数理解析研究所講究録
641巻 1988年 230-244

半順序集合と表現次数

東大・理　有木　進　(Susumu Ariki)
東大・理　中邨博之　(Hiroyuki Nakamura)
東大・理　中村博昭　(Hiroaki Nakamura)

§1 序

この稿では、近年さかんに研究されているYoung図形を用いた組合せ理論とWeyl群の表現論の関係についての一側面を取り出してintroductoryな解説を行う。題材としては、対称群の既約表現の次数の和(あるいはinvolutionの個数)に関するChowla-Herstein-Mooreの母関数を取り上げる。

記号: 有限群Gの複素既約指標の全体の集合をIrr(G)とかく。d(G)をGの複素既約指標の表現次数の総和とし、またt(G)をGのinvolution(及び単位元)の個数とする。すなわち

$$d(G) = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}G} \dim \chi$$

$$t(G) = \#\{ g \in G \mid g^2 = 1 \}$$

これらの記号は以下いちいち断わらないで用いる。

上に述べた母関数というのは次の定理のことである。

定理1 [Chowla-Herstein-Moore 1] n次対称群$\mathfrak{S}_n$について

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d(\mathfrak{S}_n)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t(\mathfrak{S}_n)}{n!} x^n = \exp\left(x + \frac{1}{2}x^2\right)$$

この等式は容易に古典Weyl群の場合に拡張できたので，その形については§8を参照されたい。$t(\mathfrak{S}_n)$に関する部分の別の方向の拡張については§6で触れてある。

§2 Frobenius-Schurの理論 ($t(G)=d(G)$となるための条件)

有限群Gの正則表現の指標をr_Gとかくと，$g \neq 1$のときは$r_G(g)=0$でかつ$r_G(1)=|G|$であるから，$t(G)$は$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} r_G(g^2)$と等しい。$r_G$は$G$の各既約指標をその次数個ずつ含むことから

$$t(G) = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} (\dim \chi) \left\{ \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} \chi(g^2) \right\}$$

が成り立つ。有限群の表現論で古典的なFrobenius-Schur理論([Serre 10])によれば，

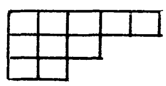
$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \chi(g^2) = \begin{cases} 1 & \chi\text{が}\mathbb{R}\text{上実現可能のとき} \\ -1 & \chi\text{の指標値は}\in\mathbb{R}\text{だが}\mathbb{R}\text{上実現不能} \\ 0 & \chi\text{の指標値に}\notin\mathbb{R}\text{のものがあるとき} \end{cases}$$

であることが知られている。従って

<u>命題2</u>　$t(G)=d(G)$ が成り立つための必要十分条件は，G のすべての既約表現が $\mathbb{R}$ 上実現可能であることである。

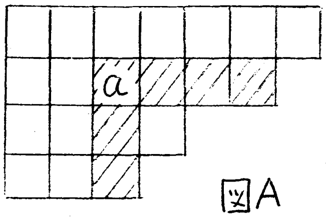
我々が先程考えた対称群 $\mathfrak{S}_n$ や §3 で述べる古典Weyl群については，既約表現は $\mathbb{Q}$ 上実現可能であることが知られているので勿論上の条件をみたす。しかし対称群 $\mathfrak{S}_n$ については §4, §5 で，これらの理論を用いないで $d(\mathfrak{S}_n)=t(\mathfrak{S}_n)$ を証明する道筋を与えようと思う。そうすることで半順序集合と表現論の関連性の一側面を見ることができるからである。交代群 $\mathfrak{A}_n$ については $\mathbb{R}$ 上実現可能でない既約表現が存在し得るので $t(\mathfrak{A}_n)$ と $d(\mathfrak{A}_n)$ は一般には異なる。

§3　Young図形，古典Weyl群の表現論

自然数 $(\geqq 1)$ の有限非増加列 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_\ell)$ を"分割"と呼び，ℓ を λ の長さといい $\ell(\lambda)$ であらわし，$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_\ell$ を λ の大きさといい $|\lambda|$ であらわす。分割 λ には左端をそろえて第1行に λ_1 個，第2行に λ_2 個…の箱を並べてできる図形"Young図形"をassociateさせるのが普通である。例えば，$\lambda=(5,3,2)$ なら対応するYoung図形は  となる。以後，分割 λ とその Young 図形とは同一視して考える。

Young 図形 λ の各箱 a に対して a を角とする

$\boxed{a}$ 状の部分の箱の数 $h(a)$ を箱 a の



図A

<u>hook length</u> という。又，λ の箱 a が

i 行 j 列にあるとき，<u>content number</u> $C(a)$

を $C(a) := j - i$ で定義する。図Aのように $\lambda = (7, 6, 4, 3)$ で，

2行3列の箱 a については $h(a) = 6$，$C(a) = 1$ となるわけで

ある。a が λ の箱すべてを走るときの hook length の積 $\prod_{a \in \lambda} h(a)$

を λ の <u>hook product</u> といい $h(\lambda)$ であらわす。

Young 図形を用いて共役類や既約指標を parametrize できる有限群の系列として古典 Weyl 群と呼ばれているものがある。対称群 $\mathfrak{S}_n$ の共役類が cycle type（即ち分割）であらわされることはよく知られているが，実は $\mathfrak{S}_n$ は A_{n-1} 型の複素単純 Lie 群の Weyl 群 $W(A_{n-1})$ と同型である。同様にして B_n 型の Weyl 群 $W(B_n)$ や D_n 型の Weyl 群 $W(D_n)$ がある。B_n 型と C_n 型は Lie 群は異なるが，Weyl 群は同型になってしまい，$n \times n$ 行列で各行各列に 0 でない成分が 1 つしかなく，それが ± 1 であるようなものからなる群である。

例.

$$W(B_3) \cong W(C_3) \cong \left\{ \begin{pmatrix} \pm1 & & \\ & \pm1 & \\ & & \pm1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pm1 & & \\ & & \pm1 \\ & \pm1 & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & \pm1 & \\ \pm1 & & \\ & & \pm1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & & \pm1 \\ & \pm1 & \\ \pm1 & & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & & \pm1 \\ \pm1 & & \\ & \pm1 & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & \pm1 & \\ & & \pm1 \\ \pm1 & & \end{pmatrix} \right\}$$

位数 $= 2^3 \cdot 3! = 48$.

$W(D_n)$は$W(B_n)$の指数2の部分群で(-1)の成分が偶数個の行列からなる群である。これらの群は既約指標が表現論的に意味のある方法でYoung図形を用いて次のようにparametrizeされる（［岩堀11］，［Mayer 2］参照）。

まず$\mathrm{Irr}(\mathfrak{S}_n)$は，箱数$n$のYoung図形全体の集合と一対一に対応し，Young図形λに対応する既約指標をχ_λとかくと，

(1) 次数公式：　$\dim \chi_\lambda = \dfrac{n!}{h(\lambda)}$　但し　$n=|\lambda|$

(2) 制限公式：　$\mathfrak{S}_{n-1}$を自然な方法で$\mathfrak{S}_n$の部分群とみたとき，

$$\chi_\lambda \downarrow^{\mathfrak{S}_n}_{\mathfrak{S}_{n-1}} = \sum_{\substack{\mu \subset \lambda \\ |\mu| = |\lambda| - 1}} \chi_\mu$$

などが成立する。（ここで$\mu \subset \lambda$は$\mu_i \leqq \lambda_i : \forall i$を意味する。）

$\mathrm{Irr}(W(B_n))$は，箱数の合計がnとなるようなYoung図形のpairの集合$\{(\lambda,\mu) \mid |\lambda|+|\mu|=n\}$と一対一に対応していて，

(3) 次数公式：　$\dim \chi_{(\lambda,\mu)} = \dfrac{n!}{h(\lambda)h(\mu)}$

が成立する。

またこの$W(B_n)$の既約指標を$W(D_n)$に制限するとき，

(4) 制限公式：

$\lambda \neq \mu$のとき，$\chi_{(\lambda,\mu)} \downarrow^{W(B_n)}_{W(D_n)} = \chi_{(\mu,\lambda)} \downarrow^{W(B_n)}_{W(D_n)} = \chi_{\{\lambda,\mu\}}$

$\lambda=\mu$のとき，$\chi_{(\lambda,\lambda)} \downarrow^{W(B_n)}_{W(D_n)} = \chi^+_{\{\lambda\}} \oplus \chi^-_{\{\lambda\}}$　（$\chi^+_{\{\lambda\}} \neq \chi^-_{\{\lambda\}}$，次元は等分）

がなりたち，$\chi_{\{\lambda,\mu\}}$，$\chi^+_{\{\lambda\}}$，$\chi^-_{\{\lambda\}}$　は$W(D_n)$の相異なる既約指標

のすべてを与える。

注：(2)の形の $W(B_n)$, $W(D_n)$ の制限公式は [Tokuyama 3] に少し一般化された形で述べられている。またこれらの共役類の cycle type による parametrization は例えば [Carter 4] にある。

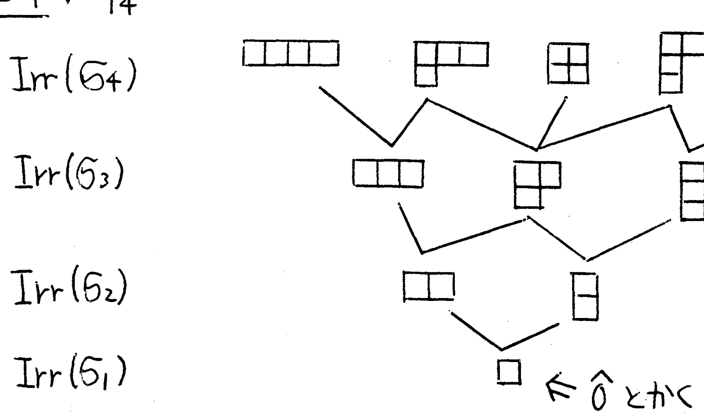
§4 半順序集合と表現次数

ここでは §3 の制限公式(2)を用いて $d(\mathfrak{S}_n)$ を半順序集合の言葉に直せることを説明する。まず対称群の自然な包含列：$\mathfrak{S}_1 \subset \mathfrak{S}_2 \subset \mathfrak{S}_3 \subset \cdots \subset \mathfrak{S}_n$ の各段階で制限法則 [§3 (2)] が成立することに注意して，集合 $Y_n = \coprod_{i=1}^{n} \mathrm{Irr}(\mathfrak{S}_i)$ に半順序関係 $\leqq$ を次のように定義する。即ち $\chi \in \mathrm{Irr}(\mathfrak{S}_i)$, $\chi' \in \mathrm{Irr}(\mathfrak{S}_j)$ に対して，

$$\chi \leqq \chi' \underset{\mathrm{def}}{\iff} i \leqq j \text{ かつ } (\chi' \downarrow^{\mathfrak{S}_j}_{\mathfrak{S}_i}, \chi) \neq 0 .$$

§3 で述べた $\mathrm{Irr}(\mathfrak{S}_i)$ の parametrization と制限公式から，この Y_n は Young 図形の包含関係をあらわす *lattice* (Young *lattice*) と同形である。

例 $n=4$: Y_4



ここで例えば $\chi_{\ydiagram{3,1}}$ の表現次数は，

$$
\begin{aligned}
\dim \chi_{\ydiagram{3,1}} &= \chi_{\ydiagram{3,1}}(1) \\
&= \chi_{\ydiagram{3}}(1) + \chi_{\ydiagram{2,1}}(1) && \mathfrak{S}_3 \text{ に制限} \\
&= \chi_{\ydiagram{2}}(1) + \overbrace{\chi_{\ydiagram{1,1}}(1) + \chi_{\ydiagram{2}}(1)} && \mathfrak{S}_2 \text{ に制限} \\
&= \chi_{\ydiagram{1}}(1) + \chi_{\ydiagram{1}}(1) + \chi_{\ydiagram{1}}(1) && \mathfrak{S}_1 \text{ に制限} \\
&= 3
\end{aligned}
$$

などというように求められることからわかるように，一般に χ_λ の表現次数 $\dim\chi_\lambda$ は，半順序集合 $\mathbb{Y}_n$ $(n=|\lambda|)$ において，λ から $\hat{0}=\square$ に至る経路（maximal chain）の個数に等しい。特に $d(\mathfrak{S}_n)$ は $\mathbb{Y}_n$ の maximal chain の総数に等しいことになる。

§5. Robinson - Schensted 対応

$\mathbb{Y}_n$ における maximal chain は，Young 図形が $\square$ からはじまって箱が1つずつ増えてゆく様子をあらわしていると考えられるから，たとえば $\square \leqq \ydiagram{1,1} \leqq \ydiagram{2,1} \leqq \ydiagram{3,1}$ なる maximal chain に対して i 番目に増えた箱に数字 i を書き込むことにより，

$$
\begin{ytableau}
1 & 3 & 4 \\
2
\end{ytableau}
$$

のような“tableau”を対応させることができる。このように箱数 n の Young 図形 λ に 1 から n までの数字をどの行も列も増大するように書き入れたものを shape λ の standard tableau

といい，そのようなもの全体の集合を T_λ とかく。前§で述べたことにより，$\mathfrak{S}_n$ の既約指標 χ_λ に対して $\dim \chi_\lambda = \# T_\lambda$ がなりたち，従って表現次数の総和については，

$$d(\mathfrak{S}_n) = \# \coprod_{|\lambda|=n} T_\lambda$$

が成立する。

ところで standard tableau に関しては，Robinson-Schensted 対応と呼ばれる有名な組合せ論的な対応によって，$\mathfrak{S}_n$ 自身の元と関係づけることができる（[Knuth 5]参照）。すなわち，$\mathfrak{S}_n$ の元 σ に対して，P-symbol, Q-symbol とよばれる shape の等しい箱数 n の standard tableau の pair $(P(\sigma), Q(\sigma))$ を対応させる写像 $RS : \mathfrak{S}_n \rightarrow \coprod_{|\lambda|=n} T_\lambda \times T_\lambda$ で，

(1) RS は bijection

(2) $P(\sigma^{-1}) = Q(\sigma)$

がなりたつものが存在する。（個数だけについていえば (1) は表現次数の平方和が群の位数に等しいという事実を反映している。）今，集合 $\coprod_{|\lambda|=n} T_\lambda$ を diagonal に $\coprod_{|\lambda|=n} T_\lambda \times T_\lambda$ に埋め込むとき，その像の RS 対応による逆像は (2) により $\{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \sigma^2 = 1\}$ と一致することが容易にわかる。従って以上の事から

$$d(\mathfrak{S}_n) = \# \coprod_{|\lambda|=n} T_\lambda = \# \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \sigma^2 = 1\} = t(\mathfrak{S}_n)$$

であることがわかる。§2 で述べたように $d(\mathfrak{S}_n) = t(\mathfrak{S}_n)$ は

$\mathfrak{S}_n$の任意の既約表現が$\mathbb{R}$上実現可能であることと同値なのであるが，表現次数にYoung latticeのmaximal chainとしての意味を与えることによりbijectiveな別証を与えることができたといえる。なおRS対応の$W(B_n)$への拡張については，[成瀬 12]参照。

§6. $t(\mathfrak{S}_n)$の指数型母関数

$\mathfrak{S}_n$の元σが$\sigma^2=1$となるためには，そのcycle typeが，

$$(\underbrace{2,2,\cdots,2}_{k\text{個}},\underbrace{1,1,\cdots,1}_{l\text{個}}) \quad n=2k+l,\ k\geqq 0,\ l\geqq 0$$

の形をしていることが必要十分である。このcycle typeをもつ元の個数は$n!/2^k k!\,1^l\,l!$であるから，

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t(\mathfrak{S}_n)}{n!}x^n &= \sum_{k,l}\frac{1}{n!}\frac{n!}{2^k k!\cdot 1^l\, l!}x^{2k+l}\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{x^2}{2}\right)^k \sum_{l=0}^{\infty}\frac{x^l}{l!}\\ &= \exp\left(x+\frac{x^2}{2}\right)\end{aligned}$$

となって定理1が示される。

また交代群$\mathfrak{A}_n$については上の議論で"k:even"という条件をつければよいので$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t(\mathfrak{A}_n)}{n!}x^n = e^x\cdot\cosh\left(\frac{x^2}{2}\right)$であることが容易に導かれる。

この考え方は，orderを指定した$\mathfrak{S}_n$の元の部分集合につい

ても応用することができて，たとえば自然数$k(\geqq 1)$に対して，$t_k(\mathfrak{S}_n)=\#\{\sigma\in\mathfrak{S}_n \mid \sigma^k=1\}$とおくことにすれば，

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t_k(\mathfrak{S}_n)}{n!}x^n = \exp\left(\sum_{d|k}\frac{x^d}{d}\right)$$

がなりたつことが同様にして示せる。

§7. Schur関数

古典Weyl群 $W(B_n)$, $W(D_n)$ について同様な母関数を求めるのに§4～§6のようなアプローチも可能であろうが，ここでは次数公式を直接用いる方法を紹介する。[Macdonald 6]ではA型(つまり$\mathfrak{S}_n$)についてのみ実行されているが，その手法は簡単な工夫でB, D型に適用し結果を得ることができる。この節ではその準備をする（詳しくは[Macdonald 6]参照）。

各Young図形λに対してSchur関数$S_\lambda(x_1,x_2,\cdots)$と呼ばれる可算無限個の変数$x_1,x_2,\cdots$をもつ$|\lambda|$次のhomogeneousな"対称"式を逆極限を用いて厳密に定義することができる。このS_λは$GL(n,\mathbb{C})$の多項式表現の既約指標をnによらずにuniversalに扱おうとして定義されたものでλ_{GL}と書かれることもある。これについては本講究録の小池氏・寺田氏の文章を参照されたい。ここでは上記Macdonaldの本から次の等式を引用する。

$$(1^\circ)\quad \sum_\lambda S_\lambda = \prod_{i=1}^{\infty}(1-x_i)^{-1}\prod_{i<j}(1-x_ix_j)^{-1}\qquad [\![\text{P.47 Ex 12}]\!]$$

$$(2^\circ)\quad \sum_\lambda S_\lambda^2 = \prod_{i=1}^{\infty}\prod_{j=1}^{\infty}(1-x_ix_j)^{-1}\qquad [\![\text{P.33 (4.3) } x_i=y_i \text{ とおく}]\!]$$

$$(3^\circ)\quad S_\lambda(\underbrace{x,x,\cdots,x}_{N\text{個}},0,0,\cdots) = \frac{x^{|\lambda|}}{h(\lambda)}\prod_{a\in\lambda}(N+\underset{\substack{\uparrow\\ \text{content number}(\S3)}}{c(a)})\qquad [\![\text{P.28}]\!]$$

ここで $\sum_\lambda$ はYoung図形全体にわたる無限和をあらわす。

〚 〛内は [Macdonald 6] の該当部分を指している。

§8. $d(\mathfrak{S}_n)$, $d(W(B_n))$, $d(W(D_n))$ の指数型母関数

前§で準備した事項及び§3の次数公式(1)(3)(4)を用いて次の定理を証明する。

定理3

① $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d(\mathfrak{S}_n)}{n!}x^n = e^{x+\frac{x^2}{2}}$$ (これは定理1と同じ)

② $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d(W(B_n))}{n!}x^n = e^{2x+x^2}$$

③ $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d(W(D_n))}{n!}x^n = \frac{e^{x^2}}{2}(1+e^{2x})$$

(証明) ① §7 (1°) の両辺に $x_1=x_2=\cdots=x_N=\frac{x}{N}$ 及び $x_{N+1}=x_{N+2}=\cdots=0$ を代入して (3°) を用いると

$$\sum_\lambda \frac{x^{|\lambda|}}{h(\lambda)}\prod_{a\in\lambda}\left(1+\frac{c(a)}{N}\right) = \left(1-\frac{x}{N}\right)^{-N}\left(1-\frac{x^2}{N^2}\right)^{-\frac{N(N-1)}{2}}$$

ここで $N\to\infty$ とすると

$$\sum_{\lambda}\frac{1}{h(\lambda)}x^{|\lambda|}=\exp\left(x+\frac{x^2}{2}\right)\quad\cdots\cdots\ (\#)$$

を得るから，次数公式 §3 (1) を用いれば，

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d(\mathfrak{S}_n)}{n!}x^n=\sum_{\lambda}\frac{1}{|\lambda|!}\frac{|\lambda|!}{h(\lambda)}x^{|\lambda|}=e^{x+\frac{x^2}{2}}$$

が従う。

② §3 (3) の次数公式の形から容易に

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d(W(B_n))}{n!}x^n=\sum_{(\lambda,\mu)}\frac{1}{(|\lambda|+|\mu|)!}\frac{(|\lambda|+|\mu|)!}{h(\lambda)h(\mu)}x^{|\lambda|+|\mu|}$$

$$=\left(\sum_{\lambda}\frac{x^{|\lambda|}}{h(\lambda)}\right)\left(\sum_{\mu}\frac{x^{|\mu|}}{h(\mu)}\right)$$

$$=e^{2x+x^2}\quad\cdots\ (\#)\text{より}$$

③ §7 (2°) の両辺に $x_1=x_2=\cdots=x_N=\frac{x}{N}$，$x_{N+1}=\cdots=0$ を代入して (3°) を用いて $N\to\infty$ とすると

$$\sum_{\lambda}\frac{1}{h(\lambda)^2}x^{2|\lambda|}=e^{x^2}$$

を①と同様にして得る。§3 (4) の制限公式により，

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d(W(D_n))}{n!}x^n$$

$$=\sum_{\substack{\{\lambda,\mu\}\\ \lambda\neq\mu}}\frac{1}{(|\lambda|+|\mu|)!}\frac{(|\lambda|+|\mu|)!}{h(\lambda)h(\mu)}x^{|\lambda|+|\mu|}+2\sum_{\lambda}\frac{1}{(2|\lambda|)!}\frac{(2|\lambda|)!}{h(\lambda)^2}\frac{1}{2}x^{2|\lambda|}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sum_{(\lambda,\mu)}\frac{x^{|\lambda|+|\mu|}}{h(\lambda)h(\mu)}-\sum_{\lambda}\frac{x^{2|\lambda|}}{h(\lambda)h(\mu)}\right)+\sum_{\lambda}\frac{1}{h(\lambda)^2}x^{2|\lambda|}$$

$$= \frac{1}{2}(e^{2x+x^2}+e^{x^2})$$
$$= \frac{1}{2}e^{x^2}(1+e^{2x})$$

が従う。　　　　　　　　　　　　　Q.E.D.

注. 交代群$\mathfrak{A}_n$について同様な方法で母関数を求めるには，$\sum_{\lambda:\text{自己共役}} S_\lambda$が無限積の形で表されるとよいのであるが，まだ知られていないようである。

§9. あとがき

この解説で扱った題材は，2冊の本[Macdonald 6]，[Stanley 8]及び論文[Stanley 7]において（A型の場合だけであるが）いろいろな形で取り上げられているものを整理し，古典Weyl群の場合に拡張したのである。

例外型と古典型の違いの一つは，古典型の場合は群が自然数nによって添数づけられたseriesとなって出てくることで，これによっていろいろな母関数を考えることができる。例えば$\mathfrak{S}_n$の既約指標で次数が丁度素数pでk回割り切れるものの個数$m_p(k,\mathfrak{S}_n)$はMcKay数と呼ばれているが，これをkとnについての二重級数の形で母関数をつくるとやはり$\sum=\prod$の形の公式が得られる（[中村 13]）。古典Weyl群についてもその公式は§8と同じような仕方で拡張されること

もわかっている。

$t(\mathfrak{S}_n)=d(\mathfrak{S}_n)$ の $n\to\infty$ のときの漸近的な行動を Hermite 多項式を用いて証明する方法は [Moser-Wyman 9] にありました。講演中の御質問に対して [1] と混同してお答えしてしまったことをお詫びします。

引用文献

1. S.Chowla, I.N.Herstein, and K.Moore, On recursions connected with symmetric groups I, Can.J.Math.3 (1951) 328-334.

2. S.J.Mayer, On the characters of Weyl group of type C/D, J.Algebra, 33, 59-67(1975)/Math.Proc.Camb.Phil.Soc.(1975) 77, 259-264.

3. T.Tokuyama, On the Decomposition Rules of Tensor Products of the Representations of the Classical Weyl Groups, J.Algebra, 88, 380-394(1984).

4. R.W.Carter, Conjugacy Classes in the Weyl Group, Comp. Math.25(1972), 1-59.

5. D.E.Knuth, The Art of Computer Programming, Vol 3: Searching and Sorting, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1973.

6. I.G.Macdonald, Symmetric Functions and Hall Polynomials, Clarendon Press, Oxford, 1979.

7. R.P.Stanley, Theory and application of plane partitions I, II, Studies appl. Math.50, 167-188, 259-279.

8. R.P.Stanley, Enumerative Combinatrics, Vol 1, Wadsworth & Brooks/Cole, 1986.

9. L.Moser, and M.Wyman, On solutions of $x^d=1$ in symmetric groups, Can.J.Math.7(1955),159-168.

---

10. J.P.Serre『有限群の線型表現』岩堀・横沼訳 岩波書店

11. 岩堀長慶『対称群と一般線型群の表現論』岩波書店

12. 成瀬 弘『Classical group の Weyl 群と Hecke 環の表現について』東京大学修士論文 1980

13. 中村博昭『表現次数が丁度 p^s で割り切れるような S_n の既約表現の個数を表す母関数について』代数的組合せ論報告集 1986年11月 於 愛媛大学理学部