

Title	Block one-step methods と scaled one-step methods について (常微分方程式の数値解法)
Author(s)	新谷, 尚義
Citation	数理解析研究所講究録 (1988), 643: 186-194
Issue Date	1988-02
URL	http://hdl.handle.net/2433/100223
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

Block one-step methods と scaled one-step methods について

広島大学校教育 新谷 尚義 (Hisayoshi Shintani)

1. まえかき

初期値問題

$$(1.1) \quad y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

を考える。ただし、 f は十分滑らかな関数であるとする。

$y(x)$ で (1.1) の解を表し、

$$(1.2) \quad x_t = x_0 + th \quad (h > 0, t \geq 0)$$

とし、 y_t で $y(x_t)$ の近似値を表す。

$0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ とし、 y_{t_i} ($i = 1, 2, \dots, n$) を求める

explicit block one-step method

$$(1.3) \quad y_t = y_0 + h \sum_{i=1}^{m_t} p_i t_i k_i \quad (t = t_1, t_2, \dots, t_n)$$

を考える。 $t = t_i$ とし、

$$(1.4) \quad k_1 = f(x_0, y_0),$$

$$(1.5) \quad k_i = f(x_0 + a_i h, y_0 + h \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} k_j),$$

$$(1.6) \quad a_i = \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} \quad (i = 2, 3, \dots)$$

であり、 t_i は整数とは限らない。

$m = \max_{1 \leq i \leq n} m_{ti}$ とする。この方法は, *multistep method* の出発値を求めるためや, 1 step 当りの f の計算量をへらすためなどに用いられる ([1], [2], [5], [7] - [12], [15])。

また, order p の *one-step method*

$$(1.7) \quad y_1 = y_0 + h \sum_{i=1}^p \rho_i k_i$$

を基にして, f を r 回追加計算することによって *off-step point* での補間ができるようにする *scaled one-step method*

$$(1.8) \quad y_t = y_0 + h \sum_{i=1}^{p+r} \rho_{it} k_i \quad (t \neq 0, 1)$$

も考えられている ([6], [13], [14])。 *graphical output* が要求される場合や, $g(x, y(x), y'(x)) = 0$ となる x を見つける問題の場合などには, 任意個の任意の点での補間が必要になる。

これら2つの方法は, 互いに関連があるので, ここでまとめて論じたい。

2. Block one-step methods

2.1 $n = 2$ の場合

$$t_1 = 1, \quad t_2 = 2, \quad m_1 = m_2 = m, \quad y_i \quad (i = 1, 2)$$

は order p_i の方法であり,

$$(2.1) \quad e = h \sum_{i=1}^m \rho_i k_i = O(h^r)$$

$$(2.2) \quad e^* = h \sum_{i=1}^{m+1} \rho_i k_i = O(h^q)$$

$k_{m+1} = f(x_2, y_2)$ とする。筆者 (1966, 1977, 1987) は

表1のような結果をえた。

表1

m	4	5	6	7	8
P_1	3	4	4	5	5
P_2	4	4	5	5	6
r	3	4	4	5	5
s	4		5		

Cash (1987) は, Fehlberg の 5(4) 公式を y_1 に選い
 $(m_1=6)$, $k=f(x_1, y_1)$ とし, $m_2=9$ で y_2 が order 6 で, order
 4 の公式を embed するものを求めた。彼は y_i と y'_i ($i=0, 1, 2$)
 を使って, 5次エルミート補間多項式で $[x_0, x_2]$ の任意の点
 での補間をすることを提案している。この補間の仕方は,
 f を余分に計算しないのが特長である。

2.2. t_i が整数の場合

Rosser (1967) は, $m=n(n+3)/2$ のとき y_i ($i=1, 2, \dots, n$)
 を order n にでき, $n=2p$ のとき $m=n(n+3)/2+1$ で,
 y_i ($i=1, 2, \dots, n-1$) が order n , y_n が order $n+1$ に
 できることを示した。

$$(2.3) \quad y_i = y(x_i) + h^{p+1} p_i + O(h^{p+2}) \quad (i=1, 2, \dots, p)$$

とすると, Cash (1983) は, $p_j = j p_1$ ($j = 2, 3, \dots, p$)

となるものを求め, つぎの結果を示した.

order 2 のものが $m_1 = 2, m_2 = 3$ でえられ,

order 3 のものが $m_1 = 3, m_2 = 5, m_3 = 6$ でえられ,

order 4 のものが $m_1 = 5, m_2 = 9, m_3 = 11, m_4 = 12$ で

えられる. y_i ($i = 0, 1, \dots, p$) を使って, 任意の点で補間
ができる.

筆者は, 条件 $p_j = p_1$ ($j = 2, 3, \dots, p$) の下で, つぎの結果を
えている.

order 2 のものが $m = 3$, order 3 のものが $m = 6$, order 4
のものが $m = 9$ でえられる.

2.3 t が任意の場合

Gear (1980) は, $h^i y^{(i)}(x_0)$ を

$$(2.4) \quad y_0^{(i)} = h \sum_{j=1}^m c_{ij} k_j = h^i y^{(i)}(x_0) / i! + O(h^{p+1})$$

$(i = 1, 2, \dots, p)$

の形で近似し,

$$(2.5) \quad y_t = y_0 + \sum_{i=1}^p t^i y_0^{(i)}$$

で任意の $t > 0$ に対して $y(x_t)$ の近似値を求めることを考えたい.

彼らは,

$m = 4$ のとき order 3 のものが存在し,

$m = 6$ のとき order 4 のものが存在し,

order 5 のものが存在するためには, $m \geq 9$ でなければならぬことを示した。

筆者 (1987) は, α を任意の正数とすると表 2 のような結果をえた。

表 2

order \ m	3	4	6	9
y_t の order ($t \neq a$)	2	3	4	5
y_a の order	3	4	5	6

Sarafyan (1984) は

1 stage 目 に order 1, 2 stage 目 に order 2,
4 stage 目 に order 3, 6 stage 目 に order 4
となる embedded formula を導いている。

2.4 特異初期値問題

特異初期値問題

$$(2.6) \quad ty' = f(t, y) \quad (t \geq 0), \quad y(0) = y_0$$

を考える。ただし, y は n ベクトルで M は $n \times n$ 行列

$$(2.7) \quad f(t, y) = My + tg(t, y), \quad My_0 = 0$$

$$(2.8) \quad \lambda_i(M) = 0 \quad \text{or} \quad \text{Re}(\lambda_i(M)) < 0$$

である。このとき de Hoog & Weiss (1976, 1985) は,

$g \in C^p$ ならば $y(t) \in C^{p+1}$ を示し, one-step method をこの問題に適用すると, 通常 order 2 以下の精度で数値解がえられることを示した。

筆者 (1986) は,

$$(2.9) \quad y(t+h) = y_0 + \sum_{j=1}^p t^j u_j + O(h^{p+1})$$

と書くと, $u_1 = h(I-M)^{-1}g(0, y_0)$ であり,

$p(p-1)/2$ 回の g の計算で u_j ($j=2, 3, \dots, p$) がえられることを示した。

3. Scaled one-step methods

Norn (1983) は, Fehlberg の (4)5 公式を基にして, つぎの結果をえた。

f の追加計算 1 回で, 任意の点で order 4 の補間か,
 f の追加計算 5 回で, 任意の点で order 5 の補間か,
 できる。また, 補間点が 1 つだけのときは, 追加計算 2 回で order 5 の補間かできる。

$$(3.1) \quad y_1 = y_0 + h \sum_{i=1}^g p_i k_i, \quad y_t = y_0 + h \sum_{i=1}^{g+r} p_{it} k_i,$$

$$(3.2) \quad e = h \sum_{i=1}^{g+1} q_i k_i$$

であるとき, 筆者 (1988) は y_1, y_t が order p となる r と $e = O(h^p)$ となる ρ を求めた (表 3)。また $(p, g) = (2, 2), (3, 3), (4, 4)$ に対する r の最小値はそれぞれ 0, 1, 2 である

ことを示した。

表 3

p	2	3	4	5
q	2	3	4	6
r	0	1	2	3
s	0	0	1	1

補間点が1つだけの場合には、

$(p, q) = (4, 4)$ のとき $r=1$ で order 4 のものがえられ、

$(p, q) = (5, 6)$ のとき $r=1$ で order 5 のものがえられる

ことを示した。このとき a_{r+1}, b_{r+1j} ($j=1, 2, \dots, r$) は t に依存する。したがって $(p, q) = (4, 4), (5, 6)$ の場合、補間点の個数がそれぞれ 2, 3 以上ならば、任意個の点で補間ができる公式を使うべきである。

参考文献

- [1] J.R. Cash, Block Runge-Kutta methods for the numerical integration of initial value problems in ordinary differential equations Part I. The nonstiff case, Math. Comp., 40 (1983), 175-191.

- {2} J.R. Cash, A block 5(4) explicit Runge-Kutta formula with "free" interpolation.
- {3} F.R. de Hoog and R. Weise, Difference methods for boundary value problems with a singularity of the first kind, SIAM J. Numer. Anal., 13(1976), 775-813.
- {4} F.R. de Hoog and R. Weiss, The application of Runge-Kutta schemes to singular initial value problems, Math. Comp., 44(1985), 93-103.
- {5} C.W. Gear, Runge-Kutta starters for multistep methods, ACM Trans. Math. Software 6(1980), 263-279.
- {6} M.K. Horn, Fourth-and fifth-order, scaled Runge-Kutta algorithms for treating dense output, SIAM J. Numer. Anal., 20(1983), 558-568.
- {7} J.B. Rosser, A Runge-Kutta for all seasons, SIAM Rev., 9(1967), 417-452.
- {8} D. Sarafyan, Continuous approximate solution of ordinary differential equations and their systems, Compt. Math. Appl., 10(1984), 139-159.
- {9} H. Shintani, Two-step processes by one-step methods of order 3 and of order 4, J. Sci. Hiroshima Univ., Ser.A-I 30(1966), 183-195.

- [10] H. Shintani, On one-step methods for ordinary differential equations, Hiroshima Math. J., 7(1977), 769-786.
- [11] H. Shintani, Block one-step methods for starting step-by-step methods for singular initial value problems, Bull. Fac. School Educ. Hiroshima Univ., Part II 9(1986), 75-81.
- [12] H. Shintani, Block one-step methods for starting multistep methods, Hiroshima Math. J., 17(1987), 1-11.
- [13] H. Shintani, On scaled one-step methods, Hiroshima Math. J., 18(1988), 113-126.
- [14] H. Shintani, Scaled one-step with one interpolation point, Submitted to Hiroshima Math. J.
- [15] H. Shitani, Eight-stage block one-step methods with two step-points, Bull. Fac. School Educ. Hiroshima Univ., Part II, 10(1987) (to appear)