数理解析研究所講究録
644巻 1988年 157-163

Superstableな環と結合律

筑波大学数学系：坪井明人

環が結合環を含む条件

次の二つの定理を示すことを目標とする（これらは神戸大学の田中克己氏との手紙のやりとりの中で生まれた）：

定理１：Ｒをsuperstableな結合環とする．このとき，Ｒは自明な環か斜体（したがって代数的閉体）のいずれかを無限部分環として持つ．

定理２：Ｒをsuperstableな環で無限部分結合環を持つとする．このとき，Ｒのdefinableな無限部分環R^*で

R^*は自明な環　　または

R^*は代数的閉体

となるものが存在．

定義および記号等は通常のものを用いる．また読者はstability theoryのごく基本的な定義と定理は知っているものと仮定する．さらにω－stableな群に関する初等的定理とHrushovskiの学位論文のinfinitely definableな群からdefinableな群をつくる定理の証明は理解しているものとする．以下ではこれらを断わりなく使う．

補題１：Ｒをstable structure上でinfinitely definableな結合環としＲ－０の各元は正則元とする．このとき，Ｒを含むdefinableな斜体が存在する．

証明：$R=\bigcap\{D(i):i<\kappa\}$をinfinitely definableな結合環とする．この時必要なら定数をふやして$D(i)$はϕ－definableと仮定する．Udiの定理を仮定すれば，各$D(i)$は加法群と仮定できる．また$D(i)$達は有限個のintersectionに対して閉じていると仮定できる．さらにcompactnessから$D=D(0)$は＋と・についての基本的性質を満たしていると仮定する．すなわち，

（１）D上で積は結合律をみたす；

（２）D上で演算は分配律をみたす；

（３）D上で積$x\cdot y$は各変数にたいして１－１関数である．

とする．（Dは積について閉じているとは限らない．）従って，もう一度Dとの共通部分をとることにより各$D(i)$が上の三つの条件を満たしていると仮定できる．いま$D(i)$の部分集合$D(i)^*$を

$$D(i)^*=\{x\in D(i):\forall a\in R\,[xa\in D(i)]\}$$

で定義する．stable chain conditionを使えば$D(i)^*$がdefinableであることが分かる．（$D(i)$が加法部分群であることを使った．）$D(i)^*$は加法群である．

（主張１）：$R=\bigcap\{D(i)^*:i<\kappa\}$

R自体は環（＋と・で閉じている）だから，Rが各$D(i)^*$の条件を満たすのは自明．逆も明らか．

（主張２）：$x\in D(\alpha)^*,\ y\in R \ \rightarrow\ xy\in D(\alpha)^*$

$x\in D^*$，$y\in R$とする．$a\in R$を任意の元として，

$$(xy)a\in D(\alpha),$$

をいえばよい．$ya\in R$であるから，

$$x(ya)\in D(\alpha)\quad(x\in D(\alpha)^*\text{による})$$

したがって，積に関する結合律をつかえば，

$$(xy)a\in D(\alpha).$$

$a\in R$は任意であったから，

$$xy\in D(\alpha)^*.$$

ここで，Eを$D^* = D(\alpha)^*$の部分集合として

$$E = \{x \in D^* : D^* x \subset D^*\}$$

によって定義する．次の主張３により，証明が完結する．

（主張３）：ＥはＲを含むｄｅｆｉｎａｂｌｅな斜体である．

Ｒを含むことは，主張１と主張２からよい．Ｅが加法群になっていることはD^*が加法群であることからわかる．最後にＥが積について閉じていることは：

$$x, y \in E \rightarrow xy \in Ey \subset D^* y \subset D^*;$$

および，

$$x, y \in E \rightarrow D^* xy \subset (D^* x) y \subset D^* y \subset D^*$$

からわかる．したがって，$R-0$は正則元のみからなる結合環，よってＲは斜体となる．

補題２：Ｆをｃｏｎｎｅｃｔｅな環Ｒの$RF=(0)$なる有限イデアルとする．このときR/Fが体（斜体）になるならば，実は$F=(0)$である．

証明：$F=\{f_0, \ldots, f_n\}$ $(n>0)$，$f_0=0$とする．またa/FをR/Fの乗法に関する単位元とする．いまＲの部分集合R_iを

$$R_i = \{x \in R : x - ax = f_i\}$$

とすると，R_0は加法群となり；a/Fが単位元であることから

$$R = \bigcup \{R_i : i = 0, \ldots, n\} \quad \text{(disjoint union)}$$

となる．また，対応

$$x \in R_i \mapsto x - f_i + f_j \in R_j$$

$$\begin{aligned} & x - f_i + f_j - a(x - f_i + f_j) \\ &= x - ax - f_i + f_j \\ &= f_j \end{aligned}$$

は１－１であるから，R_i達はＲの有限coset分解（$R/R_0 < \omega$）を与える．これから$R/R_0^* < \omega$なる環R_0がえられるので，Ｒが極小環（ｃｏｎｎｅｃｔｅｄ）であることに反する．

定理１の証明：Ｒのｉｎｆｉｎｉｔｅｌｙ　ｄｅｆｉｎａｂｌｅな無限部分環のうちＤ－ｒａｎｋ最小かつｃｏｎｎｅｃｔｅｄなものをΦとする．Φａは部分環となり次の主張が成り立つ

主張１：各$a \in \Phi$に対して，$\Phi a = \Phi$またはΦa：有限．

$\Phi a \neq \Phi$かつΦaが無限とする．ΦのＤ－ｒａｎｋが最小であることから，$D(\Phi a) = D(\Phi)$．従ってΦａのなかにｇｅｎｅｒｉｃ　ｔｙｐｅｐが存在する．$\Phi a \neq \Phi$より，ΦａのΦのなかでのｃｏｓｅｔ　$\Phi a + b \neq \Phi a$があり，$p + b$もｇｅｎｅｒｉｃ　ｔｙｐｅとなる．これは，Φがｃｏｎｎｅｃｔｅｄであることに反する．

主張２：Φａ：有限のとき，実は$\Phi a = (0)$．

もし$\Phi a \neq (0)$とすれば，$\Delta = \{x \in \Phi : xa = 0\} \subset \Phi$は$\Phi / \Delta$が有限$> 1$となり，Φがｃｏｎｎｅｃｔｅｄであることに反する．

主張３：$F = \{x \in \Phi : \Phi x = (0)\}$はｉｎｆｉｎｉｔｅｌｙ　ｄｅｆｉｎａｂｌｅ

Φがｃｏｎｎｅｃｔｅｄにより，Φは唯一つのｇｅｎｅｒｉｃ　ｔｙｐｅｐをもつ，この時条件$\Phi x = (0)$は

$$\forall a \in p\ (a \downarrow x \to ax = 0)$$

とかける．この条件はｐのｄｅｆｉｎｉｎｇ　ｓｃｈｅｍａを使えばｄｅｆｉｎａｂｌｅとなる．従って，全体としてＦはｉｎｆｉｎｉｔｅｌｙ　ｄｅｆｉｎａｂｌｅになる．

主張４：ＦはＲの部分環である．従って$F = R$　または　Ｆ：有限

証明は主張１と同様．

主張５：$F = R$のとき，$\Phi \cdot \Phi = (0)$すなわちΦは自明な環．

以下ではＦが有限の場合のみをあつかう．

主張６：Ｆが有限イデアルのときΦ / Fは代数的閉体となるｄｅｆｉｎａｂｌｅな部分環R^*を持つ．（またR^*は任意に小さくとれる．）

Φ / Fでは任意の元が正則元（$a \cdot x : \Phi / F \to \Phi / F$は全単射）である．

また，Φ/FはR^{eq}のなかでinfinitely definableであることに注意する．T（T^{eq}）がstableなことから，補題1によりΦ/Fのdefinableな拡大環R^*で斜体となっているものをみつける．（superstableから，R^*は代数的閉体．）

主張6から，Φは$\Phi=\bigcap K_i$（各K_i/Fは体になっている）と仮定できる．従って，Φ/F自体が体になる．補題2を使えば，F＝（0）となることがわかる．すなわち，ふたたび主張6により，definableな部分環で実は代数的閉体となっているものの存在がいえた．

定理２の証明：Rが（super）stableであるから無限部分結合環の拡大結合環Aでdefinableなものが存在するから，このAを定理1のRと思って定理を適用すれば良い．

系：Rを1を持つ標数0のsuperstableな環とする．このとき，Rは自明であるかまたは代数的閉体となる無限部分環を持つ．

例：（ω－）stableな環で無限部分結合を含まないものがある．
Fを標数2の代数的閉体とする．＋は通常の加法として積＊を

$$x * y = x \cdot y^2$$

で定める．構造F^*＝（F；＋，＊）は環となる．実際，

$$\begin{aligned}(x+y)*z &= (x+y)\cdot z^2\\ &= x\cdot z^2 + y\cdot z^2\\ &= x*z + y*z\\ x*(y+z) &= x\cdot(y+z)^2\\ &= x\cdot(y^2+z^2) \quad (\text{標数}=2)\\ &= x\cdot y^2 + x\cdot z^2\\ &= x*y + x*z\end{aligned}$$

となるからよい．いまF^*が無限部分環を持ったとすると，上の定理によりF^*

はdefinableな無限部分環を持つ．したがって，Fがstrongly minimalであることから，F^*自体が結合環となる．よって各$x \in F^*$に対して，

$$(x*x)*x = x*(x*x)$$
$$\therefore \quad x^5 = x^7$$
$$\therefore \quad x = 0 \quad \text{or} \quad x^2 = 1$$

これは，矛盾である．

単にstableの場合

定義：Rを環とする．∧－definableな部分環$\Phi \subset R$が極小環であるとは，∧－definableなΦの部分環はΦに一致するか，有限環になることである．

命題（極小環の存在）：Rをstable環とする．Rは極小環をもつ．

証明：Δ_i $(i < \omega)$をLの論理式の有限集合の全体とする．Δ_i－論理式のブール結合でdefinableな集合D_iを帰納的に作っていく：

（1）D_iは無限集合で$\bigcap\{D_j : j < i\} \bigcap D_i$は無限部分環

（2）上の条件のもとで極小

（2）が成立するようにとれるのは，stableの条件から（stable chain condition）．$\Phi = \bigcap D_i$とすれば，これが極小環となる．いま，$\Psi \subset \Phi$を∧－definableな無限環とする．Ψに含まれるformulaはすべて環を定義していると仮定できる．$\psi \in \Psi$とすれば

$$\psi \bigcap \Phi \text{は}\Phi\text{の真部分環で無限}$$

である．いま$\psi \in \Delta_i$となるiをとれば

$$\bigcap\{D_j : j < i\} \bigcap \{\psi, D_i\} \subset \bigcap\{D_j : j < i\} \bigcap D_i$$

であり左辺は（＊）により，無限部分環である．したがって，D_iの極小性から

$$D_i \subset \psi.$$

ψはΨの任意のformulaであったから，

$$\Phi \subset \Psi$$

を得る．よって$\Phi=\Psi$となる．

注意：（1）上のΦの作り方から，Φはconnectedになっている．
（2）上で単にstable chain conditionと言ったが，正確に言えば次の形を必要とする：

Gをstableな群とし，Δを論理式の有限集合とする．Δ－論理式のブール結合で表せる部分群の列に対して極小条件が成立する（無限降下列は存在しない）．

実際，D_n（$n<\omega$）を降下列とすると，

$$R^{\Delta}(D_{n+1})<R^{\Delta}(D_n) \quad \text{or} \quad \mathrm{Mult}^{\Delta}(D_{n+1})<\mathrm{Mult}^{\Delta}(D_n)$$

となるので，矛盾（順序数の無限降下列ができてしまう）．