数理解析研究所講究録
642巻 1988年 14-39

Unitary highest weight modules

R. Parthasarathy
(Tata Institute of Fundamental Resarch)
(太田琢也(東北大·理)記)

氏は、東北大理学部において、数研での表記の講演を拡張した連続講議をして下さったので、その記録をここに記す。特に前半は、Zuckerman functor についての比較的詳しい紹介があり、後半は氏自身の結果のその後の進展も含めた、解説があった。記録者の浅学のため、氏の真意を伝えられぬ部分や、誤りがあるかもしれないが、御容赦頂きたい。

§1. Zuckerman functors

(1.1) $\mathfrak{g}$ を複素Lie環, $\mathfrak{t}$ をその subalgebra, $\mathfrak{k}$ を $\mathfrak{g}$ の subalgebra で, $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$ なるものとする。category $\mathcal{C}(\mathfrak{g},\mathfrak{t})$ を

$$\mathcal{C}(\mathfrak{a},\mathfrak{f}) := \left\{ V \;\middle|\; \begin{array}{l} V \text{ は } \mathfrak{a}\text{-module で, } \mathfrak{f}\text{-module として locally} \\ \text{finite かつ semisimple} \end{array} \right\}$$

により定め, $\mathcal{C}(\mathfrak{a},\mathfrak{f})$ の full subcategory $\mathcal{A}(\mathfrak{a},\mathfrak{f})$ を

$$\mathcal{A}(\mathfrak{a},\mathfrak{f}) := \left\{ V \in \mathcal{C}(\mathfrak{a},\mathfrak{f}) \;\middle|\; V \text{ の } \mathfrak{f}\text{-isotropic subspace は有限次元} \right\}$$

により定める。 $V \in \mathcal{C}(\mathfrak{a},\mathfrak{f})$ について

$$V[\mathfrak{k}] := \{\mathfrak{k}\text{-finite vectors in } V\}$$

とし, functor

$$\Gamma : \mathcal{C}(\mathfrak{a},\mathfrak{f}) \to \mathcal{C}(\mathfrak{k},\mathfrak{k})$$

を $\Gamma(V) = V[\mathfrak{k}]$ により定める。以下 $\mathfrak{f}$ は reductive かつ $\mathfrak{a},\mathfrak{k}$ で reductive, $\mathfrak{k}$ は reductive かつ $\mathfrak{a}$ で reductive と仮定する。このとき $\Gamma(V)$ は $\mathfrak{a}$-module となり Γ は $\mathcal{C}(\mathfrak{a},\mathfrak{f})$ から $\mathcal{C}(\mathfrak{a},\mathfrak{k})$ への functor を与える。

<u>Lemma 1</u> abelian category $\mathcal{C}(\mathfrak{a},\mathfrak{f})$ は enough injectives をもつ。

証明) $W \in \mathcal{C}(\mathfrak{f},\mathfrak{f})$ について $\mathrm{Hom}_{U(\mathfrak{f})}(U(\mathfrak{a}), W)$ ($U(\mathfrak{a})$ は $\mathfrak{a}$ の universal enveloping algebra) は

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{a} \times \mathrm{Hom}_{U(\mathfrak{f})}(U(\mathfrak{a}), W) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{U(\mathfrak{f})}(U(\mathfrak{a}), W) \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ (X, f) & \longmapsto & (Xf : v \mapsto f(Xv)) \end{array}$$

により $U(\mathfrak{a})$-module になる。

$I(W) := \mathrm{Hom}_{U(\mathfrak{f})}(U(\mathfrak{a}), W)[\mathfrak{f}] \in \mathcal{C}(\mathfrak{a},\mathfrak{f})$ とし、
$\iota : I(W) \to W$ を $(f \mapsto f(1))$ により定めると $V \in \mathcal{C}(\mathfrak{a},\mathfrak{f})$ について. $\mathrm{Hom}_{U(\mathfrak{a})}(V, I(W)) \to \mathrm{Hom}_{U(\mathfrak{f})}(V, W)$ $(\varphi \mapsto \iota\circ\varphi)$ は全単射となる。$\mathfrak{f}$ は reductive より $\mathrm{Hom}_{U(\mathfrak{f})}(\cdot, W)$ は exact, よって $\mathrm{Hom}_{U(\mathfrak{a})}(\cdot, I(W))$ も exact で $I(W)$ は $\mathcal{C}(\mathfrak{a},\mathfrak{f})$ の injective object である。ここで $W = V$ とすれば, 上の $\mathrm{Hom}_{U(\mathfrak{a})}(V, I(V)) \simeq \mathrm{Hom}_{U(\mathfrak{f})}(V, V)$ で id_V に対応するものを $V \to I(V)$ とすれば, これは injective で $\mathcal{C}(\mathfrak{a},\mathfrak{f})$ は enough injectives をもつ。

q.e.d.

$\Gamma : \mathcal{C}(\mathfrak{a},\mathfrak{f}) \to \mathcal{C}(\mathfrak{a},\mathfrak{k})$ は left exact である。この right derived functor $R^i\Gamma$ を Zuckerman functor という。

(1.2) $V \in \mathcal{C}(\mathfrak{a},\mathfrak{f})$ について

$\tilde{V} := (\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C}))[\mathfrak{f}] \in \mathcal{C}(\mathfrak{a},\mathfrak{f})$

$V^{\approx} := (\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C}))[\mathfrak{k}] \in \mathcal{C}(\mathfrak{a},\mathfrak{k})$ とする。このとき次の duality theorem が成り立つ。

<u>Theorem</u> $m = \dim(\mathfrak{k}/\mathfrak{f})$ とするとき、$V \in \mathcal{C}(\mathfrak{a},\mathfrak{f})$ について. $\mathfrak{a}$-module としての次の同型がある。

$$(R^i\Gamma(V^\sim))^\sim \simeq R^{m-i}\Gamma(V) \qquad \blacksquare$$

この定理は Zuckerman により予想され, Enright, Wallach [EW] により証明されたが, 後にこの証明には誤り(minor errors and one serious gap [KV]) が有ることが指摘された。しかし現在では Knapp, Vogan [KV] により正しい証明が与えられている。

証明のスケッチ) $\mathfrak{k}=\mathfrak{n}$ のとき証明すればよいことが判る。

$0\to\mathbb{C}\to \mathrm{Hom}_{U(\mathfrak{f})}(U(\mathfrak{k}),\wedge^0(\mathfrak{k}/\mathfrak{f})^*)\to\cdots\to \mathrm{Hom}_{U(\mathfrak{f})}(U(\mathfrak{k}),\wedge^m(\mathfrak{k}/\mathfrak{f})^*)\to 0$ を trivial $\mathfrak{k}$-module の Koszul resolution とする。$\otimes V$ を apply して, Γ をとると V の injective resolution

$0\to I(V)=I(\wedge^0(\mathfrak{k}/\mathfrak{f})^*\otimes V)\to I(\wedge^1(\mathfrak{k}/\mathfrak{f})^*\otimes V)\to\cdots\to I(\wedge^m(\mathfrak{k}/\mathfrak{f})^*\otimes V)\to 0$

を得る。$I:=\mathrm{Hom}_{U(\mathfrak{f})}(U(\mathfrak{k}),\wedge^i(\mathfrak{k}/\mathfrak{f})^*\otimes V)\to J:=\mathrm{Hom}_{U(\mathfrak{f})}(\wedge^i(\mathfrak{k}/\mathfrak{f}),U(\mathfrak{k})^*\otimes V)$ $(f\mapsto\omega_f)$ を

$$\omega_f(x_1\wedge\cdots\wedge x_i)(x)=f(x)(x_1\wedge\cdots\wedge x_i)\quad (x_j\in\mathfrak{k}/\mathfrak{f},\ x\in U(\mathfrak{k}))$$

により定めると, これは $\mathfrak{k}$-module としての同型になる。ここで I (resp. J) への $\mathfrak{k}$ の作用は $U(\mathfrak{k})$ への right multiplication (resp. $U(\mathfrak{k})^*$ への right regular representation) からくるものである。$R(\mathfrak{k})$ を $U(\mathfrak{k})^*$ の right $U(\mathfrak{k})$-submodule であって, この right action に関して, locally finite であるものの中で

最大の subspace とする。$R(\mathfrak{k})$ は left $U(\mathfrak{k})$-action に関して stable で，$\mathfrak{k}\times\mathfrak{k}$-module として次の様に分解される。

$$R(\mathfrak{k}) = \bigoplus_{\gamma\in\hat{\mathfrak{k}}} V_\gamma \otimes V_\gamma^* \quad \left(\hat{\mathfrak{k}}:\text{有限次元既約}\ \mathfrak{k}\text{-module の同値類}\right)$$

$f \mapsto \omega_f$ は $\mathfrak{k}$-module の同型

$$I(\wedge^i(\mathfrak{k}/\mathfrak{f})^*\otimes V) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{U(\mathfrak{f})}(\wedge^i(\mathfrak{k}/\mathfrak{f}), R(\mathfrak{k})\otimes V)$$
$$\simeq \bigoplus_{\gamma\in\hat{\mathfrak{k}}} \mathrm{Hom}_{U(\mathfrak{f})}(\wedge^i(\mathfrak{k}/\mathfrak{f}), V_\gamma\otimes V)\otimes V_\gamma^*$$

を induce する。ここで右辺への $\mathfrak{k}$-action は V_γ^* へのそれである。これより

$$R^i\Gamma(V) \simeq \bigoplus_{\gamma\in\hat{\mathfrak{k}}} H^i(\mathfrak{k},\mathfrak{f};V_\gamma\otimes V)\otimes V_\gamma^*$$

$$R^{m-i}\Gamma(V^\sim) \simeq \bigoplus_{\gamma\in\hat{\mathfrak{k}}} H^{m-i}(\mathfrak{k},\mathfrak{f};V_\gamma\otimes V^\sim)\otimes V_\gamma^*$$

通常の relative Lie algebra cohomology の Poincaré duality より $H^i(\mathfrak{k},\mathfrak{f};V_\gamma\otimes V)\simeq H^{m-i}(\mathfrak{k},\mathfrak{f};V_\gamma^*\otimes V^\sim)^\sim$ である。これより $R^i\Gamma(V)\simeq (R^{m-i}\Gamma(V^\sim))^\approx$ を得る。 ▨

<u>Remark</u> 証明中の resolution より $R^i\Gamma(V)=0\ (i>m)$ である。

(1.3) 以下 $\mathfrak{k}$ は $\mathbb{C}$ 上の reductive Lie algebra, $\mathfrak{q}_k = \mathfrak{l} + \mathfrak{n}$ は $\mathfrak{k}$ の parabolic subalgebra ($\mathfrak{l}$; Levi part, $\mathfrak{n}$; nilpotent radical) とする。$\mathcal{O}$ を $\mathfrak{k}, \mathfrak{q}_k$ に関する B.G.G category とする。即ち $\mathcal{O}$ は次の (i) (ii) (iii) を満す $U(\mathfrak{k})$-module V から成る category である;

(i) V は $U(\mathfrak{k})$-module として有限生成。

(ii) V は $U(\mathfrak{q}_k)$-module として locally finite.

(iii) V は $U(\mathfrak{l})$-module として semisimple .

$\mathfrak{l}$-module として semisimple な有限次元 $\mathfrak{q}_k$-module W について

$$H(W) := \mathrm{Hom}_{U(\mathfrak{q}_k)}(U(\mathfrak{k}), W)[\mathfrak{l}]$$

とすると、$H(W)$ は $\mathcal{O}$ の object となる。$H(W)$ について、次が成り立つ。

<u>Theorem</u> $i > s := \frac{1}{2}\dim(\mathfrak{k}/\mathfrak{l}) = \dim(\mathfrak{k}/\mathfrak{q}_k) = \dim \mathfrak{n}$ とするとき functor $\Gamma : \mathcal{C}(\mathfrak{k}, \mathfrak{l}) \to \mathcal{C}(\mathfrak{k}, \mathfrak{k})$ $(V \mapsto V[\mathfrak{k}])$ について、$R^i\Gamma(H(W)) = 0$ である。 ▨

これは次の proposition から、ただちに出る。

<u>Proposition. 1</u>

$$R^i\Gamma(H(W)) \simeq \bigoplus_{\delta\in\hat{\mathfrak{k}}} V_\delta^* \otimes_{\mathbb{C}} H^i(\mathfrak{n}, V_\delta \otimes_{\mathbb{C}} W)^{\mathfrak{f}}$$

ここに superscript $\mathfrak{f}$ は $\mathfrak{f}$-invariants を表す。

証明のスケッチ) $0 \le i \le s$ について

$$I^i(W) := \mathrm{Hom}_{U(\mathfrak{f})}(U(\mathfrak{k}), \wedge^i \mathfrak{n}^* \otimes W)[\mathfrak{f}]$$

とし, $\mathfrak{g}_{\mathfrak{k}}$-module homomorphism $d: I^i(W) \to I^{i+1}(W)$
$(0 \le i \le s-1)$ を

$$\begin{aligned}
&(d f(y))(x_1\wedge\cdots\wedge x_{i+1}) \\
:= &\sum_j (-1)^j f(x_j y)(x_1\wedge\cdots\wedge\hat{x}_j\wedge\cdots\wedge x_{i+1}) \\
&+ \sum_j (-1)^{j+1} x_j(f(y)(x_1\wedge\cdots\wedge\hat{x}_j\wedge\cdots\wedge x_{i+1})) \\
&+ \sum_{r<t} (-1)^{r+t} f(y)([x_r, x_t]\wedge x_1\wedge\cdots\wedge\hat{x}_r\wedge\cdots\wedge\hat{x}_t\wedge\cdots\wedge x_{i+1}) \\
&\qquad (f \in I^i(W),\ y \in U(\mathfrak{k}),\ x_j \in \mathfrak{n})
\end{aligned}$$

により定める。各 $I^i(W)$ は injective より. $H(W)$ の injective resolution $0 \to H(W) \to I^0(W) \xrightarrow{d} I^1(W) \to \cdots \to I^s(W) \to 0$ を得る。duality theorem の証明と同様に

$$\begin{aligned}
\Gamma I^i(W) &\simeq \mathrm{Hom}_{U(\mathfrak{f})}(\wedge^i \mathfrak{n}, R(\mathfrak{k})\otimes W) \\
&\simeq \sum_{\delta\in\hat{\mathfrak{k}}} V_\delta \otimes \mathrm{Hom}_{U(\mathfrak{f})}(\wedge^i\mathfrak{n}, V_\delta^*\otimes W)
\end{aligned}$$

この同型で d が $\mathrm{Hom}_{U(\mathfrak{f})}(\wedge\mathfrak{n}, V_\delta^*\otimes W)$ 上に induce する map は $\mathfrak{n}$-cohomology を計算するときの微分に一致する

ことが判る。これより

$$R^i\Gamma(H(W)) \simeq \sum_{\gamma\in\hat{\mathfrak{k}}} V_\gamma \otimes H^i(\mathfrak{n}, V_{\gamma^*}\otimes W)^{\mathfrak{f}}$$

.　▨

上の定理と duality theorem より $H(W)^\sim \simeq H(W)$ なら $R^i\Gamma(H(W))=0$ $(i \neq \dim \mathfrak{n})$ となる。

さて，$\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{f}$ の Cartan subalgebra とし，$\Delta(\mathfrak{f},\mathfrak{h})$ を $\mathfrak{h}$ に関する root system，$P_{\mathfrak{f}}$ をその positive system，$P_{\mathfrak{n}}=\Delta(\mathfrak{n},\mathfrak{h})=\{\mathfrak{n}$ に現れる roots$\}$ として $P=P_{\mathfrak{f}}\cup P_{\mathfrak{n}}$ とすると P は $\mathfrak{k}$ の positive system になる。$(\mathfrak{k},\mathfrak{h})$ の Weyl 群の元 σ で $\sigma(P)=P_{\mathfrak{f}}\cup(-P_{\mathfrak{n}})$ となるものが唯一つ存在する。

P-integral (resp. $P_{\mathfrak{f}}$-integral) な weight $\lambda\in\mathfrak{h}^*$ について V_λ (resp. W_λ) を extremal weight λ をもつ有限次元既約 $\mathfrak{k}$ (resp. $\mathfrak{f}$)-module とする。

$$\rho = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in P}\alpha, \qquad s=\dim\mathfrak{n}=\frac{1}{2}\dim(\mathfrak{k}/\mathfrak{f})$$

とするとき，次が成り立つ。

<u>Proposition 2</u>　P-dominant integral weight $\lambda\in\mathfrak{h}^*$ について

$$R^i\Gamma(H(W_{-\sigma(\lambda+\rho)+\rho})) = \begin{cases} 0 & (i\neq s) \\ V_{-\lambda} & (i=s) \end{cases}$$

▨

この結果は大体、compact Lie群の既約表現はすべて、ある parabolic subalgebra から Zuckerman functor を用いて、構成できるということを言っている。群が non-compact の場合については、§3 で少し触れる。

§2. Unitary highest weight modules.

(2.1) G を連結線型半単純実Lie群とし、$G_{\mathbb{C}}$ をその複素化とする。$G_{\mathbb{C}}$ は単連結と仮定する。K を G の極大compact部分群，$\mathfrak{g}_0 = \mathrm{Lie}\, G$，$\mathfrak{k} = \mathrm{Lie}\, K$．とし．$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{p}_0$ を Cartan 分解とする。$\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, \mathfrak{p}$ をそれぞれ $\mathfrak{g}_0, \mathfrak{k}_0, \mathfrak{p}_0$ の複素化とし、$\theta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ を対応する Cartan involution とする。この節では次のことを仮定する。

<u>仮定</u> G/K は hermitian symmetric domain である。

$\mathfrak{p}$ は $T_{eK}(G/K)$ (complex tangent space) と同一視される。$\mathfrak{p}_+$ (resp. $\mathfrak{p}_-$) を $\mathfrak{p}$ の holomorphic (resp. anti holomorphic) tangent vectors から成る subspace とする。$\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{k}$ の Cartan subalgebra，$\mathfrak{b}_{\mathfrak{k}}$ を $\mathfrak{k}$ の Borel subalgebra であるとする。$\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ の Cartan subalgebra であり，$\mathfrak{b} := \mathfrak{b}_{\mathfrak{k}} + \mathfrak{p}_+$ は $\mathfrak{g}$ の Borel subalgebra となる。$\Delta = \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ を $\mathfrak{g}$ の

$\mathfrak{h}$ に関する root system, $\Delta_{\mathfrak{k}}$ (resp. Δ_n) を Δ の compact (resp. non-compact) root の全体とする。

$$\mathfrak{g}^{\alpha} := \{X \in \mathfrak{g} \mid [H, X] = \alpha(H)X, \ {}^{\forall}H \in \mathfrak{h}\}$$

とすると、

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{h} + \sum_{\alpha \in \Delta_{\mathfrak{k}}} \mathfrak{g}^{\alpha}, \quad \mathfrak{p} = \sum_{\alpha \in \Delta_n} \mathfrak{g}^{\alpha}$$

である。P を Borel subalgebra $\mathfrak{b}$ に関する Δ の positive system とし、$P_{\mathfrak{k}} := P \cap \Delta_{\mathfrak{k}}$, $P_n := P \cap \Delta_n$

$$\rho := \frac{1}{2}\sum_{\alpha \in P} \alpha, \quad \rho_{\mathfrak{k}} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha \in P_{\mathfrak{k}}}, \quad \rho_n := \frac{1}{2}\sum_{\alpha \in P_n} \alpha$$

とする。

$(\pi, \tilde{H})$ を既約かつ smooth な G の表現とし、H を $\tilde{H}$ の K-finite な vector から成り subspace とする。H は $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$-module である。

<u>定義</u> π が $\mathfrak{g}$ (又は G) の (positive system $P_{\mathfrak{k}} \cup (-P_n)$ に関する) highest weight module である。

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\mu \in \mathfrak{h}^*$ と $v \in H \setminus (0)$ で次の(1)(2)を満すものが存在する。(1) $\pi(T)v = \mu(T)v \quad {}^{\forall}T \in \mathfrak{h}$

(2) $\mathfrak{g}^{\alpha}. v = 0 \quad {}^{\forall}\alpha \in P_{\mathfrak{k}} \cup (-P_n)$ ▨

<u>定義</u> π が unitarizable

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ H 上の $\mathfrak{g}$-不変な positive definite inner product が存在。

π が G の highest weight module なら、π は highest weight μ で決定され、逆に μ は π により決定される。この様な μ は

$$\frac{2(\mu,\alpha)}{(\alpha,\alpha)} \in \mathbb{Z} \ (\forall\alpha \in P) \qquad \frac{2(\mu,\alpha)}{(\alpha,\alpha)} \in \mathbb{Z}^+ \ (\forall\alpha \in P_k)$$

を満す。逆にこれを満す $\mu \in \mathfrak{h}^*$ について、highest weight μ をもつ highest weight module H_μ が次の様に構成される。V_μ を highest weight μ をもつ有限次元既約 K-module とする。$\mathfrak{p}_-$ を trivial に作用させることにより V_μ は $\mathfrak{k}+\mathfrak{p}_-$-module と見なせる。$H_\mu$ は $U(\mathfrak{g})\otimes_{U(\mathfrak{k}+\mathfrak{p}_-)} V_\mu$ の irreducible quotient として得られる。この H_μ について既約な G の表現 $\widetilde{H}_\mu$ で $\mathfrak{g}$-module として $(\widetilde{H}_\mu)_K \simeq H_\mu$ となるものが存在する。ここに $(\widetilde{H}_\mu)_K$ は $\widetilde{H}_\mu$ の K-finite vector の成す subspace である。

我々の問題は G の unitarizable な highest weight module の集合を記述することである。

(2.2) $(\pi, \widetilde{H}) = (\pi_\mu, \widetilde{H}_\mu)$ を G の unitarizable な既約 highest weight module とし、$H = H_\mu = (\widetilde{H}_\mu)_K$ とする。L を $\mathfrak{so}(\mathfrak{p})$ の spin module ($\mathfrak{p}$ 上の symmetric bilinear form は $\mathfrak{g}$ の Killing form の $\mathfrak{p}$ への制限) とする。

$$\mathfrak{k} \xrightarrow{ad} \mathfrak{so}(\mathfrak{p}) \to \mathrm{End}\, L$$

の合成により L は $\mathfrak{k}$-module となる。この $\mathfrak{k}$ の表現を σ と

書く。$x\in\mathfrak{s}$ について $C(x);L\to L$ $(s\mapsto xs)$ を $\mathfrak{s}$ の Clifford algebra における積とする。$\mathfrak{k}$-module $H\otimes L$ 上の formal Dirac operater

$$D: H\otimes L \to H\otimes L$$

を $D=\sum_j \pi(X_j)\otimes C(X_j)$ により定める。ここに $\{X_j\}$ は $\mathfrak{s}_0$ の orthonormal basis である。$(\ ,\ )_L$ を L 上の positive definite inner product で

$$(C(x)s, s')_L + (s, C(x)s')_L = 0 \quad ({}^\forall x\in\mathfrak{s}_0,\ {}^\forall s, s'\in L)$$

を満すものとする。この様な $(\ ,\ )_L$ は正の実数倍を除いて一意的である。$(\ ,\ )_H$ を H 上の $\mathfrak{g}$-不変な positive definite inner product とする。$H\otimes L$ 上の positive definite inner product $(\ ,\ )_{H\otimes L}$ を

$$(u\otimes s, v\otimes s')_{H\otimes L} = (u,v)_H \otimes (s, s')_L \quad (u, v\in H,\ s, s'\in L)$$

により定める。このとき

$$(Dw, w')_{H\otimes L} = (w, Dw')_{H\otimes L} \quad (w, w'\in H\otimes L)$$

が成立する。$\omega_{\mathfrak{g}}$ (resp. $\omega_{\mathfrak{k}}$) を $U(\mathfrak{g})$ (resp. $U(\mathfrak{k})$) の casimir element とする。このとき次が成り立つ。

<u>Lemma 2.</u> $D^2 = (\pi\otimes\sigma)(\omega_{\mathfrak{k}}) - \pi(\omega_{\mathfrak{g}})\otimes 1 - (\rho, \rho) + (\rho_{\mathfrak{k}}, \rho_{\mathfrak{k}})$ ∎

Proposition 3. ξ を $H\otimes L$ の 既約 $\mathfrak{k}$-submodule V_ξ の highest weight とする。このとき

$$(\xi+\rho_{\mathfrak{k}}, \xi+\rho_{\mathfrak{k}}) \geqq (\mu-\rho_n+\rho_{\mathfrak{k}}, \mu-\rho_n+\rho_{\mathfrak{k}}).$$

証明) $v \in V_\xi$ について

$$0 \leqq (D.v, D.v)_{H\otimes L} = (D^2 v, v)_{H\otimes L}$$

これと、$\omega_{\mathfrak{g}}$ は H_μ に スカラー $(\mu-\rho_n+\rho_{\mathfrak{k}}, \mu-\rho_n+\rho_{\mathfrak{k}})-(\rho,\rho)$ として作用し、$\omega_{\mathfrak{k}}$ は V_ξ に スカラー $(\xi+\rho_{\mathfrak{k}}, \xi+\rho_{\mathfrak{k}})-(\rho_{\mathfrak{k}}, \rho_{\mathfrak{k}})$ として作用することから、proposition が示される。 ▨

Corollary V_μ を highest weight μ をもつ有限次元既約 $\mathfrak{k}$-module とし、ξ を $V_\mu\otimes L$ の既約 $\mathfrak{k}$-submodule の highest weight とする。このとき

$$(\xi+\rho_{\mathfrak{k}}, \xi+\rho_{\mathfrak{k}}) \geqq (\mu-\rho_n+\rho_{\mathfrak{k}}, \mu-\rho_n+\rho_{\mathfrak{k}})$$ ▨

(2.3) $(\pi_\mu, \tilde{H}_\mu)$ を G の highest weight module とし、$H=H_\mu$ とする。以下次のことを仮定する。

仮定 π_μ の infinitesimal character は non-singular
(即ち. $(\mu-\rho_n+\rho_{\mathfrak{k}}, \alpha) \neq 0 \quad {}^\forall\alpha\in\Delta$) ▨

$$P' := \{\alpha \in \Delta \mid (\mu - \rho_n + \rho_k, \alpha) > 0\}$$

とすると、P' は Δ の positive system で、$P_k \subset P'$ となる。$\rho' := \frac{1}{2}\sum_{\alpha \in P'} \alpha$ とし、$\mu - \rho_n + \rho_k = \lambda + \rho'$ により $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ を定めると、λ は P'-dominant かつ integral である。

$$P_n' := \Delta_n \cap P', \quad \rho_n' := \frac{1}{2}\sum_{\alpha \in P_n'} \alpha$$

とすると、$\rho' = \rho_k + \rho_n'$ で、$\mu = \lambda + \rho_n + \rho_n'$ となる。

$\mathfrak{q}$ を $\mathfrak{h}$ を含む $\mathfrak{g}$ の parabolic subalgebra、$\mathfrak{q} = \mathfrak{m} + \bar{\mathfrak{u}}$ を Levi 分解とし、$\mathfrak{h} \subset \mathfrak{m}$ と仮定する。

$$P_{\mathfrak{m}} := \Delta(\mathfrak{m}, \mathfrak{h}) \cap P, \quad P_{\bar{\mathfrak{u}}} = \{\alpha \in P \mid \mathfrak{g}^\alpha \subset \bar{\mathfrak{u}}\}$$

$$P_{\mathfrak{q}}^- := (-P_{\mathfrak{m}}) \cup P_{\bar{\mathfrak{u}}}$$

とすると、$P_{\mathfrak{q}}^-$ は Δ の positive system となる。

$$(P_{\mathfrak{q}}^-)_n := P_{\mathfrak{q}}^- \cap \Delta_n, \quad \Delta(\bar{\mathfrak{u}}, \mathfrak{h})_n := \Delta(\bar{\mathfrak{u}}, \mathfrak{h}) \cap \Delta_n$$

とする。この節の目標の1つは、H_μ が unitarizable であるための μ の必要条件を与える次の定理である。

<u>Theorem A</u> $(\pi_\mu, \tilde{H}_\mu)$ を $P_k \cup (-P_n)$ に関する highest weight μ をもつ G の既約な highest weight module とし、π_μ の infinitesimal character は non-singular とする。このとき π_μ が unitarizable ならば、$\mathfrak{g}$ の parabolic subalgebra $\mathfrak{q}$ で $\mathfrak{h}$ を含みかつ次の性質をもつものが

存在する。

$\mathfrak{g} = \mathfrak{m} + \mathfrak{n}$ を $\mathfrak{m} \supset \mathfrak{t}$ なる Levi 分解とし、

$$\rho_{\mathfrak{g},\mathfrak{m}} := \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{n}, \mathfrak{t})_{\mathfrak{n}}} \alpha$$

とする。$\lambda \in \mathfrak{t}^*$ を $\mu = \lambda + 2\rho_{\mathfrak{g},\mathfrak{m}}$ により定めるとき

(i) λ は P-dominant かつ integral.

(ii) 任意の $\alpha \in \Delta(\mathfrak{m}, \mathfrak{t})$ について $(\lambda, \alpha) = 0$.

が成り立つ。 ▨

以下で、この定理の証明のスケッチを与える。

<u>Lemma 3</u> λ を (2.3) の始めに定めた weight とするとき

$$(\lambda, \alpha) = 0 \quad {}^\forall \alpha \in P \cap (-P')$$

証明) [P1] より L は highest weight ρ_n' の既約 $\mathfrak{k}$-submodule を含む。$L^* \simeq L$ より L は lowest weight $-\rho_n'$ をもつ既約 $\mathfrak{k}$-submodule $V_{-\rho_n'}$ を含む。よって、

$$V_\mu \otimes V_{-\rho_n'} \subset V_\mu \otimes L$$

ここに V_μ は highest weight μ をもつ有限次元既約 $\mathfrak{k}$-module である。λ, ρ_n は $P_{\mathfrak{k}}$-dominant より highest weight $\mu - \rho_n' = \lambda + \rho_n$ をもつ有限次元既約 $\mathfrak{k}$-module $V_{\mu-\rho_n'}$

が存在する。これより

$$V_{\mu-\rho_n'} \hookrightarrow V_\mu \otimes V_{-\rho_n'} \hookrightarrow V_\mu \otimes L$$

が判る。$\xi = \mu - \rho_n' = \lambda + \rho_n$ として、(2.2) の Corollary を用いれば、$(\lambda+\rho, \lambda+\rho) \geqq (\lambda+\rho', \lambda+\rho')$ を得る。

$(\rho, \rho) = (\rho', \rho')$ より

$$(\lambda, \rho) \geqq (\lambda, \rho'), \qquad (\lambda, \rho' - \rho) \leqq 0$$

ここで $\rho' - \rho = \sum_{\alpha \in P' \cap (-P)} \alpha$ より

$$\sum_{\alpha \in P' \cap (-P)} (\lambda, \alpha) \leqq 0$$

一方 λ は P'-dominant より $(\lambda, \alpha) = 0 \; ({}^\forall \alpha \in P' \cap (-P))$ を得る。 ▨

次の Lemma は証明抜きで与える。

<u>Lemma 4</u> $\mathfrak{g}_0$ を real semisimple Lie algebra, $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{p}_0$ を Cartan 分解とし、$\mathfrak{k}_0$ の Cartan subalgebra $\mathfrak{h}_0$ は $\mathfrak{g}_0$ のそれにもなっているとする。$\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, \mathfrak{h}$ をこれらの複素化とする。このとき $\mathfrak{g}_0$ が $\mathfrak{k}_0$ に含まれる semisimple ideal をもたないならば、$i\mathfrak{h}_0$ 上の $\mathbb{R}$-linear form φ について、$\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ の positive system P が存在して、φ は

$P_n = P \cap \Delta_n$ の non-negative linear combination で書ける。 ▨

さて Theorem A を証明するには次のことを示せばよい。

(*) $\mathfrak{g}$ の parabolic subalgebra $\mathfrak{q} = \mathfrak{m} + \bar{\mathfrak{u}}$ で次の性質をもつものが存在する。

(1) $\mathfrak{q} \supset \mathfrak{t}$, $\mathfrak{m} \supset \mathfrak{t}$, $P_n' = (P_{\mathfrak{q}}^-)_n$

(2) $\mathfrak{m}$ の semisimple ideal で、$\mathfrak{k}$ に含まれるものは存在しない。 ▨

これが示されれば、Theorem A は次の様に証明される。

Theorem B の証明) $\mathfrak{q}$ を (*) のものとする。

$$P_n' = (P_{\mathfrak{q}}^-)_n = (-P_{\mathfrak{m},n}) \cup (P_{\bar{\mathfrak{u}},n})$$

より $P_n' \cap P_n = P_{\bar{\mathfrak{u}},n}$ で、

$$\rho_n + \rho_n' = \sum_{\alpha \in P_{\bar{\mathfrak{u}},n}} \alpha = 2\rho_{\mathfrak{q},n}$$

を得る。$\mu = \lambda + \rho_n + \rho_n'$ より $\mu = \lambda + 2\rho_{\mathfrak{q},n}$ である。
容易に $P_{\mathfrak{m},n} = P_n \cap (-P_n')$ が判る。Lemma 3 より

$$(\lambda, \alpha) = 0 \quad \forall \alpha \in P_n \cap (-P_n') = P_{\mathfrak{m},n}$$

である。また(*)の(2)とLemma 4より $\mathfrak{m}$ の compact root は $P_{\mathfrak{m},n}$ の元の linear combination で書ける。これより

$$(\lambda, P_{\mathfrak{m}}) = 0$$

を得る。

$P = P_{\mathfrak{k}} \cup (P_n \cap P_n') \cup (P_n \cap -P_n')$, $P_{\mathfrak{k}} \subset P'$

$(\lambda, P_n \cap (-P_n')) = 0$ と、λ が P'-dominant であることより λ は P-dominant である。以上で(*)の性質をもつ $\mathfrak{q}$ が Theorem B の性質をもつことが示された。∎

(*)で述べられている $\mathfrak{q}$ の存在の証明は略すが、次の様に構成する。$P_n \cap (-P_n')$ の subset Y について、$\mathfrak{q}_Y$ を $\mathfrak{b} + \sum_{\alpha \in Y} \mathfrak{g}^{-\alpha}$ により生成される parabolic subalgebra とする。

$$\mathfrak{q}_Y = \mathfrak{m}_{\mathfrak{q}_Y} + \mathfrak{u}_{\mathfrak{q}_Y}$$

を $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{m}_{\mathfrak{q}_Y}$ なるLevi分解とする。この様な $\mathfrak{q}_Y$ はすべて(*)の(2)の性質をもつことが判る。このとき一般には $P_{\mathfrak{m}_{\mathfrak{q}_Y},n} \subset P_n \cap (-P_n')$ とはならないのであるが、parabolic subalgebra の集合

$$\{\mathfrak{q}_Y \mid Y \subset P_n \cap (-P_n') \text{ s.t. } P_{\mathfrak{m}_{\mathfrak{q}_Y},n} \subset P_n \cap (-P_n')\}$$

の中で、$P_{\mathfrak{m}_{\mathfrak{q}_Y},n}$ の元の数が最大になるものを $\mathfrak{q}$ とす

れば、この$\mathfrak{q}$がⅱ)の性質をもつparabolic subalgebraとなる。

(2.4) この節の次の目標はTheorem Aの逆である。次の定理を証明することである。

<u>Theorem B</u> $\mathfrak{q}=\mathfrak{m}+\bar{\mathfrak{u}}$ を $\mathfrak{q}\supset\mathfrak{f}$ かつ $\mathfrak{m}\supset\mathfrak{f}$ なる$\mathfrak{g}$のparabolic subalgebraとし、$\lambda\in\mathfrak{f}^*$ を P-dominantなintegral weightで、$(\lambda,\alpha)=0$ $(\forall\alpha\in\Delta(\mathfrak{m},\mathfrak{f}))$なるものとする。このとき

$$\mu=\lambda+2\rho_{\mathfrak{q},n}$$

とすれば、highest weight module (π_μ,H_μ)は、unitarizableである。 ▨

この定理は次の2つのpropositionからただちに示される。

<u>Proposition 4</u> (π_μ,H_μ) をTheorem Bのものとし、Lを$\mathfrak{k}$のspin module、ξを$H_\mu\otimes L$の既約な$\mathfrak{k}$-sub-moduleのhighest weightとする。このとき、

$$(\xi+\rho_{\mathfrak{k}},\xi+\rho_{\mathfrak{k}})\geqq(\mu-\rho_n+\rho_{\mathfrak{k}},\mu-\rho_n+\rho_{\mathfrak{k}})$$

である。さらにV_φをH_μのhighest weight $\varphi\neq\mu$

をもつ既約な $\mathfrak{k}$-submodule とし、ξ を $V_\varphi \otimes L$ の既約な $\mathfrak{k}$-submodule の highest weight とする。このとき

$$(\xi+\rho_{\mathfrak{k}}, \xi+\rho_{\mathfrak{k}}) > (\mu-\rho_n+\rho_{\mathfrak{k}}, \mu-\rho_n+\rho_{\mathfrak{k}})$$

である。 ▨

長くなるので、この証明は略す。

<u>Proposition 5</u>　φ を H_μ の既約な $\mathfrak{k}$-submodule V_φ の highest weight とする。$V_\varphi \otimes L$ の highest weight ξ をもつ既約な $\mathfrak{k}$-submodule V_ξ について、次の (a), (b) が成立すると仮定する。

(a)　$(\xi+\rho_{\mathfrak{k}}, \xi+\rho_{\mathfrak{k}}) \geqq (\mu-\rho_n+\rho_{\mathfrak{k}}, \mu-\rho_n+\rho_{\mathfrak{k}})$

(b)　$\varphi \neq \mu$ なら　$(\xi+\rho_{\mathfrak{k}}, \xi+\rho_{\mathfrak{k}}) > (\mu-\rho_n+\rho_{\mathfrak{k}}, \mu-\rho_n+\rho_{\mathfrak{k}})$

このとき (π_μ, H_μ) は unitaryzable である。

証明)　V_μ を H_μ の highest weight μ をもつ有限次元既約 $\mathfrak{k}$-submodule とする。$H=H_\mu$ の $\mathfrak{k}$-submodules から成る filtration $\{H_i\}$ を次の様に定める。

$$H_0 = V_\mu, \quad H_{i+1} = H_i + \mathfrak{g}_+ H_i \quad (i \geqq 0)$$

H_μ は $U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{k}+\mathfrak{g}_-)} V_\mu$ の simple quotient より

$H=\bigcup_{i=0}^{\infty}H_i$ である。H 上には $\mathfrak{g}$-invariant な hermitian form がある。これを $V_\mu=H_0$ 上では positive definite である様に normalize したものを $(\ ,\ )_H$ とする。$D: H\otimes L\to H\otimes L$ を formal Dirac operator とすると、明らかに $D(H_i\otimes L)\subset H_{i+1}\otimes L$ である。
$L_{-\rho_n}$ を highest weight $-\rho_n$ をもつ L の1次元の $\mathfrak{k}$-submodule とすると容易に

$$D(H_{i+1}\otimes L_{-\rho_n})\subset H_i\otimes L$$

が判る。$(\ ,\ )_L$ を (2.2) の L 上の positive definite inner product とし、

$$(\quad,\quad)_{H\otimes L}=(\ ,\ )_H\cdot(\ ,\ )_L$$

により $H\otimes L$ 上の hermitian form を定める。φ を H_{i+1} の既約 $\mathfrak{k}$-submodule V_φ の highest weight と v_φ をその highest weight vector とする。$\xi=\varphi-\rho_n$ は $H_{i+1}\otimes L$ の $\mathfrak{k}$-component の highest weight である。
$w_{-\rho_n}\in L_{-\rho_n}\setminus(0)$ とすると、Lemma 2 より

$$(D.(v_\varphi\otimes w_{-\rho_n}),\ D.(v_\varphi\otimes w_{-\rho_n}))_{H\otimes L}$$
$$=\{(\xi+\rho_k,\xi+\rho_k)-(\mu-\rho_n+\rho_k,\ \mu-\rho_n+\rho_k)\}(v_\varphi,v_\varphi)_H\,(w_{-\rho_n},w_{-\rho_n})_L$$

である。ここで $D(v_\varphi\otimes w_{-\rho_n})\in H_i\otimes L$ であるが、帰納法により 左辺 >0 とにてよい。一方 $(\ ,\ )_H$ は $H_0=V_\mu$

上 positive definite より $\varphi \neq \mu$ としてよい。よって仮定より

$$\xi \quad \xi > 0, \qquad (w_{-\rho_n}, w_{-\rho_n}) > 0$$

故に $(v_\varphi, v_\varphi)_H > 0$ である。$(\ ,\ )_H$ は invariant より $(\ ,\ )_H$ は V_φ 上 positive definite，故に H 上 positive definite である。 ▨

§3. その後の進展.

G を connected reductive Lie group，K を maximal compact subgroup，θ を対応する Cartan involution とする。

$\mathfrak{g}_0 = \mathrm{Lie}\, G$，$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \otimes \mathbb{C}$，$\mathfrak{k}_0 = \mathrm{Lie}\, K$，$\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_0 \otimes \mathbb{C}$

とする。$\mathfrak{q}$ を θ-stable な $\mathfrak{g}$ の parabolic subalgebra で，$\mathfrak{l} = \mathfrak{q} \cap \overline{\mathfrak{q}}$ （$\overline{}$ は $\mathfrak{g}$ の complex conjugate）が $\mathfrak{q}$ の Levi part であるものとし $\mathfrak{q} = \mathfrak{l} + \bar{\mathfrak{u}}$ を Levi 分解とする。このとき $x \in i\mathfrak{k}_0$ で，

$\mathfrak{q}$ = sum of non-negative eigenspaces of $\mathrm{ad}\, x$

$\bar{\mathfrak{u}}$ = sum of positive eigenspaces of $\mathrm{ad}\, x$

$\mathfrak{l} = Z_{\mathfrak{g}}(x)$

を満すものが存在する。$\mathfrak{t}_0$ を $\mathfrak{k}_0$ の Cartan subalgebra で

$\mathfrak{x}$ を含むものとすると $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}_0 \otimes \mathbb{C} \subset \mathfrak{l} \cap \mathfrak{k}$ となる。
$\mathfrak{t}$ は一般に $\mathfrak{g}$ の Cartan subalgebra にはならないが、
$\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{t})$ は root system になる。この inner product
を $\langle\ ,\ \rangle$ と書く。

定義　$\mathfrak{l}$ の 1 次元表現 $\lambda : \mathfrak{l} \to \mathbb{C}$ が admissible
$\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ (a) λ は $L = N_G(\mathfrak{q})$ ($\mathrm{Lie}(L) = \mathfrak{l}_0$) の
unitary character の微分になっている。

(b) $\langle \alpha, \lambda|_{\mathfrak{t}} \rangle \geqq 0 \quad {}^\forall \alpha \in \Delta(\bar{\mathfrak{u}}, \mathfrak{t})$ ▨

この表現を $\mathbb{C}_\lambda$ と書く。

$$\Gamma : \mathcal{C}(\mathfrak{g}, \mathfrak{l} \cap \mathfrak{k}) \to \mathcal{C}(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$$

を §1 の functor とし、

$$A_{\mathfrak{q}}(\lambda) := R^s\Gamma(\mathrm{Hom}_{U(\mathfrak{q})}(U(\mathfrak{g}), \mathbb{C}_\lambda \otimes \wedge^{\mathrm{top}} \bar{\mathfrak{u}})[\mathfrak{k} \cap \mathfrak{l}])$$

とする。ここに $s = \frac{1}{2}\dim(\mathfrak{k}/\mathfrak{l} \cap \mathfrak{k}) = \dim(\mathfrak{k} \cap \bar{\mathfrak{u}})$ である。
　G/K が Hermitian symmetric domain のときは、
§2、Theorem B の性質をもつ highest weight module
は、ある $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ に同型であることが知られている。従っ
て Theorem B は $\{A_{\mathfrak{q}}(\lambda) \mid \mathfrak{q}, \lambda\}$ のある subset について
それらが unitarizable であることを示しているが、後に

Vogan が一般の $\mathfrak{g}_0$ について $\{A_{\mathfrak{q}}(\lambda)\}$ を含む Zuckerman functor を用いて得られるより広い $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$-modules について、それらが unitarizable であることを示した。即ち次が成り立つ。

<u>Theorem [V]</u> $\mathfrak{t}$ を $\mathfrak{l}$ の Cartan subalgebra とし、

$$\rho(\bar{\mathfrak{u}}) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Delta(\bar{\mathfrak{u}}, \mathfrak{t})} \alpha \quad \in \mathfrak{t}^*$$

とする。$\lambda \in \mathfrak{t}^*$ とし、Y を infinitesimal character $\lambda - \rho(\bar{\mathfrak{u}})$ をもつ既約 $(\mathfrak{l}, \mathfrak{l} \cap \mathfrak{k})$-module とする。このとき、

a) Y が unitarizable かつ任意の $\alpha \in \Delta(\bar{\mathfrak{u}}, \mathfrak{t})$ について $\mathrm{Re}(\alpha, \lambda) \geq 0$ なら

$$R^{s} \Gamma(\mathrm{Hom}_{U(\mathfrak{q})}(U(\mathfrak{g}), Y \otimes \wedge^{top} \bar{\mathfrak{u}})[\mathfrak{l} \cap \mathfrak{k}])$$

は unitarizable である。

b) 任意の $\alpha \in \Delta(\bar{\mathfrak{u}}, \mathfrak{t})$ について $\mathrm{Re}(\alpha, \lambda) > 0$ かつ $R^{s} \Gamma(\mathrm{Hom}_{U(\mathfrak{q})}(U(\mathfrak{g}), Y \otimes \wedge^{top} \bar{\mathfrak{u}})[\mathfrak{l} \cap \mathfrak{k}])$ が unitarizable なら Y は unitarizable である。 ▨

この定理は Vogan [V] により証明され、直後に

Wallach [W] による簡易化が成されている。尚，順序は逆になるが，$R\Gamma$ については次のことが知られている。

<u>Proposition</u>　Y を長さが有限な組成列をもつ $(\mathfrak{l}, \mathfrak{l}\cap\mathfrak{k})$-module とし

$$\mathcal{R}^i(Y) = R^i\Gamma\left(\mathrm{Hom}_{U(\bar{\mathfrak{q}})}(U(\mathfrak{g}), Y\otimes\wedge^{\text{top}}\bar{\mathfrak{u}})[\mathfrak{l}\cap\mathfrak{k}]\right)$$

とする。このとき

(a) $\mathcal{R}^i(Y)$ も長さが有限な組成列をもつ $(\mathfrak{g},\mathfrak{k})$-module である。

(b) Y が infinitesimal character $\lambda-\rho(\bar{\mathfrak{u}})$ をもつなら $\mathcal{R}^i(Y)$ は infinitesimal character λ をもつ

(c) (b) のとき　$\mathrm{Re}(\lambda,\alpha)\geqq 0$ $(\forall\alpha\in\Delta(\bar{\mathfrak{u}},\mathfrak{f}))$ なら

$$\mathcal{R}^i(Y)=0 \quad (i\neq s)$$

(d) (b) のとき，$\mathrm{Re}(\lambda,\alpha)>0$ $(\forall\alpha\in\Delta(\bar{\mathfrak{u}},\mathfrak{f}))$ なら

$$\mathcal{R}^s(Y)\neq 0$$

(e) (c) のとき，Y が既約なら $\mathcal{R}^s(Y)$ は既約であるか 0 である。 ■

最後に §2. Theorem A は S. Kumaresan [K] による，ある方向での一般化が成されていることを付記しておく。

文献

[EW] T.J.Enright and N.R.Wallach.: Notes on homological algebra and representation of Lie algebras; Duke Math. J. 47,(1980) 1-15.

[K] S.Kumaresan.: On the canonical k-type in the irreducible unitary g-modules with non-zero relative cohomology: Invent.Math. 59,(1980) 1-11.

[KV] A.W.Knapp and D.Vogan.: Duality theorems in relative Lie algebra cohomology;preprint.

[P1] R.Parthasarathy.: Dirac operator and discrete series; Ann.Math. 96.1(1972) 1-30.

[P2] R.Parthasarathy.: Criteria for the uitarizability of some highest weight modules: Proc.Indian Acad.Sci,89,1(1980) 1-24.

[V] D.Vogan.: Unitarizability of certain series of representations; Ann.Math. 120(1984) 141-187.

[W] N.R.Wallach.: Onthe unitarizability of derived functor modules; Invent.Math. 79(1984) 131-141.