数理解析研究所講究録
642巻 1988年 119-133

半単純対称空間上の離散系列表現の存在条件

東大 理　大島利雄　(Toshio Oshima)
鳥取大教養　松木敏彦　(Toshihiko Matsuki)

§1で$(\mathfrak{g}, K)$-加群B_λを定義し，§2で半単純対称空間上の離散系列表現のK-有限ベクトルの空間がB_λで表わされることを述べ，§3で定理2.3の逆(ある条件を満たすλについて$B_\lambda \neq \{0\}$)を典型的な例について示す。

§1. ある$(\mathfrak{g}, K)$-加群B_λの定義

$\mathfrak{g}$を複素半単純リー環とし，θを$\mathfrak{g}$の複素線形なinvolution (すなわち $\theta\circ\theta = identity$)，$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$を$\theta$に関する$\mathfrak{g}$の+1, -1固有空間分解とする。$\mathfrak{a}$を$\mathfrak{k}$の半単純元からなる可換な複素部分空間とする。$\alpha \in \mathfrak{a}^*$ ($\mathfrak{a}$上の複素線型形式の空間)に対して，

$$\mathfrak{g}^\alpha = \{ X \in \mathfrak{g} \mid [Y, X] = \alpha(Y)X, \ \forall Y \in \mathfrak{a} \},$$

$$m_\alpha = \dim \mathfrak{g}^\alpha, \qquad m_\alpha^+ = \dim(\mathfrak{g}^\alpha \cap \mathfrak{k})$$

とおき，

$$\Sigma = \Sigma(\mathfrak{g}\,;\mathfrak{a}) = \{\alpha \in \mathfrak{a}^* \backslash \{0\} \mid \mathfrak{g}^\alpha \neq \{0\}\}$$

とおく。このとき,

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\alpha \in \Sigma \cup \{0\}} \mathfrak{g}^\alpha$$

(注) ある種の$\mathfrak{a}$(§2参照)に対して,$\Sigma(\mathfrak{g}\,;\mathfrak{a})$はルート系の公理系を満たし,そのとき$\Sigma(\mathfrak{g}\,;\mathfrak{a})$は組$(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$に関するルート系と呼ばれる。

$Y_0 \in \mathfrak{a}$を$\alpha(Y_0) \in \mathbb{R}^\times$, $\forall \alpha \in \Sigma$となるように1つ定め,

$$\Sigma^+ = \{\alpha \in \Sigma \mid \alpha(Y_0) > 0\},$$

$$\rho = \frac{1}{2}\Sigma_{\alpha \in \Sigma^+} m_\alpha \alpha, \quad \rho_t = \frac{1}{2}\Sigma_{\alpha \in \Sigma^+} m_\alpha^+ \alpha,$$

$$\mathfrak{n} = \bigoplus_{\alpha \in \Sigma^+} \mathfrak{g}^\alpha, \quad \mathfrak{p} = \mathfrak{g}^0 \oplus \mathfrak{n},$$

$\mathfrak{m} =$ $\mathfrak{g}^0$におけるKilling formに関する$\mathfrak{a}$の直交補空間

とおく。

Gを$\mathfrak{g}$をリー環に持つ連結リー群とし,K, M, A, N, Pをそれぞれ$\mathfrak{k}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$に対するGの解析的部分群とする。

$\mathcal{L} = \{\lambda \in \mathfrak{a}^* \mid P/MN\ (\simeq A/A\cap M \simeq (\mathbb{C}^\times)^{\dim A})$ のある正則指標$\tilde{\lambda}$があって $\tilde{\lambda}(\exp Y) = e^{\langle \rho - \lambda, Y\rangle}$, $\forall Y \in \mathfrak{a}\}$ $(\simeq \mathbb{Z}^{\dim A})$,

$$C = C(\Sigma^+) = \{\lambda \in \mathfrak{a}^* \mid \mathrm{Re}\langle \lambda, \alpha \rangle > 0,\ \forall \alpha \in \Sigma^+\}$$

とおく。$\lambda \in \mathcal{L}$ に対して $L_{\tilde{\lambda}}$ を P の正則指標 $\tilde{\lambda}$ に随伴した G/P 上の line bundle とし，$\mathcal{O}_{alg}(L_{\tilde{\lambda}})$ を $L_{\tilde{\lambda}}$ の algebraic sections のなす層とする。

<u>定義</u>　$B_\lambda = B_{\Sigma^+,\lambda} = H^n_V(G/P;\ \mathcal{O}_{alg}(L_{\tilde{\lambda}}))$ とおく。ここで $V = KP/P$ はコンパクトであり，$n = \mathrm{codim}\,V$. 左からの $\mathfrak{g}$ と K の作用により B_λ は $(\mathfrak{g}, K)$-加群の構造を持つ。

<u>定理1.1</u>　P' を $K \cap P$ に含まれる K の任意の放物型部分群とし，$\bar{\mathfrak{n}}_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p} \cap \bigoplus_{\alpha \in \Sigma^+} \mathfrak{g}^{-\alpha}$ 上の symmetric algebra $S(\bar{\mathfrak{n}}_{\mathfrak{p}})$ の $\mathrm{Ad}(MA \cap P')$-既約分解を $S(\bar{\mathfrak{n}}_{\mathfrak{p}}) = \bigoplus_{j=1}^{\infty} S_j$ とする。$\lambda \in \mathcal{L} \cap \bar{C}$ のとき，任意の $\tau \in \hat{K}$ に対して

$$[B_\lambda : \tau] = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_i (-1)^i [H^i(K/P';\ S_j \otimes \mathbb{C}_{-\mu_\lambda}) : \tau]$$

ここで，$\mu_\lambda = \lambda + \rho - 2\rho_t$，$\mathbb{C}_{-\mu_\lambda}$ は P' の指標で $m(\exp Y)n \longmapsto e^{-\mu_\lambda(Y)}$ $(m \in P' \cap M,\ Y \in \mathfrak{a},\ n \in P' \cap N)$ で定義される。S_j も P' の表現として $P' \cap N$ 上自明に拡張しておく。

(注)　Borel-Weil-Bott の定理により，各 $H^i(K/P';\ S_j \otimes \mathbb{C}_{-\mu_\lambda})$ は既約または $\{0\}$ である。また，各 j に対して，高々1つの i を除いて $H^i(K/P';\ S_j \otimes \mathbb{C}_{-\mu_\lambda}) = \{0\}$ で

ある。

定理1.1は[B]のvanishing theoremを用いて容易に得られるが，B_λはZuckerman functor（[V1], Chapter 6）を用いても定義されることが知られており，[V1] Theorem 6.3.12 (p.357)及びvanishing theorem（[V2]）によっても得られる。

§2. 半単純対称空間 $G_{\mathbb{R}}/H_{\mathbb{R}}$ 上の離散系列表現

σをθと可換な$\mathfrak{g}$の複素線形involutionとし，$\mathfrak{g}=\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{q}$を$\sigma$に関する$\mathfrak{g}$の$+1, -1$固有空間分解とする。$\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$を$\mathfrak{g}$のreal formで$\theta|_{\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}}$が$\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$のCartan involutionになるものとし，$\mathfrak{k}_{\mathbb{R}}=\mathfrak{k}\cap\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$，$\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}=\mathfrak{h}\cap\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$，$G_{\mathbb{R}}, K_{\mathbb{R}}, H_{\mathbb{R}}, H$をそれぞれ$\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}, \mathfrak{k}_{\mathbb{R}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}, \mathfrak{h}$に対する$G$の解析的部分群とする。$L^2(G_{\mathbb{R}}/H_{\mathbb{R}})$の閉部分空間に実現できる$G_{\mathbb{R}}$の既約ユニタリ表現を，半単純対称空間$G_{\mathbb{R}}/H_{\mathbb{R}}$上の離散系列表現（D.S.）と呼ぶ。

<u>定理2.1</u>（[F-J], [OM]）$G_{\mathbb{R}}/H_{\mathbb{R}}$上のD.S.が存在$\Leftrightarrow$

$$\operatorname{rank}(G_{\mathbb{R}}/H_{\mathbb{R}})=\operatorname{rank}(K_{\mathbb{R}}/K_{\mathbb{R}}\cap H_{\mathbb{R}}) \tag{2.1}$$

以下，条件(2.1)を仮定する。$\mathfrak{a}_{\mathbb{R}}$ を $\mathfrak{k}_{\mathbb{R}}\cap\mathfrak{q}$ の極大可換部分空間とすると，(2.1)により $\mathfrak{a}=(\mathfrak{a}_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}}$ は $\mathfrak{q}$ の極大可換部分空間になる。この $\mathfrak{a}$ に対して，§1で定義した $B_\lambda = B_{\Sigma^+,\lambda}$ を考える。$\mathcal{L}'=\{\lambda\in\mathcal{L}\mid \tilde{\lambda}|_{A\cap H}=1\}$ とおく。

<u>定理2.2</u>（[OM]$+\alpha$）$G_{\mathbb{R}}/H_{\mathbb{R}}$ 上の任意のD.S.に対して，$\Sigma=\Sigma(\mathfrak{g};\mathfrak{a})$ のある正のルート系 Σ^+ と $\lambda\in\mathcal{L}'\cap\mathcal{C}(\Sigma^+)$ が存在して，そのD.S.のK-有限ベクトルの空間は，$B_{\Sigma^+,\lambda}$ と $(\mathfrak{g},K)$-同型になる。（$B_{\Sigma^+,\lambda}$ の既約性については[V3]で示されている。）

<u>定理2.3</u>（[M]）$\lambda\in\mathcal{L}'\cap\overline{\mathcal{C}(\Sigma^+)}$ に対して，$B_{\Sigma^+,\lambda}\neq\{0\}$

$\Longrightarrow$

(2.2) 次の(i)(ii)を満たす任意の Σ^+ のルートの列 $\beta_1,\ldots,\beta_k$ に対して，$\langle\mu_\lambda,\beta_k\rangle\geq 0$ 。

(i) β_i は $\{\alpha\in\Sigma^+\mid\langle\alpha,\beta_1\rangle=\cdots=\langle\alpha,\beta_{i-1}\rangle=0\}$ の simple root（$\forall i=1,\ldots,k$）.

(ii) $N_i=\sum_{\alpha\in\beta_i+\mathbb{Z}\beta_1+\cdots+\mathbb{Z}\beta_{i-1}}(2m_\alpha^+-m_\alpha)$ とおくと，$N_i<m_{\beta_i}$（$i=1,\ldots,k-1$），$N_k=m_{\beta_k}$.

§3. 定理2.3の逆についての例

$G = SO(n, \mathbb{C})$ とする。$SL(n, \mathbb{C})$, $Sp(n, \mathbb{C})$ についても同様のことができるが，本稿では $SO(n, \mathbb{C})$ についてだけ述べる。$n = p + 2r + q + 2s$ とし，

$$K_1 = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & E_{q+2s} \end{pmatrix} \middle| A \in SO(p+2r, \mathbb{C}) \right\},$$

$$K_2 = \left\{ \begin{pmatrix} E_{p+2r} & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \middle| B \in SO(q+2s, \mathbb{C}) \right\},$$

$$K = K_1 K_2 \simeq K_1 \times K_2,$$

$$\mathfrak{p} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & X \\ -{}^tX & 0 \end{pmatrix} \middle| X \text{ は } (p+2r) \times (q+2s) \text{ 複素行列} \right\}$$

とおく。$Y(h_1, \cdots, h_{n'}) \in G$ $\left(n' = p' + r + q' + s,\ p' = [\frac{p}{2}],\ q' = [\frac{q}{2}]\right)$ を

$$Y(h_1, \cdots, h_{n'}) = \begin{pmatrix} Y'(h_1, \cdots, h_r, h_{r+s+1}, \cdots, h_{r+s+p'}) & 0 \\ 0 & Y'(h_{r+1}, \cdots, h_{r+s}, h_{r+s+p'+1}, \cdots, h_{n'}) \end{pmatrix}$$

で定義する。ただし，$SO(m, \mathbb{C})$ において $m' = [\frac{m}{2}]$ とおくとき，

$$Y'(h_1, \cdots, h_m) = \underset{(m:\text{even})}{\begin{pmatrix} 0 & & & & h_1 \\ & & & h_{m'} & \\ & & -h_{m'} & & \\ & & & & 0 \\ -h_1 & & & & \end{pmatrix}} \text{ or } \underset{(m:\text{odd})}{\begin{pmatrix} 0 & & & & h_1 \\ & & & h_{m'} & \\ & & 0 & & \\ & -h_{m'} & & & \\ -h_1 & & & & 0 \end{pmatrix}}$$

とする。

$$\tilde{\mathfrak{a}} = \{ Y(h_1, \cdots, h_{n'}) \mid h_1, \cdots, h_{n'} \in \mathbb{C} \},$$

$$\mathfrak{a} = \{ Y(h_1, \cdots, h_{r+s}, 0, \cdots, 0) \mid h_1, \cdots, h_{r+s} \in \mathbb{C} \},$$

$$\tilde{\mathfrak{a}}_i = \tilde{\mathfrak{a}} \cap \mathfrak{k}_i, \quad \mathfrak{a}_i = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{k}_i \ (i=1,2)$$

とおく。$e_i \in \tilde{\mathfrak{a}}^*$ を $\langle e_i, Y(h_1, \cdots, h_{n'}) \rangle = \sqrt{-1}\, h_i$ で定義し，$\bar{e}_i = e_i|_{\mathfrak{a}}$ とすると，$p+q>0$ のとき

$$\Sigma = \Sigma(\mathfrak{g};\mathfrak{a}) = \{ \pm\bar{e}_i \mid i=1,\cdots,r+s \} \cup \{ \pm\bar{e}_i \pm \bar{e}_j \mid i \neq j \}$$

である。次のような Σ の正のルート系 Σ^+ を取る。

$$\begin{aligned} \Sigma^+ = &\{ \bar{e}_i \mid i=1,\cdots,r+s \} \cup \{ \bar{e}_i + \bar{e}_j \mid i \neq j \} \\ &\cup \{ \bar{e}_i - \bar{e}_j \mid 1 \leq i < j \leq r \} \\ &\cup \{ \bar{e}_i - \bar{e}_j \mid r+1 \leq i < j \leq r+s \} \\ &\cup \{ \bar{e}_i - \bar{e}_j \mid 1 \leq i \leq r,\ j(i)+1 \leq j \leq r+s \} \\ &\cup \{ \bar{e}_j - \bar{e}_i \mid 1 \leq i \leq r,\ r+1 \leq j \leq j(i) \} \end{aligned}$$

ただし $r \leq j(1) \leq j(2) \leq \cdots \leq j(r) \leq r+s$。このとき，

$$\begin{aligned} \bar{\mathfrak{n}}_{\mathfrak{p}} = &\bigoplus_{i=1}^{r+s} (\mathfrak{g}^{-\bar{e}_i} \cap \mathfrak{p}) \oplus \bigoplus_{i=1}^{r} \bigoplus_{j=r+1}^{r+s} \mathfrak{g}^{-(\bar{e}_i+\bar{e}_j)} \\ &\oplus \bigoplus_{i=1}^{r} \bigoplus_{j=j(i)+1}^{r+s} \mathfrak{g}^{\bar{e}_j - \bar{e}_i} \oplus \bigoplus_{i=1}^{r} \bigoplus_{j=r+1}^{j(i)} \mathfrak{g}^{\bar{e}_i - \bar{e}_j} \end{aligned}$$

$$\simeq \bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{C}_{-e_i} \boxtimes \underset{q}{\square} \oplus \bigoplus_{j=r+1}^{r+s} \underset{p}{\square} \boxtimes \mathbb{C}_{-e_j} \oplus \bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{C}_{-e_i} \boxtimes V$$

$$\oplus \bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{C}_{-e_i} \boxtimes U_i \oplus \bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{C}_{e_i} \boxtimes U_i'$$

$$= \bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{C}_{-e_i} \boxtimes \left(\underset{q}{\square} \oplus V \oplus U_i\right) \oplus \underset{p}{\square} \boxtimes V \oplus \bigoplus_{i=1}^{r} \mathbb{C}_{e_i} \boxtimes U_i'$$

ここで，$\underset{p}{\square}$，$\underset{q}{\square}$ はそれぞれ $M_1 = M \cap K_1 \simeq SO(p,\mathbb{C})$，$M_2 = M \cap K_2 \simeq SO(q,\mathbb{C})$ の standard 表現，$V = \mathbb{C}_{-e_{r+1}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}_{-e_{r+s}}$，$U_i = \mathbb{C}_{e_{j(i)+1}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}_{e_{r+s}}$，$U_i' = \mathbb{C}_{-e_{r+1}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}_{-e_{j(i)}}$ であり，$\tau_1 \boxtimes \tau_2$（τ_i は $M_i A_i$ の表現）は，τ_1 の表現空間 $\otimes$ τ_2 の表現空間の上への $MA \simeq M_1A_1 \times M_2A_2$ の自然な表現である。

$\mu_\lambda = \sum_{i=1}^{r+s} \mu_\lambda^i \overline{e}_i$ と表すと，条件 $\lambda \in \mathcal{L} \cap \overline{\mathcal{C}}$ と (2.2) により

(3.1) $\mu_\lambda^i \in \mathbb{Z}$, $\mu_\lambda^1 \geq \cdots \geq \mu_\lambda^r$, $\mu_\lambda^{r+1} \geq \cdots \geq \mu_\lambda^{r+s}$

(3.2) $\mu_\lambda^r \geq 0$ または $\mu_\lambda^{r+s} \geq 0$

が得られる。必要に応じて K_1 と K_2 の役割を入れかえることにより，

(3.2)′ $\mu_\lambda^{r+s} \geq 0$

と仮定してよい。r_0 ($0 \leq r_0 \leq r$) を $\mu_\lambda^{r_0} \geq 0$ となる最大の数とする。このとき，k_j ($j = 1, \cdots, s$) を次のように

帰納的に定義する。

$$k_j = \max\{ k \in \mathbb{Z} \mid j'(k) < r+j,\ k \neq k_1, \cdots, k_{j-1}\}$$

ただし，$j'(k) = \begin{cases} j(k) & (k > r_0) \\ r & (k \leq r_0) \end{cases}$.

$\mu^i = \begin{cases} \mu_\lambda^i & (i > r_0) \\ 0 & (i \leq r_0) \end{cases}$ とおき，$\mu_\lambda^{r+1} + \mu^{k_1}, \cdots,$

$\mu_\lambda^{r+s} + \mu^{k_s}$ を大きい順に並べたものを $\delta_1, \cdots, \delta_s$ とする。

<u>補題3.1</u>　条件 $\lambda \in \mathcal{L} \cap \overline{\mathcal{C}}$，(3.1)，(3.2)$'$ の下で，

(2.2) $\Longleftrightarrow$

(3.3)　$\#\{ k \in \mathbb{Z} \mid r_0+1 \leq k \leq r,\ k \neq k_1, \cdots, k_s\} \leq q$

<u>補題3.2</u>　$\tau = \tau_1 \boxtimes \tau_2 \in \hat{K} \simeq \hat{K}_1 \times \hat{K}_2$ の highest weight $v_\tau = \sum_{i=1}^{r+s} v_\tau^i e_i$ が次の2つの条件

(3.4)　$v_\tau^1 = \mu_\lambda^1, \cdots, v_\tau^{r_0} = \mu_\lambda^{r_0},\ v_\tau^{r_0+1} = \cdots = v_\tau^r = 0$

(3.5)　$v_\tau^{r+1} + \cdots + v_\tau^{r+s} \leq \delta_1 + \cdots + \delta_s$

を満たすとき，

(3.6)　$[B_\lambda : \tau] = \sum_I (-1)^I [H^I(K_2/K_2 \cap P'; D \otimes \mathbb{C}_{-\mu_\lambda|\alpha_2}) : \tau_2]$

ここで，

$$D = \bigoplus_{\ell_{r_0+1},\cdots,\ell_r=0}^{\infty} \begin{vmatrix} (\underset{q}{\square}\oplus U_{r_0+1})^{n_{r_0+1}} & (\underset{q}{\square}\oplus U_{r_0+2})^{n_{r_0+2}+1} & \cdots & (\underset{q}{\square}\oplus U_r)^{n_r+r-r_0-1} \\ (\underset{q}{\square}\oplus U_{r_0+1})^{n_{r_0+1}-1} & (\underset{q}{\square}\oplus U_{r_0+2})^{n_{r_0+2}} & \cdots & (\underset{q}{\square}\oplus U_r)^{n_r+r-r_0-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\underset{q}{\square}\oplus U_{r_0+1})^{n_{r_0+1}-r+r_0+1} & (\underset{q}{\square}\oplus U_{r_0+2})^{n_{r_0+2}-r+r_0+2} & \cdots & (\underset{q}{\square}\oplus U_r)^{n_r} \end{vmatrix}$$

$$\otimes\, {U'_{r_0+1}}^{\ell_{r_0+1}} \otimes \cdots \otimes {U'_r}^{\ell_r}$$

$(n_i = -\mu_\lambda^i + \ell_i)$

$U^m = U^{\circledS m}$ は U の m次対称テンソル積を表わし（特に $m<0$ のとき $U^m=\{0\}$），

$$\begin{vmatrix} V_{11} & \cdots & V_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ V_{m1} & \cdots & V_{mm} \end{vmatrix} = \bigoplus_{\substack{\sigma\in S_m \\ \mathrm{sgn}\,\sigma=1}} V_{1\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes V_{m\sigma(m)} \ominus \bigoplus_{\substack{\sigma\in S_m \\ \mathrm{sgn}\,\sigma=-1}} V_{1\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes V_{m\sigma(m)}$$

<u>証明の方針</u> (i) K_1 について Borel-Weil-Bott の定理を適用するとき，条件 (3.4) により K_1 の Weyl群 $W(\tilde{\pi}_1)$ の元のうち $e_1,\cdots,e_{r_0}$ を fix するもののみを考えればよいことが示される。

(ii) さらに条件 (3.5) により，

(3.7) $W(\tilde{\pi}_1)$ の元のうち $e_{r_0+1},\cdots,e_{r+p'}$ の permutation のみを考えればよく，

また $S' = S\left(\bigoplus_{i=r_0+1}^{r} \mathbb{C}_{-e_i} \boxtimes (\square_{\mathfrak{g}} \oplus U_i) \oplus \bigoplus_{i=r_0+1}^{r} \mathbb{C}_{e_i} \boxtimes U_i'\right) \subset S(\bar{\pi}_{\mathfrak{p}})$ とおくとき，

(3.8) $[B_\lambda : \tau] = \sum_I (-1)^I [H^I(K/P'; S' \otimes \mathbb{C}_{-\mu_\lambda}) : \tau]$

が示される。(3.7) と (3.8) により (3.6) が得られる。

以上によって，次の補題が証明されれば，この例について定理2.3 の逆が成り立つことがわかる。

補題3.3　条件(3.3) の下で，$\delta \in \hat{K}_2$ であって，δ の highest weight v_δ が $v_\delta|_{\mathfrak{a}_2} = \delta_1 e_{r+1} + \cdots + \delta_s e_{r+s}$ を満たし，

$$\sum_I (-1)^I [H^I(K_2/K_2 \cap P'; D \otimes \mathbb{C}_{-\mu_\lambda|\mathfrak{a}_2}) : \delta] = 1$$

となるものが存在する。($\langle v_\delta, e_{r+s+p'+1}\rangle, \cdots, \langle v_\delta, e_{n'}\rangle$ を最小に取れば，$\tau_1 \boxtimes \delta$ が B_λ の "lowest K-type" であると思われる。)

$j(r_0+1) = \cdots = j(r) \geq r_0+s$ の場合には，次のようにして補題3.3 が証明される。

$j(r_0+1) = \cdots = j(r) = r+s_0$ とおき，$r_1 = r - r_0$，

$s_1 = s - s_0$, $s_2 = r_1 - s_1$ とおくと，$s_2 \geq 0$ であり，

$$k_1 = \cdots = k_{s_0} = r_0,$$

$$k_{s_0+1} = r,\ k_{s_0+2} = r-1,\ \cdots,\ k_s = r - s_1 + 1,$$

$$D = \bigoplus_{\substack{l_{r_0+1},\cdots,\\ l_r=0}}^{\infty} \begin{vmatrix} \square_U^{n_{r_0+1}} & \square_U^{n_{r_0+2}+1} & \cdots & \square_U^{n_r+r_1-1} \\ \square_U^{n_{r_0+1}-1} & \square_U^{n_{r_0+2}} & \cdots & \square_U^{n_r+r_1-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \square_U^{n_{r_0+1}-r_1+1} & \square_U^{n_{r_0+2}-r_1+2} & \cdots & \square_U^{n_r} \end{vmatrix} \otimes \bigotimes_{i=r_0+1}^{r} U'^{l_i}$$

ただし，$n_i = -\mu_\lambda^i + l_i$，$\square_U = \square \oplus U$，$U = \mathbb{C}_{e_{r+s_0+1}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}_{e_{r+s}}$，$U' = \mathbb{C}_{-e_{r+1}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}_{-e_{r+s_0}}$．

$\delta_1 = \mu_\lambda^{r+1}, \cdots, \delta_{s_0} = \mu_\lambda^{r+s_0}$ であるから，

$$[H^*(K_2/K_2 \cap P');\ D \otimes \mathbb{C}_{-\mu_\lambda|\alpha_2}) : \delta]$$

$$= [H^*(K_2/K_2 \cap P');\ D_0 \otimes \mathbb{C}_{-\mu_\lambda|\alpha_2}) : \delta]$$

となる。ここで D_0 は D における $l_{r_0+1} = \cdots = l_r = 0$ の直和成分。

V_1, V_2 がベクトル空間であって $\dim V_2 = 1$ のとき，

$$(V_1 \oplus V_2)^m = V_1^m \oplus (V_1 \oplus V_2)^{m-1} \otimes V_2$$

であることを用いて，標準的な行列式の計算により，

$$D_0=\begin{vmatrix} \square^{-\mu_\lambda^{r_0+1}} & \cdots & \square^{-\mu_\lambda^{r-s_1}+s_2-1} & \square^{-\mu_\lambda^{r-s_1+1}+s_2} & \cdots & \square^{-\mu_\lambda^{r}+r_1-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \square^{-\mu_\lambda^{r_0+1}-s_2+1} & \cdots & \square^{-\mu_\lambda^{r-s_1}} & \square^{-\mu_\lambda^{r-s_1+1}+1} & \cdots & \square^{-\mu_\lambda^{r}+s_1} \\ (\square\oplus U_{(1)})^{-\mu_\lambda^{r_0+1}-s_2} & \cdots & (\square\oplus U_{(1)})^{-\mu_\lambda^{r-s_1}-1} & (\square\oplus U_{(1)})^{-\mu_\lambda^{r-s_1+1}} & \cdots & (\square\oplus U_{(1)})^{-\mu_\lambda^{r}+s_1-1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\square\oplus U_{(s_1)})^{-\mu_\lambda^{r_0+1}-r_1+1} & \cdots & (\square\oplus U_{(s_1)})^{-\mu_\lambda^{r-s_1}-s_1} & (\square\oplus U_{(s_1)})^{-\mu_\lambda^{r-s_1+1}-s_1+1} & \cdots & (\square\oplus U_{(s_1)})^{-\mu_\lambda^{r}} \end{vmatrix}$$

が得られる。ただし，$U_{(i)}=\mathbb{C}_{e_{r+s-i+1}}\oplus\cdots\oplus\mathbb{C}_{e_{r+s}}$.

さらに，

$$(\mu_\lambda^{r+1}+\cdots+\mu_\lambda^{r+s})-(\delta_1+\cdots+\delta_s)=-\mu_\lambda^{r-s_1+1}-\cdots-\mu_\lambda^{r}$$

であるから，

$$\begin{aligned}&[H^*(K_2/K_2\cap P';D_0\otimes\mathbb{C}_{-\mu_\lambda|\alpha_2}):\delta]\\ &=[H^*(K_2/K_2\cap P';D_1\otimes D_2\otimes\mathbb{C}_{-\mu_\lambda|\alpha_2}):\delta]\end{aligned}$$

が成り立つ。ここで

$$D_1=\begin{vmatrix} \square^{-\mu_\lambda^{r_0+1}} & \cdots & \square^{-\mu_\lambda^{r-s_1}+s_2-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \square^{-\mu_\lambda^{r_0+1}-s_2+1} & \cdots & \square^{-\mu_\lambda^{r-s_1}} \end{vmatrix}$$

$$D_2=\begin{vmatrix} U_{(1)}^{-\mu_\lambda^{r-s_1+1}} & \cdots & U_{(1)}^{-\mu_\lambda^{r}+s_1-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ U_{(s_1)}^{-\mu_\lambda^{r-s_1+1}-s_1+1} & \cdots & U_{(s_1)}^{-\mu_\lambda^{r}} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} U^{-\mu_\lambda^{r-s_1+1}} & \cdots & U^{-\mu_\lambda^{r}+s_1-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ U^{-\mu_\lambda^{r-s_1+1}-s_1+1} & \cdots & U^{-\mu_\lambda^{r}} \end{vmatrix}$$

条件(3.3)により $s_2 \leq g$ であり，このとき[I], p.137, 定理5.5により D_1 は $GL(g, \mathbb{C})$ の既約表現を与える。D_1 を $M_2 \simeq SO(g, \mathbb{C})$ の表現に分解したときに現われる最小の M_2 の既約表現 δ_0 を取って，

$$\delta = \delta_1 e_{r+1} + \cdots + \delta_s e_{r+s} + v_{\delta_0}$$

(v_{δ_0} は δ_0 の *highest weight*) とおく。$\mu = \mu_1 e_{r+s_0+1} + \cdots + \mu_{s_1} e_{r+s}$ ($\mu_i \in \mathbb{Z}$) を *highest weight* とする $GL(s_1, \mathbb{C})$ の既約表現を $\tau(\mu) = \tau(\mu_1, \cdots, \mu_{s_1})$ で表わすとき，

$$\sum_I (-1)^I [H^I(K_2/K_2 \cap P'; D_1 \otimes D_2 \otimes \mathbb{C}_{-\mu_\lambda|\mathfrak{a}_2}) : \delta]$$
$$= \tau(\mu_\lambda^{r+s_0+1}, \cdots, \mu_\lambda^{r+s}) \otimes \tau(\mu_\lambda^{r-s_1+1}, \cdots, \mu_\lambda^{r}) \text{ に}$$
$$\text{おける } \tau(\delta_{s_0+1}, \cdots, \delta_s) \text{ の multiplicity}$$

が成り立つ。この右辺が1になることが，Weyl の指標公式を用いて容易に示される。

(注) 一般の $r \leq j(1) \leq \cdots \leq j(r) \leq r+s$ についても，同様にして，ある"Weyl の指標公式の一般化"を用いて補題3.3が証明できる。

References

[B] F. Bien, Spherical D-modules and representations of reductive Lie groups, Ph.D.dissertation, M.I.T., Cambridge, Massachusetts, 1986

[F-J] M. Flensted-Jensen, Discrete series for semisimple symmetric spaces, Ann. of Math. 111(1980), 253-311.

[M] T. Matsuki, A description of discrete series for semisimple symmetric spaces II, to appear in Advanced Studies in Pure Math.

[OM] T. Oshima and T. Matsuki, A description of discrete series for semisimple symmetric spaces, Advanced Studies in Pure Math. 4(1984), 331-390.

[V1] D. Vogan, Representations of Real reductive Lie Groups, Birkhauser, Boston-Basel-Stuttgart (1981)

[V2] D. Vogan, Unitarizability of certain series of representations, Ann. of Math. 120(1984), 141-187

[V3] D. Vogan, Irreducibility of discrete series representations for semisimple symmetric spaces, to appear in Advanced Studies in Pure Math.

[I] 岩堀長慶, 対称群と一般線型群の表現論（岩波講座基礎数学）, 岩波書店 1978