数理解析研究所講究録
641巻 1988年 21-33

旧くて新しい問題/Euler標数

東海大学理学部情報数理学科
郡山 彬 (Akira Koriyama)

§0. 序

単体的複体Kにおいて、Kの各次元の単体の個数は、Kの位相的性質をどの程度規定するであろうか。Euler(1752)は2次元凸多面体について、いわゆるEulerの公式"V−E+F=2"を証明した。この公式は容易にn次元にまで拡張することができる(例えば[Brø]、あるいは[H]参照)

「Pを(n+1)-次元凸胞体(convex polytope)、$f_i(P)$をPのi-次元面(face)の個数とすると、$\sum_{j=0}^{n}(-1)^j f_j(P) = 1+(-1)^n$」

上式は、n次元(有限)単体的複体(より一般にn次元(有限)胞複体)にまで拡張され、いわゆるEuler-Poincaréの公式が成立する。

「Δをn次元単体的複体、β_iをΔのi次元Betti数、i.e. $\beta_i = \dim_{\mathbb{F}} \tilde{H}_i(\Delta, \mathbb{F}) \in \mathbb{N}$ ($\mathbb{F}$は体)とする。

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^j f_j(\Delta) = 1+\sum_{j=0}^{n}(-1)^j \beta_j \quad (\equiv \tilde{\chi}(\Delta)+1)$$」

$\tilde{\chi}(\Delta)$をΔの被約 Euler 標数という．Eulerの公式が出発点とも言える．凸胞体や単体的複体の面や単体の個数に関する研究は組合せ数学の人々に受け継がれ，組合せ数学の重要な問題の1つとなっている。このノートでは，ここ数年，A. Björner と，その周辺の人々によって証明されたいくつかの結果を紹介する．

§1．Möbius関数と Euler 標数

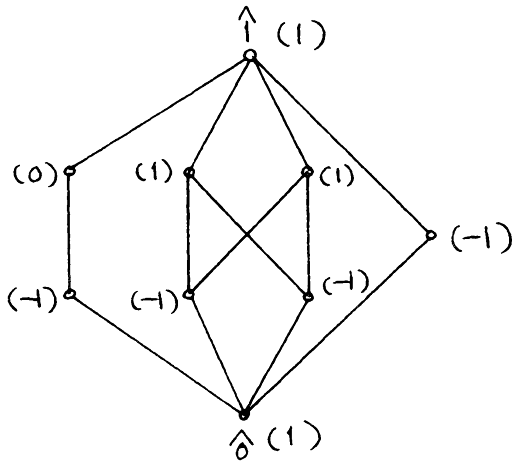
Pを最小元$\hat{0}$，最大元$\hat{1}$を持った(有限)半順序集合(以下，poset と略す)とする．　関数 $\mu : P\times P \longrightarrow \mathbb{Z}$を次式で定義し$P$の Möbius 関数という．

$$\mu(x,y) = \begin{cases} 0 & (x \not\leq y) \\ 1 & (x = y) \\ -\sum_{x \leqq z < y} \mu(x,z) & (x < y) \end{cases}$$

<u>例1</u>．

下図の poset Pの場合，$\mu(\hat{0},x)$　$(\hat{0}\leqq {}^\forall x \leqq \hat{1})$の値はカッコ内のようになる．特に $\mu(\hat{0},\hat{1})=1$ である．

P :



P上のMöbius関数の値$\mu(x,y)$はPの鎖の個数によっても次のように表現できる。

<u>定理 1</u>. (P. Hall) (G.C. Rota [R], P. 346, Prop. 6 参照)

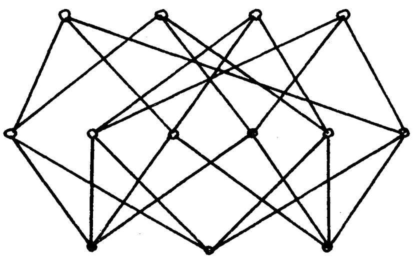
x, yがPにおいて$x \lneqq y$であるならば、

$\mu(x,y) = \#\{$開区間(x,y)内の奇数鎖$\} - \#\{$開区間(x,y)内の偶数鎖$\}$, ここで、n-鎖とは、n個の頂点を持った鎖のことである。特に、空集合は0-鎖と考える。

Pをposetとし、$C(P)$をPの鎖全体とする。$(n+1)$-鎖 $a_0 < a_1 < \cdots < a_n$ をn-単体と考えると$C(P)$は抽象的単体的複体となる。$C(P)$の幾何学的実現を$\Delta(P)$と書き、Pの順序複体(order complex)という。

<u>例 2</u>. 下図のposet Pの$\Delta(P)$は、2次元実射影空間$\mathbb{P}^2$の1つの単体分割であることが容易に確められる。

P:



さて、定理1の系として、次のことが容易にわかる。

<u>定理1の系</u>

$$\mu(x,y) = \tilde{\chi}(\Delta(x,y)) \qquad (x \lneqq y \in P)$$

有限な poset P が与えられたとき、P に最小元 $\hat{0}$，最大元 $\hat{1}$ を強制的に付加した poset を $\hat{P} = P \cup \{\hat{0}, \hat{1}\}$ とし、

$\mu(P) := \mu(\hat{0}, \hat{1})$ in $\hat{P}$ と定義すると、上の系より明らかに、$\mu(P) = \tilde{\chi}(\Delta(P))$（これを P の Möbius 数と呼ぶ）である．　定理１より、$\mu(P)$ の計算は原理的には $(\hat{0}, \hat{1})$ 内の奇数鎖の個数と、偶数鎖の個数を求めればよいわけだが、単純な P 以外は極めて難しい（この報告集中の成嶋弘氏の報告を参照されたい）． G.C. Rota [R] は、P が有限束の場合、$\mu(P)$ を求めるには P の crosscut と呼ばれる特殊な部分集合を調べればよいことを証明した． Rota の結果を少し一般的な形で述べると次のようになる．まず、P の crosscut C を以下のように定義する．

<u>定義 1.</u>　　P を任意の poset（$|P| = +\infty$ も許す）とする．P の部分集合 C が次の (1)〜(3) をみたすとき、C を P の crosscut と呼ぶ：

(1)　C は反鎖 i.e. C のどの２元も比較不能である．

(2)　P の任意の鎖は C の元を含むように拡張できる．

(3)　A が C の部分集合でかつ、P において、上（または下）に有界ならば、上限（または下限）を持つ．

<u>定理 2</u>　（A. Björner [B]）

P を有限 poset，C をその crosscut とする．　C の，上下限

をもたない k-集合の個数を a_k とおくと、

$$\mu(P)=\sum_{k\geqq 2}(-1)^k a_k$$

が成り立つ.

同じく、Rotaの crosscut 定理の延長線上にあり、$\mu(P)$ を P の部分集合(特に区間)の Möbius 数で記述した定理として、次の、Crapoの定理がある.

定理 3 (H. H. Crapo [C])

L を有限束とし、$s\in L$ の補元の全体を $\perp(s)$, i.e.
$\perp(s)=\{x\in L \mid x\wedge s=\hat{0},\ x\vee s=\hat{1}\}$ とする.
このとき、
$$\mu(\hat{0},\hat{1})=\sum_{\substack{x,y\in\perp(s)\\ x\leqq y}}\mu(\hat{0},x)\mu(y,\hat{1})$$

が成立する.

Björner-Walker は Crapoの定理をより一般的にし、束のホモトピー型にまで言及している. まず、poset の結(join)を以下のように定義する.

定義 2. P と Q を2つの poset とする. P と Q の結 $P*Q$ の要素集合は P と Q の disjoint union $P\dot{\cup}Q$ である.
$P*Q$ の順序 $\leqq$ は次のように定める.

$$x\leqq y \text{ in } P*Q \iff \begin{cases} \text{(i) } x,y\in P \text{ かつ } x\leqq_P y, \text{ または} \\ \text{(ii) } x,y\in Q \text{ かつ } x\leqq_Q y, \text{ または} \\ \text{(iii) } x\in P \text{ かつ } y\in Q \end{cases}$$

定義 3. Pを任意のposet，Aを2個の要素$\{a, b\}$からなる反鎖，$\Delta(P)$をPの順序複体とする．多面体$|\Delta(P)|$の懸垂$\mathrm{Susp}|\Delta(P)|$を、$\mathrm{Susp}|\Delta(P)| = |\Delta(P * A)|$で定義する．

定義 4. (X_i, x_i^0) $(i=1,2,\cdots,n)$を、基点$x_i^0 \in X_i$をもった位相空間とする．(X_i, x_i^0) $(i=1,2,\cdots,n)$のone-point union $\vee(X_i, x_i^0) = \vee X_i$を次式で定める．

$$\bigvee_{i=1}^{n} X_i = \left(\dot{\bigcup_{i=1}^{n}} X_i\right) \Big/ \left(\dot{\bigcup_{i=1}^{n}} \{x_i^0\}\right)$$

以上の定義を使って、B-Wの定理は次のように述べられる．

定理 4 (A.Björner − W. Walker [B-W])
Lを$\{\hat{0}, \hat{1}\}$を持った束，$\overline{L} = L - \{\hat{0}, \hat{1}\}$，$s \in \overline{L}$とする．このとき、$\perp(s)$が反鎖ならば、

$$|\Delta(\overline{L})| \simeq \bigvee_{x \in \perp(s)} \mathrm{Susp}\,|\Delta[(\hat{0}, x) * (x, \hat{1})]|$$: 同じホモトピー型．

ここで、Euler標数がホモトピー型不変量であることに注意すると次の系が得られる．

定理 4 の系 定理の条件の下で、

$$\mu(\hat{0}, \hat{1}) = \sum_{x \in \perp(s)} \mu(\hat{0}, x)\,\mu(x, \hat{1})$$

§2. 単体の個数, Betti 数, そしてBjörner-Kalaiの定理

単体的複体の各次元の単体(面)の個数の間の関係も広い意味でEuler標数の問題と考えると、まず注目すべき定理として、Kruskal - Katona の定理([KR], [KA])があげられる。まず準備として、いくつかの定義と、よく知られた結果を列記する. 尚、Kruskal-Katona の定理と、その周辺の話題に関しては、[P.F-J.A]を参照されたい。

<u>定義 5.</u> $\mathbb{N}$を自然数全体とし、$\mathbb{N}$の k-集合全体を$\binom{\mathbb{N}}{k}$と書く. さらに、$A, B \in \binom{\mathbb{N}}{k}$に対して、

$$A <_{RL} B \iff \max(A \Delta B) \in B$$

によって、逆辞書式順序 $<_{RL}$ を定義し、線型順序集合 $\left(\binom{\mathbb{N}}{k}, <_{RL}\right)$を S_kと略記する.

<u>定義 6 と定理.</u> mとlを任意に与えられた正整数とする. 次の表現を mの l-2項展開表現と呼ぶ.

$$m = \binom{a_l}{l} + \binom{a_{l-1}}{l-1} + \cdots + \binom{a_t}{t}$$

$$a_l > a_{l-1} > \cdots > a_t \geqq t \geqq 1$$

この表現は常に存在し、かつ一意である.

<u>定義 7.</u> $[n] = \{1, 2, \cdots, n\}$とし、$[n]$の k-集合の全体を$\binom{[n]}{k}$と書く. $\binom{[n]}{k}$の部分集合$\mathcal{F}$に対して、$\mathcal{F}$の影$Sh(\mathcal{F})$を、

$$Sh(\mathcal{F}) = \left\{ F \in \binom{[n]}{k-1} \,\middle|\, \exists \tilde{F} \in \mathcal{F} \text{ s.t. } F < \tilde{F} \right\}$$

で定義する．

定義 8.　$\mathcal{F} \subset S_k$ が圧縮的であるとは、$\mathcal{F}$ が、S_k の元を途中ぬけることなく、先頭から丁度 $|\mathcal{F}|$ 個取り出して作った集合になっていることである．　一般に、任意に $\mathcal{F} \subset \binom{\mathbb{N}}{k}$ が与えられたとき、S_k の元を、途中ぬけることなく、先頭から丁度 $|\mathcal{F}|$ 個取り出して作った集合を $C(\mathcal{F})$ と書き、$\mathcal{F}$ の圧縮と呼ぶ．　明らかに、

$$\mathcal{F} \text{ が圧縮的} \iff C(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$$

である．

定義 9.　Δ を $\{1, 2, \cdots, N\}$ を頂点集合とする単体的複体とする．Δ の i-単体（i-面）の個数を f_i とし、ベクトル $(f_0, f_1, \cdots, f_d)$ $(d = \dim \Delta)$ を、Δ の f-ベクトルと呼び、$f(\Delta)$ と書く．今後 $f(\Delta)$ は、$d+1$ 次元以上の成分は 0 とおいて、　$\mathbb{N}_0^{(\infty)} = \{(a_0, a_1, \cdots) \mid a_i \in \mathbb{N}$，高々有限個の a_i が $\neq 0\}$ のベクトルと考えることにする．

さて、我々が必要としている Kruskal-Katona の定理は次の様に述べることができる．

定理 5（Kruskal-Katona）　　$\mathcal{F} \subset \binom{[n]}{k}$ とする．

$$|\mathcal{F}| = m = \binom{a_k}{k} + \binom{a_{k-1}}{k-1} + \cdots + \binom{a_i}{i}\ ;\ a_k > a_{k-1} > \cdots > a_i \geqq i \geqq 1$$

ならば、

$$|Sh(\mathcal{F})| \geqq \partial_k(m) \left(\overset{\text{def.}}{=} \binom{a_k}{k-1} + \binom{a_{k-1}}{k-2} + \cdots + \binom{a_i}{i-1} \right)$$

今、$\mathcal{F}$を、単体的複体Δのk次元単体の全体であるとすると、$\mathcal{F} \subset \binom{[n]}{k+1}$である。このとき、$\mathrm{Sh}(\mathcal{F})$は$\mathcal{F}$から生じる$(k-1)$-次元単体の全体である。ところで、$\Delta$の$(k-1)$-次元単体の個数$f_{k-1}$は$|\mathrm{Sh}(\mathcal{F})|$以上だから、定理5より、

$f_{k-1} \geqq \partial_k(f_k)$ でなければならないことがわかる。この様な考察をもとにして、次の定理を得る。

<u>定理 6</u> (Kruskal-Katona)

任意に与えられたベクトル$f=(f_0, f_1, \cdots) \in \mathbb{N}_0^{(\infty)}$に対して、次の各条件は互に同値である。

(i) fは単体的複体のf-ベクトルである。

(ii) $\partial_k(f_k) \leqq f_{k-1} \quad (\forall k)$

(iii) fは圧縮的複体のf-ベクトルである。

ここで、単体的複体Δが圧縮的複体であるとは、各$k \geqq 0$について、「k-単体の全体Δ_kをS_{k+1}の部分集合と考えたとき、Δ_kは圧縮的」という条件が成立することである。

以上がKruskal-Katonaの定理であるが、Δに対する条件に、Betti数も加えたならば、これらの定理はどのようになるであろうか。この問題に対する1つの答が、これから述べるBjörner-Kalaiの定理である。

例によって、まず定義から始めよう。

<u>定義 10.</u> 単体的複体Δのi次元Betti数β_iとは、

$\beta_i = \dim_{\mathbb{F}} \tilde{H}_i(\Delta, \mathbb{F})$ のことである．以下体$\mathbb{F}$は1つ固定して考える。$\beta(\Delta) = (\beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_d)$ とおき、さらに定義9と同様の処理をして $\beta(\Delta) \in \mathbb{N}_0^{(\infty)}$ と考え、これを、ΔのBetti数列と呼ぶ。

定義 11．　$a = (a_0, a_1, \cdots) \in \mathbb{N}_0^{(\infty)}$ に対して，

$$S^a = \underbrace{S^0 \vee \cdots \vee S^0}_{a_0 \text{個}} \vee \underbrace{S^1 \vee \cdots \vee S^1}_{a_1 \text{個}} \vee \underbrace{S^2 \vee \cdots \vee S^2}_{a_2 \text{個}} \vee \cdots$$

（各S^iはi-次元球面）と定義する．定義より明らかに，各kに対して，$\beta_k(S^a) = a_k$ が成り立つ．

定理 7（Björner－Kalai [B-K]）

$f = (f_0, f_1, \cdots)$，$\beta = (\beta_0, \beta_1, \cdots) \in \mathbb{N}_0^{(\infty)}$ を任意に与えられたベクトルとする．次の(1)～(3)は互に同値である．

(1) ∃単体的複体Δ s.t. $f(\Delta) = f$，かつ $\beta(\Delta) = \beta$

(2) ∃単体的複体Δ s.t. $f(\Delta) = f$，かつ，

$|\Delta| \simeq S^\beta$ ：同じホモトピー型．

(3) $\chi_{k-1} = \sum_{j \geq k} (-1)^{j-k}(f_j - \beta_j)$　とおくと，

$$\begin{cases} \text{(i)} \ \chi_{-1} = 1 & \text{かつ,} \\ \text{(ii)} \ \partial_k(\chi_k + \beta_k) \leqq \chi_{k-1} & (\forall k \geq 1) \end{cases}$$

この定理の証明で、(2)⇒(1) は自明である．

(3)⇒(2) は、各kに対して、S_{k+1} の性質を上手に使って

Δ の k-単体の集合を S_{k+1} の中に作ってやればよい。最後にトポロジーのよく知られた手法を使って $|\Delta| \simeq S^{\beta}$ を示す。
(1) ⇒ (3) が最も難しい。興味ある読者は原論文を参照されたい。

最後に、
この小論は Prof. A. Björner の MIT での講義を参考にまとめたものである。MIT での大学院講義の聴講を快諾してくださった、Prof. A. Björner および、小生に、MIT での研究の機会を与えて下さった、MIT の Prof. G. C. Rota, および、東海大学の Prof. H. Narushima に深く感謝いたします。

参考文献

[B] A. Björner ; Homotopy type of posets and lattice complementation, J. Combinatorial Theory, Ser. A, 30 (1981), 90−100

[B-K] A. Björner − G. Kalai ; An extended Euler-Poincaré theorem, (1986), to appear.

[B-W] A. Björner − W. Walker ; A homotopy complementation formula for Partially Ordered Sets, Europ. J. Combi., 4 (1983), 11−19.

[Brø] A. Brøndsted ; An Introduction to Convex Polytopes, Graduate Text in Math., 90 (1980), Springer.

[C] H. H. Crapo ; The Möbius function of a lattice, J. Combinatorial Theory 1 (1966), 126 − 131

[P.F. − J. A] P. Frankl − J. Akiyama ; 現代組合せ論 (1987) 共立出版株式会社

[H] T. Homma ; 数学ライブラリー 29，組合せ位相幾何学，(1972) 森北出版株式会社

[KA] G. O. H. Katona ; A theorem of finite sets, in "Theory of graphs" (Proc. Tihany Conf., 1966, P. Erdös and G. Katona, eds.), Academic Press, New York, and Akadémia Kiadó, Budapest, (1968), 187 − 207

[KR] J. B. Kruskal ; The number of simplices in a complex, in "Mathematical Optimization Techniques" (R. Bellman, ed.), Univ. of California Press, Berkeley - Los Angeles (1963) 251 − 278.

[R] G. C. Rota ; On the foundations of Combinatorial

Theory I. Theory of Möbius functions,
Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie,
Band 2 (1964), 340–368