となること。(ただし、 $z_0 = \infty$ のときは、適当に座標変換してから定義する)

このとき、 z_0 の近傍 U_0 ($f(U_0) \subset U_0$) と等角写像 $\varphi: U_0 \rightarrow \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r_0\}$ ($0 < r_0 < 1$) が存在して、

$$\varphi \circ f^p \circ \varphi^{-1}(z) = \begin{cases} \lambda z & (\lambda = (f^p)'(z_0) \neq 0 \text{ のとき}) \\ z^k & (\lambda = 0 \text{ のとき, } k \text{ は } f^p \text{ の } z_0 \text{ の degree}) \end{cases}$$

とできることが知られている。 $\mathcal{F}_0 = \{\varphi^{-1}(\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = r\}) \mid 0 \leq r < r_0\}$ と定義すると、 \mathcal{F}_0 は U_0 上の invariant foliation になる。そこで、 \mathcal{F}_0 を f によって次々に引きもどしていけば、

$U = \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(U_0)$ まで invariant foliation \mathcal{F} を定義することが出来る。このとき \mathcal{F} は上に述べた性質を持つ。

$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ は branched covering になっているから、 γ を Jordan curve とするとき、 $f^{-1}(\gamma)$ の 1 つの連結成分は Jordan curve か または、上図のような特異点をもつ curve になる。後者は f の critical point (f が局所的に 1 対

1 にならない点 — $z \neq \infty, f(z) \neq \infty$ なる $f(z) = 0$ と同値) を含む
 ときに起こる。

(b) Siegel disk または Herman ring を持つ場合

open set $U_0 \subset \mathbb{C}$ が Siegel disk とは、ある $p \geq 1$ があ
 って、 $f^p(U_0) = U_0$ となり、ある等角写像 $\varphi: U_0 \rightarrow \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$
 があって、 $\varphi \circ f^p \circ \varphi^{-1}(z) = e^{2\pi i \theta} z$ ($\theta \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$)
 となることをいう。Herman ring とは $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ を annulus
 $\{z \in \mathbb{C} \mid r_0 < |z| < 1\}$ ($0 < r_0 < 1$) に置きかえたものである。

Siegel disk あるいは Herman ring をもつ複素力学系が存在する
 ことは知られている。

$\mathcal{F}_0 = \{\varphi^{-1}(\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = r\}) \mid 0 \leq r < 1 \text{ あるいは } r_0 < |z| < 1\}$ は U_0 上
 の invariant foliation で、これを (a) と同様に f で引きもどし
 て、 $U = \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(U_0)$ 上の invariant foliation \mathcal{F} が定
 義できる。この \mathcal{F} もやはり、この節の最初に述べた性質をも
 つ。

集合 B の定義： 次のような性質をもつ集合 B を定義する。

$f(B) \subset B$; B は有限個の連結成分からなる; B は \mathcal{F} の
 regular leaf とは交わらない。

実際、以下のように定義する。

(a) の場合. $B = \{z_0, f(z_0), \dots, f^{p-1}(z_0)\}$

(b), Siegel disk の場合 $B = \partial U_0 \cup \partial f(U_0) \cup \dots \cup \partial f^{p-1}(U_0) \cup \{z_0, f(z_0), \dots, f^{p-1}(z_0)\}$ ただし $z_0 = \varphi^{-1}(0)$ と定義する。

(b), Herman ring の場合 $B = \partial U_0 \cup \partial f(U_0) \cup \dots \cup \partial f^{p-1}(U_0)$.

2. leaf space Γ 上の measure m .

$\Gamma = \{ \gamma : \text{regular leaf of } \mathcal{F} \mid \forall n \geq 0 \ f^n(\gamma) \text{ は } B \text{ を分割する} \}$ と定義する。ここで, Jordan curve γ が B を分割するとは, B が $\mathbb{C} - \gamma$ の 2 つの連結成分と交わることをいう。

任意の $\gamma_0 \in \Gamma$ に対し, 次のような近傍 V がとれる:

$\gamma_0 \subset V_{\text{open}} \subset \mathbb{C}$; 等角写像 $\mathcal{Z}: V \rightarrow \{z \in \mathbb{C} \mid r_V < |z| < 1\}$

($0 < r_V < 1$) が存在して, $\gamma_0 = \mathcal{Z}^{-1}(\{|z| = r_0\})$; さらに,

$r_V < r < 1$ をみたす r について, $\mathcal{Z}^{-1}(\{|z| = r\})$ は Γ に属する \mathcal{F} の leaf。

このとき, Γ 上の measure m を, V について,

$$m(\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma \subset V\}) = \frac{1}{2\pi} \log r_V$$

をみたすように定義できる。(これは annulus V の modulus に等しい。)

3. tree T と map $F: T \rightarrow T$ の定義.

$\mathbb{C} \ni x, y$ に対し, $d(x, y)$ を

$$d(x, y) = m(\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma \text{ は } x \text{ と } y \text{ を分離する}\})$$

で定義する. γ が x と y を分離とは, x と y が $\mathbb{C} - \gamma$ の異なる成分に属することをいう.

このように定義すると, d は有限個の点を除いて有限で, \mathbb{C} 上の pseudo metric になる. すなわち, $d(x, x) = 0$, $d(x, y) = d(y, x)$, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ をみたす. ここで,

T の定義 $T = \mathbb{C} / \sim$, ただし $x \sim y \Leftrightarrow d(x, y) = 0$

さらに, $\pi: \mathbb{C} \rightarrow T$ を projection とし, $x, y \in T$ に対し, $d(x, y) = d(\pi^{-1}(x), \pi^{-1}(y))$ とすれば well defined である.

F の定義 $F: T \rightarrow T$ を $F(x) = \pi \circ f \circ \partial \pi^{-1}(x)$ で定義する. ただし, $\partial \pi^{-1}(x)$ は $\pi^{-1}(x)$ の \mathbb{C} 内での境界である. この F は well defined である.

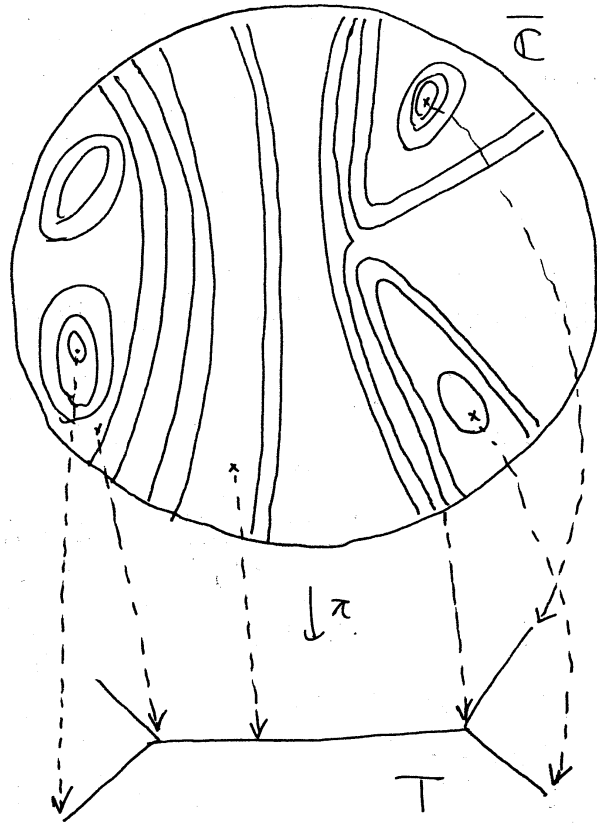
この (T, d, F) について次の定理が成立する.

定理1 T は tree (単連結な 1次元単体的複体) であり, $F: T \rightarrow T$ は, 連続な区分的線型写像 (ある有限集合 $S \subset T$ があって, $T - S$ の各連結成分 T' に対し, 定数

$k = k_T$ があって $d(F(x), F(y)) = k \cdot d(x, y)$ ($x, y \in T'$) となる。

さらに、上の定数 k_T は 正の整数になる。

証明は述べないが、右図をみれば、何故 T が tree になるか理解できるであろう。また、 $T' \ni x$ で $\gamma = \pi^{-1}(x) \in \Gamma$ のとき、 $k_T = (\text{covering map } f: \gamma \rightarrow f(\gamma) = \pi^{-1}(F(x)) \text{ の degree})$ であることも注意しておく。



4. 例

(a) の例. $f(z) = C \left(\frac{z}{1+z^2} \right)^3$, $|C|$ 十分大 (例えば $|C| > 67$)

$z_0 = 0$ は attractive fixed point ($p=1$). ここで B は

前の定義を少し変えて、 $B = \{z_0 = 0, \infty\}$ とする。(これ

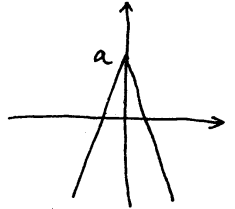
でも同様の定理が成立し、tree が構成できる。

このとき, $T = \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

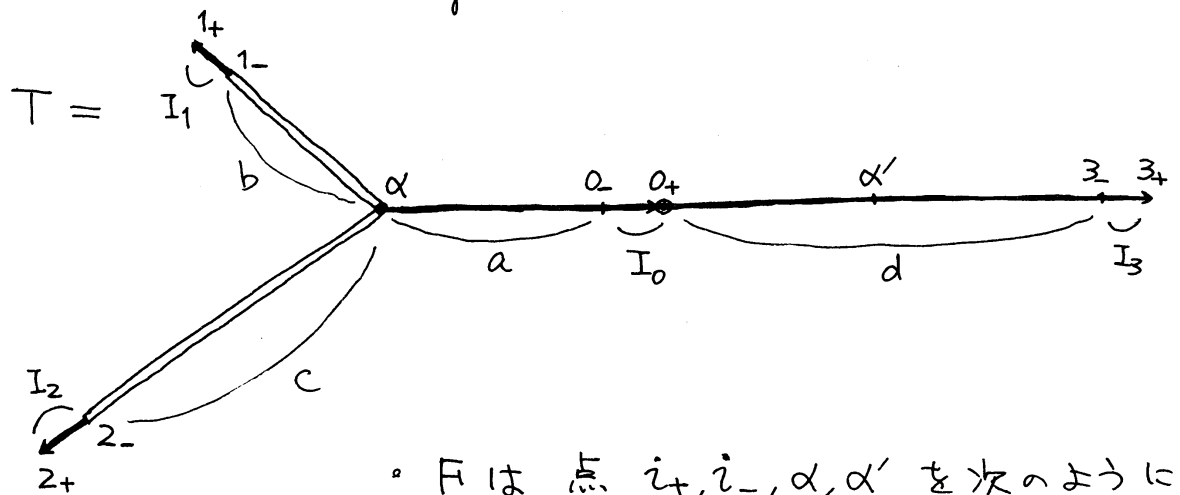
$$\pi(0) = -\infty, \pi(\infty) = +\infty, \pi(\pm 1) = 0$$

$$F(x) = a - 3|x| \quad (a > 0)$$

となる。



(b) の例. Herman ring の場合.



° F は点 $i_+, i_-, \alpha, \alpha'$ を次のように

$$\begin{cases} 0_+ \rightarrow 1_+ \rightarrow 2_+ \rightarrow 3_+ \\ \leftarrow \text{ (} i_- \text{ と同様) } \\ \alpha' \rightarrow \alpha \curvearrowright \end{cases}$$

° これら点を除いた各線分上で F は線型
線分 b, c 上では $k=2$, それ以外で $k=1$

° これらの情報から各線分の長さを $|I_0|=e$
で表わすことができる。: $|I_i|=e$ ($i=0,1,2,3$)

$$|a|=|b|=2e, |c|=4e, |d|=5e$$

•このような tree をもつ有理関数 $f(z)$ を具体的に求めることはできない。しかし、次節で述べる定理によれば、その存在は保証される。(deg $f = 3$ とできる)

5. tree の実現問題

定理1により、有理関数(複素力学系)から、 T と F が構成されたわけだが、逆に定理1の結論をみたすような T と F に対し、いつ有理関数から得られたものになるか? という問題が生じる。つまり、与えられた tree T とその上の区分的線型写像 F から、それらを実現するような有理関数を構成できるか、という問題である。これに関しては、

(定理2) T と F が ある条件 をみたせば、それらを実現する有理関数を構成することができる。

“ある条件” というのは長いので省略するが、少なくとも前節の (b) の例には定理2は適用することができる。

定理2は、擬等角写像を用いた手術の方法によって証明される。

6. 応用

いくつかの応用があるが、ここでは1つだけ述べる。

$P(z)$ を z の \mathbb{C} 係数多項式とし、 $(\deg P \geq 1)$ 有理関数 $f(z)$ を $f(z) = z - \frac{P(z)}{P'(z)}$ で定義する。

注意. $f(z)$ の iteration $f^n(z)$ を計算するのが、方程式 $P(z) = 0$ の解を見つけるための Newton 法である。

tree の理論を使って次が示せる。

定理3 $f(z) = z - \frac{P(z)}{P'(z)}$ の Julia set は連結である。

有理関数 $f(z)$ の Julia set は

$J = \{z \in \mathbb{C} \mid z \text{ のどんな近傍でも } f^n (n=1, 2, \dots) \text{ は同等連続でない}\}$

と定義される。

詳しい内容については、

M. Shishikura, Trees Associated to the Configuration of Herman rings, To appear in Ergodic Theory and Dynamical Systems