数理解析研究所講究録
641巻 1988年 1-20

数え上げ組合せ論—鎖多項式を中心にして—

東海大・理　成嶋弘 (Hiroshi Narushima)

組合せ論には2つの大きな流れがある。1つは明確な組合せ論的対象の研究であり、もう1つは数学の各分野の組合せ論的または数え上げ論的研究である。グラフ、マトロイド、コード、ブロックデザインなどは前者に入り、数え上げは後者に入ると思われる。数え上げの対象は特定の分野に限らずどの分野にもあるからである。

対象の名前のつけかえや回転による(一般に、置換群作用のもとでの)同値類の数え上げ論は、Cauchy-Frobenius の定理(この定理は、その歴史的経緯が P.M. Neumann[1] によって正しく指摘される前までは、Burnside の補題とよばれていた)に始まり、Pólya-Redfield の(置換群の)cycle index を母関数論的に用いた手法の展開、さらに、de Bruijn の一般化等によって、1900年代の前半に確立された。

一方、数論で Möbius の反転公式が古くから知られていたが、この反転公式の本質は整数の可約関係による順序にあることが、Hall, Ward, Weisner らによって個々に研究されていた。

Rota[2]は、これを一般の順序集合のincidence algebraのなかで系統的に扱い、その本質的な部分が順序集合上のMöbius関数にあることを把握し、組合せ論におけるその役割を明らかにした。その後、この論文は数え上げ組合せ論の研究者に大きな影響を与え、その多くの成果がStanley[3]におさめられている。組合せ論的公式の反転関係は線形代数の言葉でいえば、正則な三角行列を扱うにすぎないが、何が本質的であるか見極めたことが重要である。

しかし、いつまでも、"Möbius関数"、"Möbius関数"、と題目を唱えているわけにもいかない。Joyal[4]のspecies theoryとThe upper bound conjectureに端を発するStanley[5]の可換代数的アプローチが、"Möbius関数"をのりこえた最近の大きな成果であるように思われる。

ところで、Narushima[6〜8]は順序集合上のinclusion and exclusionを与えたものであり、既約な有限オートマトンの数え上げの問題（Harrisonの問題）を扱うために導入され、一般化された定理である。Robinson[9]はMöbiusの反転公式のもとで、(強)連結有限オートマトンの数え上げを扱い、そのなかで、"Narushima[10]はvery difficult problemを解決した"と述べ、さらに、Narushimaの方法とRobinsonの方法をcombineし、（強）連結でかつ既約な有限オートマトンの数え上げ（Narushima-Robinsonの問題）に挑戦してみ

てはどうかと述べている。この問題はまだunsolved problemであり、置換群作用の数え上げ論と順序集合上のinclusion and exclusionの両方の手法を必要とする"良問"とも思われる。

一方、具体的問題から離れ、Narushima[6]で与えられた定理をみると、それは順序集合の鎖の集合上にわたる和の計算を必要としている。いわば、順序集合の鎖数がその公式の"addition complexity"であることを意味している。順序集合の鎖数の問題はRota[2]でもふれられており、incidence algebraの枠組のなかでは、$(2\delta-\delta)^{-1}$を計算すればよいから、Stanley[3]でも扱われている。しかし、Narushima[11]はあるsimple recursionによって、acyclic digraph（特別な場合が順序集合となる）上に定められる多項式（一般には有理関数）の族をあるベクトル空間としてとらえ、順序集合の鎖多項式論を展開している。Narushima[12]はこれを多面体的複体の重心細分のf-vectorの計算に応用し、特に、単体的複体と立方体的複体の場合に、具体的な公式を与えている。単体的複体がブール束の場合であり、立方体的複体が立方体束の場合である。分割束、部分空間束、ヤング束の場合も興味ある事実が示されている。また、鎖多項式とMöbius関数の関連も明白であり、鎖多項式論をMöbius関数の計算に応用

することもできる。さらに、トポロジーや可換代数などのいくつかの分野の elementary な部分で、順序集合の鎖数計算が必要である。この辺のところを "Counting theory of chain polynomials and its application" としてまとめあげることが、ここ数年の私の仕事であると考えている（Rota にも、つい最近、assistant を通して催促されている）。

ともかくも、Rota, Stanley, Joyal らの意欲的な研究活動とその成果により、enumeration が combinatorics の queen に復活しつつあるように思われる。願わくば、"combinatorics が mathematics の queen になることを"。

1. 順序集合上の包含と排除の原理

Ω を集合とし、$\mathcal{P}(\Omega)$ を Ω のべき集合とする。Ω の要素 x に対して $m(x) \geqq 0$ を対応させ、これを x の "測度" と呼ぶ。[15] Ω の有限部分集合 X に対して、$m(X)$ を

$$m(X) = \begin{cases} \sum_{x \in X} m(x) & (X \neq \phi) \\ 0 & (X = \phi) \end{cases}$$

と定め、X の "測度" と呼ぶ。このとき、m を $\mathcal{P}(\Omega)$ 上の "測度" と呼ぶ。Ω のすべての要素 x に対して $m(x) = 1$ ならば $m(X) = |X|$（または $\#(X)$: X の要素の個数）であり、Ω が基本事象の集合で m が Ω 上の確率分布ならば、$m(X)$ は事象の

集合Xの確率である。

<u>定理1.1</u>（半束上の包含と排除の原理）　$(L, \vee)$を有限上半束とし、$f: L \to \mathcal{P}(\Omega)$をLの各要素xとyに対して、$f(x \vee y) \supseteq f(x) \cap f(y)$を満す写像とする。このとき、

$$m\left(\bigcup_{x \in L} f(x)\right) = \sum_{\mathbb{C} \in C} (-1)^{\ell(\mathbb{C})} m\left(\bigcap_{x \in \mathbb{C}} f(x)\right)$$

ただし、CはLのすべての鎖（chain：全順序集合のこと）の集合であり、$\ell(\mathbb{C})$は鎖$\mathbb{C}$の長さ（$= \#(\mathbb{C}) - 1$）である。双対形も成り立つ。

この定理の証明、およびブール束や分割束への応用、さらに分割束上の包除原理の既約有限オートマトンの数え上げへの応用などについてはNarushima[6),10)]を参照するとよい。この定理の応用に当っては、写像$f: L \to \mathcal{P}(\Omega)$が$f(x \vee y) \supseteq f(x) \cap f(y)$を満す（このとき、fを<u>L上のweak morphism</u>と呼ぶ）かどうか、および$m(\bigcap_{x \in \mathbb{C}} f(x))$が算術演算で計算できるかどうかが重要である。（Lが全順序集合であるとき、$x \vee y = x$ or yであるから、fは自動的にL上のweak morphismとなり、またCはLの部分集合全体となり、定理1.1より通常の包除原理が得られることに注意せよ。）半束上のweak morphismを次のように、一般の順序集合P上に拡張し、順序集合上の包含と排除の原理を得る[8]。写像 $f: P \longrightarrow \mathcal{P}(\Omega)$ が次の条件を満すとき、f を<u>P上の weak morphism</u> と呼ぶ：Pの各要素 x と y に対して、$\{x, y\}$ の極小上界 z が少なくとも1つ存在し、$f(x) \cap f(y) \subseteq f(z)$ となる。（ここで、z は $\{x, y\}$ の最小上界（上限）でないことに注意せよ。）

<u>定理1.2</u>（順序集合上の包含と排除の原理）　f を順序集合P上の weak morphism とする。このとき、

$$m\left(\bigcup_{x \in P} f(x)\right) = \sum_{\mathbb{C} \in C} (-1)^{\ell(\mathbb{C})} m\left(\bigcap_{x \in \mathbb{C}} f(x)\right)$$

ただし、CはPの鎖全体の集合、$\ell(\mathbb{C})$ は鎖 $\mathbb{C}$ の長さである。また、他の3つの双対形も成立する。

この定理に対しては、$\mathcal{P}(P)$ 上の closure relation を用いた証明と全く初等的な証明の2つが与えられている[8]。

<u>注意</u>　$(D, \vee, \wedge)$ を分配束、$(A, +)$ を単位元をもつ可換環とする。写像 $v: D \longrightarrow A$ がD上の"付値(valuation)"と呼ばれるのは次の条件を満すときである：Dの各要素 x と y に対して、$v(x \vee y) + v(x \wedge y) = v(x) + v(y)$。このとき、

定理1.2（定理1.1も当然）は、$\mathfrak{p}(\Omega)$上の“測度”mの代りに、分配束上の“付値”vを用いて、容易に再表現される。[7),8)]

筆者が最初に、順序集合に含まれる鎖の個数に興味を持ったのは、定理1.2（定理1.1）を用いるときの計算の手間に関連していたからである。その後、順序複体を通して、組合せ位相幾何や可換代数での鎖数の役割を少なからず知るようになり、また、つい最近は、ヤング束を通して群の表現論との関連にも興味を持つようになった。

2. 鎖多項式とその計算法

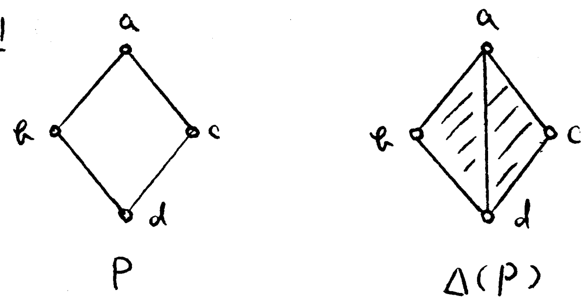
順序集合Pに含まれる長さiの鎖の個数をc_iで表すとき、$(c_0, c_1, \cdots, c_d)$を鎖ベクトル（chain vector or c-vector）といい、次の多項式を鎖多項式（chain polynomial of P）という：（以下、順序集合Pは有限とする）

$$p_P(x) = \sum_{i=0}^{d} c_i x^i$$

ただし、dはPに含まれる最長鎖の長さである。幾何学的には、c_iはPの順序複体$\Delta(P)$のi次元面の個数であり、Pの鎖ベクトルは$\Delta(P)$の面ベクトル（face vector or f-vector）と呼ばれているものになる。従って、Pの鎖多項式を$\Delta(P)$の面多項式（face polynomial of $\Delta(P)$）と呼んでもよい。

$p_P(-1) = \sum_{i=0}^{d} (-1)^i c_i$ が位相幾何学的な意味をもつことは明らかである。

例 2.1



に対して、

c-vector or f-vector : $(4, 5, 2)$

$p_P(x) = 2x^2 + 5x + 4$, $p_P(1) = 11$, $p_P(-1) = -1$

となる。

鎖ベクトルを求めるための良く知られた方法は、結合行列(incidence matrix)^{n}を用いるものである。より一般に順序集合 P の接合代数[2),3)] (incidence algebra of P) のなかで取り扱うならば、次のようになる。$\mathbb{R}$を実数の集合とし、関数の集合 $\{f : P \times P \to \mathbb{R} \mid f(s,t) = 0 \ (s \not\leq t)\} \ (= \mathcal{A}(P))$ に対して、

- 和 : $(f+g)(s,t) = f(s,t) + g(s,t)$
- スカラー倍 : $(af)(s,t) = a(f(s,t))$
- 積 : $(f \cdot g)(s,t) = \sum_{s \leq u \leq t} f(s,u) g(u,t)$

ここで、積が定義できるためには、P の任意の区間が有限で

なければならない。このような順序集合は局所有限と呼ばれているが、先に断わったように、本稿では、Pは有限であるから問題はない。これらの演算のもとで、$\mathcal{A}(P)$は$\mathbb{R}$上の結合代数(associative algebra)となることは容易にわかる。$\mathcal{A}(P)$で重要なことは、「$\mathcal{A}(P)$の要素fが可逆(正則)であるための必要十分条件はPのすべての要素sに対して$f(s,s)\neq 0$である」ということである。さらに、$\mathcal{A}(P)$のなかで特に重要な関数は次の3つの関数である:

1) Pのzeta関数(またはRiemann関数)ζ:

$$\zeta(s,t)=\begin{cases}1 & (s\leqq t)\\ 0 & \text{その他}\end{cases}$$

2) PのMöbius関数μ:

$$\mu(s,t)=\begin{cases}1 & (s=t)\\ -\sum\limits_{s\leqq u<t}\mu(s,u) & (s<t)\\ 0 & \text{その他}\end{cases}$$

3) Pの結合関数(incidence fun.)η:

$$\eta=\zeta-\delta$$

ただし、δはKronecker delta関数(単位行列)である。このとき、$\zeta\mu=\mu\zeta=\delta$が成り立つこと、およびPとして、可約関係による順序の入った自然数の集合を考えれば、これらの関数は初等整数論的関数になることに注意しよう[16)]。さて、

$c_i = n^i \ (n^0 = \delta)$ の各成分の総和

であることに注意すれば[17]、おのずと、$\mathcal{A}(P)$のなかでの鎖数の計算法は明らかとなる。

例2.2　例2.1 の P に対して、行も列も d, c, b, a の順とすれば、n^i は次のようになる。

$$n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ & 0 & 0 & 1 \\ & & 0 & 1 \\ \text{\Large 0} & & & 0 \end{pmatrix}, \quad n^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \\ \text{\Large 0} & & & 0 \end{pmatrix}, \quad n^i = 0 \ (i \geqq 3)$$

（零行列）

また、次のような関係式にも注意するとよい。

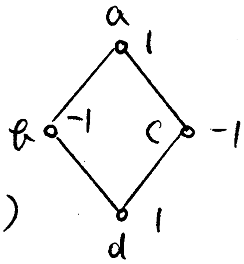
$$(\delta - n)^{-1} = \delta + n + n^2 \quad (\text{成分の総和} = 11)$$

$$(\delta - n)^{-1} = (\delta - (\zeta - \delta))^{-1}$$

$$= (2\delta - \zeta)^{-1} = \frac{1}{2}\left(\delta + \frac{\zeta}{2} + \left(\frac{\zeta}{2}\right)^2 + \cdots\right)$$

さらに、

$$\mu = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ & 1 & 0 & -1 \\ & & 1 & -1 \\ \text{\Large 0} & & & 1 \end{pmatrix}, \quad \mu(d, t) : (t = d, c, b, a)$$



である。（詳しくはStanley[3]を参照。）

行列の計算には、かなり手間がかかるものである。鎖多項式を計算するためのより簡明な方法がないであろうか？

Narushima[10),11),12)]は、いわばパスカルの三角形における計算法の一般化とも考えることのできる方法を導入し、それを単純再帰法（simple recursive method）と呼んでいる。以下にその概略を示す。

Dを非巡回有向（有限）グラフ（acyclic digraph），$Q(x)$を有理関数体とし，Qの要素a，bに対して、写像$f^{(a,b)}: D \longrightarrow Q(x)$を次のように再帰的に定める：

$$f^{(a,b)}(t) = \begin{cases} a & (t\text{ が sink のとき}) \\ (\sum_{t \to s} f^{(a,b)}(s))x + b & (\text{その他}) \end{cases}$$

ここで、$t \to s$は頂点tからsへ隣接していることを表す。

この計算法はDの弧の個数に関して線形オーダーである。$\{f^{(a,b)} \mid a, b \in Q\}$を$\mathcal{L}(D)$で表わす。$f$，$g \in \mathcal{L}(D)$，$a \in Q$に対して，次のように通常の加法とスカラー積を定める：

和：$(f+g)(t) = f(t) + g(t)$

スカラー積：$(af)(t) = a(f(t))$

このとき，これらの演算のもとで、$\mathcal{L}(D)$は2次元の線形空間Q^2に同型なQ上の線形空間となる。その基底の1つは，$\{f^{(1,0)}, f^{(0,1)}\}$であり，$f^{(1,0)}(t)$，$f^{(0,1)}(t)$のx^iの係数はそれぞれ、Dにおけるtからsinksへの長さiの道の個数、tからsinks以外の頂点への長さiの道の個数である。さ

らに、$f^{(1,1)} = f^{(1,0)} + f^{(0,1)}$ であるから，$f^{(1,1)}(t)$ の x^i の係数は t からの長さ i の道の個数である。次に、$\mathcal{L}(D)$ の各要素 f に対して、

$$\tilde{f} = \sum_{t \in V(D)} f(t) \quad \text{, ただし } V(D) \text{ は } D \text{ の頂点の集合}$$

と定めると，$\tilde{f}^{(1,1)}$ の x^i の係数は、D の長さ i の道の個数であり、$\tilde{f}^{(1,1)}$ は D の道多項式（path polynomial of D）と呼ばれている。

acyclic digraph D が推移律をみたすとき，D は順序集合（正確には，non-reflexive poset）となり，前述の記号、用語が次のように代るだけであり：

$$\sum_{t \to s} \Longrightarrow \sum_{t > s}, \quad \text{道 (path)} \Longrightarrow \text{鎖 (chain)}$$

また、D が順序集合 P のハッセ図（H(P)）を表すとき、次のように代るだけである：

$$\sum_{t \to s} \Longrightarrow \sum_{t > s}, \quad \text{道 (path)} \Longrightarrow \underset{\text{covering chain}}{\text{被覆鎖}} \; \underset{\text{maximal chain}}{\text{(極大鎖)}}$$

D が順序集合 P であるとき，$f^{(1,1)} \in \mathcal{L}(P)$ に対して，

$$\tilde{f}^{(1,1)} = p_P(x) = \sum_{i=0}^{d} c_i x^i \quad \text{(鎖多項式)}$$

であることは明らかである。また、次の定理を得る。

<u>定理2.1</u>　P を（連結な）順序集合とする。このとき、P の極小元を除くすべての要素 t に対して、

$$f^{(1,0)}(t) = (f^{(0,1)}(t))x$$

となるための必要十分条件は、Pが最小元をもつことである。

定理2.2　Pを最大元$\hat{1}$をもつ順序集合とするとき、

$$\tilde{f}^{(a,b)} = ((x+1)f^{(a,b)}(\hat{1}) - b)/x$$

が成り立つ。

さらに、次の命題は接合代数のMöbius関数等との関係を示す。

命題2.1　Pを順序集合、$[s,t]$をPの区間とする。このとき、$f^{(1,0)} \in \mathcal{L}([s,t])$, $f^{(1,1)} \in \mathcal{L}(P)$に対して、次が成り立つ。

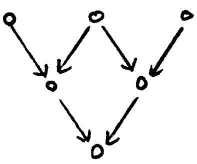
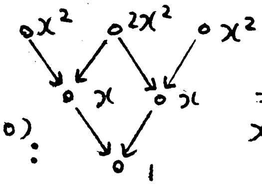
(1)　$(\zeta - \delta)^i(s,t) = \eta^i(s,t) = f^{(1,0)}(t)$の$x^i$の係数,

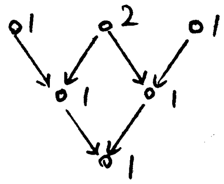
(2)　$(2\delta - \zeta)^{-1}(s,t) = (\delta - \eta)^{-1}(s,t)$,

$= f^{(1,0)}(t)\big|_{x=1} =$ tからsへの鎖の個数

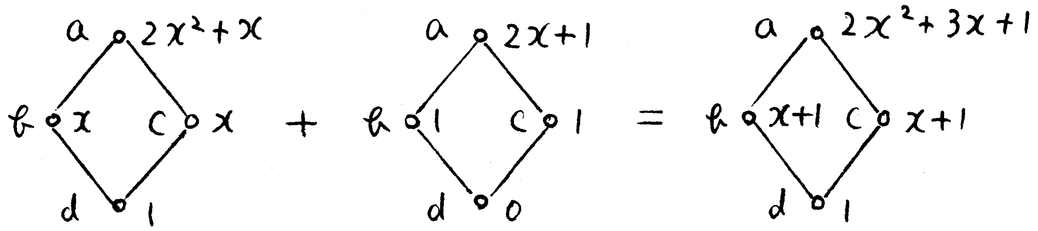
(3)　$\mu(s,t) = f^{(1,0)}(t)\big|_{x=-1}$。

例2.3　パスカルの三角形（P = 2次元格子グラフ）

$P =$  に対して $f^{(1,0)}$: 

$\xRightarrow{x=1}$ 

<u>例2.4</u>　例2.1の順序集合 P に対して、$\mathcal{L}(P)$ で考える。



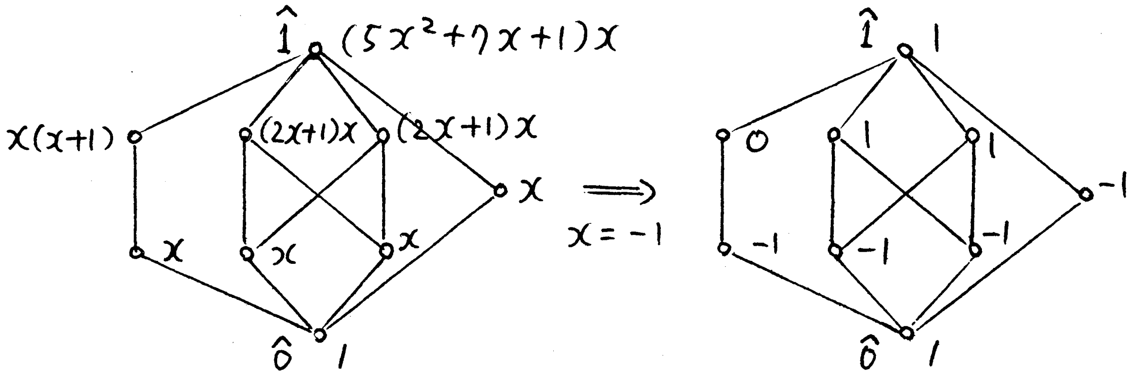
$f^{(1,0)}$　　　$f^{(0,1)}$　　　$f^{(1,1)}$

。$\tilde{f}^{(1,1)} = (2x^2+3x+1) + 2(x+1) + 1 = 2x^2+5x+4 = p_P(x)$

$\left(\tilde{f}^{(1,1)} = ((x+1)f^{(1,1)}(a) - 1)/x\right.$: 定理2.2 に注意)

。$\mu(d,a) = f^{(1,0)}(a)\big|_{x=-1} = (2x^2+x)\big|_{x=-1} = 1$

<u>例2.5</u>　本講究録の郡山氏の例1に対して，



$f^{(1,0)}(\in \mathcal{L}([\hat{0},\hat{1}]))$　　　$\mu(\hat{0},t)$

(これらの幾何学的意味については郡山氏の項を参照)

以上のように、<u>一般の順序集合の鎖の個数にかかわる量の計算法として、"単純再帰法"が接合代数の行列的手法より簡明</u>

であることがわかる。ところで、Pが組合せ論に良くでてくる具体的な順序集合、すなわち、ブール束、立方体束、分割束、ヤング束、部分空間束などのとき、単純再帰法により、それらの鎖多項式に関する具体的な漸化式が"直接的"に得られるであろうか。まず、ブール束、立方体束、分割束の場合、次のように容易に得られている。[7),11),12),18)]

命題2.2　一般論より、$f^{(1,0)}$, $f^{(0,1)}$, $f^{(1,1)}$ などのいずれかが求まればよいので、形が簡明な場合を示す。

(1)　n次のブール束 B_n に対して、$\mathcal{L}(B_n)$の $f^{(1,0)}(\hat{1})$ を $g_n(x)$ で表わすと、

$$g_n(x) = \begin{cases} 1 & (n=0) \\ \left(\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} g_k(x)\right) x & (n \geqq 1) \end{cases}$$

となる。

(2)　n次の立方体束（超立方体の面の包含関係から得られるもの）から最小元を除いたもの C_n^- に対して、$\mathcal{L}(C_n^-)$の $f^{(1,1)}(\hat{1})$ を $r_n(x)$ で表わすと、

$$r_n(x) = \begin{cases} 1 & (n=0) \\ \sum_{k=0}^{n-1} \left(\left(2^{n-k} \binom{n}{k} \right) r_k(x) \right) x + 1 & (n \geqq 1) \end{cases}$$

となる。

(3)　n次の分割束PL_nとその順序双対PL^*_nに対して、$\mathcal{L}(PL^*_n)$の$f^{(1,1)}(\hat{1})$を$s_n(x)$で表わすと、一般論よりこの$s_n(x)$は$\mathcal{L}(PL_n)$の$f^{(1,1)}(\hat{1})$と等しくなり、

$$s_n(x) = \begin{cases} 1 & (n=1) \\ \sum_{k=1}^{n-1} S(n,k)\, s_k(x)\, x + 1 & (n \geqq 2) \end{cases}$$

を得る。ただし、$S(n,k)$は第2種のスターリング数である。

さらに、$g_n(x)$と$r_n(x)$に対しては母関数や閉じた式が得られているが[11),12)]、$s_n(x)$に対しては得られていない。また、$g_n(1)$に対する($n\to\infty$のときの)漸近公式が得られている[19),20)]。n次の分割束PL_nの被覆鎖(covering chain)の個数に関する次の計算実験の結果は興味深い[18)]。

<u>実験結果</u>　$C_{PL}(n)$でPL_nの最大元$\hat{1}$からの被覆鎖の総数、$\tilde{C}_{PL}(n)$でPL_nの被覆鎖の総数を表わすとき、

$$\tilde{C}_{PL}(n)/C_{PL}(n) \underset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} 2.394833099273404716 5\cdots$$

<u>Open Problem</u>　上記の数を既知の定数等で表わせ!

(ちなみに、ブール束の場合、ネイピアの数eとなる)

なお、単体的複体のf-vectorとその重心細分のf-vectorの関係式、および立方体的複体のf-vectorとその重心細分

の f-vector の関係式が、単純再帰法を用いて与えられている。[12),21)]

ところで、ヤング束の場合は単純再帰法は有効であろうか。Y_n で n 次のヤング束（数 n の分割までのヤング束）を表わし、Y_n^* で Y_n の順序双対を表わし、$f^{(1,0)} \in \mathcal{L}(H(Y_n^*))$ に対して $f^{(1,0)}(\hat{1})|_{x=1}$ を $f(n)$ とおく。このとき、次のような簡明な漸化式が与えられているが、この漸化式を単純再帰法によって"直接的に"導くことが今のところできない：

$$\begin{cases} f(0) = f(1) = 1 \\ f(n) = f(n-1) + (n-1) f(n-2) \qquad (n \geqq 2). \end{cases}$$

この漸化式は、Y_n^* の極大鎖の集合と n 次の対称群 S_n の involutions の集合の間の Robinson - Schensted の対応によって $\#\{S_n \text{ の involutions}\} = f(n)$ であることから、S_n の involution を考えることによって得られる。また、$f(n)$ の閉じた式、母関数、漸近公式も与えられている。[3)]（この辺のところやその拡張に関する結果は本講究録の岩堀スクールの精鋭による項を参照。）最近、Stanley[22)]（この preprint は本日：1987年12月19日に受け取ったばかりである）はヤング束の "simple structural properties" にもとづく数え上げを考察している。

部分空間束の combinatorics に関する論文は沢山あるが、まだ、良く読んでいないので、何も具体的に述べることがで

きないのが残念である。我々の目的：

"単純再帰法(simple recursive method)を用いて、
種々の組合せ論的数や公式を順序集合(より一般に
acyclic digraph)の鎖の個数で解釈すること"

を達成するためには、より強力な理論を構築しねばならぬことは確かなようである。

その際、与えられた$g(x)$に対して、$p_P(x)=g(x)$となる順序集合Pの構成問題やクラス$\{P \mid p_P(x)=g(x)\}$の考察が重要であると思われる。また、c-vectorの特徴付けは、本講究録の郡山氏、日比氏、渡辺氏の項とも関連している。

文献

1. P. M. Neumann, A lemma that is not Burnside's, Math. Scientist 4(1979), pp. 133-141.

2. G.-C. Rota, On the foundations of combinatorial theory I; Theory of Möbius functions, Z. Wahrsheinlichkeitstheorie und Verw. 2(1964), pp. 340-368.

3. R. P. Stanley, Enumerative Combinatorics I, Wadsworth, 1986

4. A. Joyal, Une theorie combinatorie des series formelles, Advan. in Math. 42(1981), pp. 1-82.

5. R. P. Stanley, Combinatorics and Commutative Algebra, Birkhäuser, 1983.

6. H. Narushima, Principle of inclusion-exclusion on semilattices, J. Combinatorial Theory A, (17) (1974), pp. 196-203

7. H. Narushima and H. Era, A variant of inclusion-exclusion on semilattices, Discrete Math., 21 (1978), pp. 215-217

8. H. Narushima, Principle of inclusion-exclusion on partially ordered sets, Discrete Math., 42 (1982), pp. 243-250.

9. R.W. Robison, Counting strongly connected finite automata, in Y. Alavi, G. Chartrand, et al (eds.), Graph theory with Applications to Algorithms and Computer Science, (John Wiley & Sons, 1985), pp. 671-685.

10. H. Narushima, Principle of inclusion-exclusion on semilattices and its applications, Doctor's Thesis, Waseda Univ., 1977.

11. H. Narushima, A class of recurrence relations on acyclic digraphs of poset type, RIMS Kokyuroku 427 (Applied Combinatorial Theory and Algorithms), June 1981, pp. 56-67.

12. H. Narushima, An algorithmic role of the face-posets of polyhedral complexes, in Suzuki, S. (ed), Topology and Computer Science, (Kinokuniya, 1987), pp. 521-533.

13. O. Nava and G.-C. Rota, Plethysm, Categories, and Combinatorics, Advan. in Math. 58 (1985), pp. 61-88.

14. F. Bonetti, G.-C. Rota, D. Senato and A.M. Venezia, Symmetric functions and Symmetric species, Annals of Discrete Math. 30 (1986), pp. 107-114.

15. C. Berge, Principle of Combinatorics, Academic Press, 1971.

16. 本田欣哉, Vinogradov 著(三瓶、山中訳)、整数論入門の付録II(1962年版), 共立全書.

17. H. Narushima, A method for counting the number of chains in a partially ordered set, Proc. Fac. Sci. Tokai Univ. XVI (1981), 3–20.

18. 成嶋弘、峯崎俊哉, 組合せ論的数と整数型高精度計算、in「グラフ理論の数値計算への応用」統計数理研究所(昭和62年1月), 49–53.

19. H. Narushima, An asymptotic formula for the number of chains in a Boolean lattice: a survey and another proof, Proc. Fac. Sci. Tokai Univ. XXI (1986), 21–26.

20. H. Narushima and T. Hilano, A limit on the number of chains in a Boolean lattice, preprint.

21. H. Narushima, M. Tsuchiya, and T. Minezaki, A method for computing the face-vector of a barycentric subdivided polyhedral complex, preprint.

22. R. P. Stanley, Differential posets, preprint