

# Markov's principle 付きの Constructive set theory について

名大・理 久馬 稟道 (Eido Kyuma)

## §0 Introduction

Bishop が [7] で constructive mathematics 上の解析学を展開して以来、さまざまな方法で、この formalize が行なわれてきた。そして Myhill と Friedman は、それぞれ [9] と [8] で集合論の形による formalize を行った。この paper では、Friedman の  $T_3$  を、constructive set theory (CST) と呼ぶこととする。(くわしい定義は、後であたえる。) CST は、無限公理付きの Kripke-Platek axiom system (KP) と相対的無矛盾であることが [5][8] で示されている。

所で、Markov's principle (MP) というのは、次のものである。  
 $(MP) \forall x \in \omega (A(x) \vee \neg A(x)) \rightarrow \neg \neg \exists x \in \omega A(x) \rightarrow \exists x \in \omega A(x)$   
 これは構成的な公理と思われるので、 $CST + MP$  に興味をもたれる。

この paper の目的は、以下のものである。§1 において、

新しい structure を定義する。§2 において、これが CST+MP の model となっていることを示す。§3 においては、この model が、KPi に  $\omega$  の部分集合全体の集合を付け加えた system の中で構成できることを示す。

## §1. Structures

[1] において Aczel は、Martin-Löf の intuitionistic theory of types (ML) 上で、CST の interpretation を構成した。Beeson は、ML の recursive models を [2] で構成した。これらの models の term は、type 付きの  $\Lambda$ -calculus の  $\lambda$ -term に対応している。

この section において、type の 付いていない  $\lambda$ -term を用い Beeson の models とは異なる集合論的仕方により、models の定義を行う。

1-1. Definition  $\Lambda$  は  $\lambda$ -term 全体の集合、 $\mathcal{P}(\Lambda)$  は  $\Lambda$  の部分集合全体とする。また通常  $A, B \in \Lambda$  において  $A \equiv B$  と書くものも、この paper では  $A = B$  と書く。また、 $\Pi, \Sigma, N_0, N_2, N, \text{sup}$  などは  $\Lambda$ -calculus の constants とする。これらのくわしい定義は、[3] を見よ。

これから以後、 $f$  は function であり、 $\text{dom}(f) \subseteq \Lambda$  で  $\text{val}(f) \subseteq \mathcal{P}(\Lambda)$  となるとする。

1-2 Definition  $\mathcal{F}$  が  $\Pi\Sigma$ -normal であることを、以下の条件を満たすこととする。

(i-i)  $N_0, N_2$  and  $N$  は  $\text{dom}(\mathcal{F})$  の要素とする。

(i-ii)  $\mathcal{F}(N_0) = \emptyset$ ,  $\mathcal{F}(N_2) = \{\lambda x y. x, \lambda x y. y\}$

$\mathcal{F}(N) = \{\underline{n} : n \text{ は自然数}\}$  ただし  $\underline{n}$  は、

$\underline{n} = \lambda x y. x(x(\dots(x y) \dots))$  で定義する。通常これは  $\lambda$ -calculus の  $n$  個の自然数の表現である。

(ii) 今、 $(\Sigma AB)$  と  $A$  が  $\text{dom}(\mathcal{F})$  の要素であり、 $B \in \Lambda$

で、すべての  $a \in \mathcal{F}(A)$  において  $B(a) \in \text{dom}(\mathcal{F})$  とすると、

$\mathcal{F}(\Sigma AB) = \{\lambda x. x a b : a \in \mathcal{F}(A), b \in \mathcal{F}(B(a))\}$  となる。

(iii) 今、 $(\Pi AB)$  と  $A$  が  $\text{dom}(\mathcal{F})$  の要素であり、 $B \in \Lambda$

で、すべての  $a \in \mathcal{F}(A)$  において  $B(a) \in \text{dom}(\mathcal{F})$  とすると、

$\mathcal{F}(\Pi AB) = \{f \in \Lambda : \forall a \in \mathcal{F}(A) [f(a) \in \mathcal{F}(B(a))]\}$  となる。

1-3 Definition 今、 $\mathcal{F}$  は  $\Pi\Sigma$ -normal であるとする。この時、

$\mathcal{F}$  が  $\Pi\Sigma$ -closed であるとは、 $A \in \text{dom}(\mathcal{F})$  で、 $B \in \Lambda$  に

ついてすべての  $a \in \mathcal{F}(A)$  で  $B(a) \in \text{dom}(\mathcal{F})$  の時、 $(\Pi AB)$

と  $(\Sigma AB)$  が  $\text{dom}(\mathcal{F})$  の要素であるとする。

1-4. Definition 今、 $\mathcal{F}$  は  $\Pi\Sigma$ -normal であるとする。この時、

$\mathcal{F}$  が  $\Pi\Sigma$ -transitive ということとは、 $(\Pi AB)$  または  $(\Sigma AB)$

のどちらかが  $\text{dom}(\mathcal{F})$  の要素ならば、 $A \in \text{dom}(\mathcal{F})$  で  $B \in \Lambda$  であり、すべての  $a \in \mathcal{F}(A)$  において  $B(a) \in \text{dom}(\mathcal{F})$  となる。

1-5 Definition 今、 $\mathcal{F}$  を  $\Pi\Sigma$ -normal とする時、 $\prec_{\mathcal{F}}$  は以下の定義による  $\text{dom}(\mathcal{F})$  上の binary relation とする。

(i) もし  $(\Pi AB)$  と  $A$  が  $\text{dom}(\mathcal{F})$  の元ならば、 $A \prec_{\mathcal{F}} (\Pi AB)$

(ii) もし  $(\Sigma AB)$  と  $A$  が  $\text{dom}(\mathcal{F})$  の元ならば、 $A \prec_{\mathcal{F}} (\Sigma AB)$

(iii)  $A \in \text{dom}(\mathcal{F})$  で  $a \in \mathcal{F}(A)$  ならば、 $B(a)$  と  $(\Pi AB)$  は、 $\text{dom}(\mathcal{F})$  の元ならば、 $B(a) \prec_{\mathcal{F}} (\Pi AB)$  となる。

(iv)  $A \in \text{dom}(\mathcal{F})$  で  $a \in \mathcal{F}(A)$  ならば、 $B(a)$  と  $(\Sigma AB)$  は、 $\text{dom}(\mathcal{F})$  の元ならば、 $B(a) \prec_{\mathcal{F}} (\Sigma AB)$  となる。

1-6 Definition 今、 $\mathcal{F}$  を  $\Pi\Sigma$ -normal とする。このとき、

$\mathcal{F}$  が  $\Pi\Sigma$ -well founded であるとは、 $\alpha \subseteq \text{dom}(\mathcal{F})$  で、 $\alpha \neq \emptyset$  の時、 $\alpha$  の元  $a$  が存在し、 $\forall x \in \alpha [x \not\prec_{\mathcal{F}} a]$  とする。

1-7 Definition これから以後、 $\mathcal{F}$  が  $\Pi\Sigma$ -normal で  $\Pi\Sigma$ -closed  $\Pi\Sigma$ -transitive,  $\Pi\Sigma$ -well founded であることを、

$\Pi\Sigma$ -n.c.t.w. と書く。 $\Pi\Sigma$ -n.t.w. も同じように定義する。

$A, f \in \Lambda$  ならば、 $\sup(A, f) = \lambda x. ((x \sup) A) f$  とする。

また  $a = \sup(A, f)$  の時、 $\bar{a} = A$ ,  $\bar{a} = f$  とする。

1-8 Definition これから以後、 $V = \langle V, \sup, \mathcal{F} \rangle$  とする。

$V$  が、sup-normal であるとは、以下の条件を満たすこととする。

(i)  $\mathcal{F}$  は  $\Pi\Sigma$ -n.c.t.w. である。

(ii)  $V \subseteq \{ \sup(A, f) : A \in \text{dom}(\mathcal{F}), f \in \Lambda \}$

1-9 Definition  $V$  は sup-normal とする。

$V$  が sup-closed であるとは、 $A \in \text{dom}(\mathcal{F}), f \in \Lambda$  で

$\forall a \in \mathcal{F}(A) [f(a) \in V]$  ならば、 $\sup(A, f) \in V$  とする。

$V$  が sup-transitive であるとは、 $\sup(A, f) \in V$  の時、

$\forall a \in \mathcal{F}(A) [f(a) \in V]$  であることとする。

$V$  が sup-well founded であるとは、すべての空集合でない

$V$  の部分集合  $\mathcal{O}$  において、 $\sup(A, f) \in \mathcal{O}$  が存在して、

$\forall a \in \mathcal{F}(A) [f(a) \notin \mathcal{O}]$  であることとする。

sup-normal である sup-closed, sup-transitive, sup-well founded

のことを、sup-n.c.t.w. と書く。 sup-n.t.w. も同じように定義する。

1-10 Remark  $\Pi\Sigma$ -n.c.t.w.  $\neq$  sup-n.c.t.w. は、Martin-Löf の theory of types の概念をもとに作ったものである。そこで ML の記号との対比表を示す。

今ここで、 $\mathcal{F}$  は  $\Pi\Sigma$ -n.c.t.w.  $\mathcal{U}$  は sup-n.c.t.w. とする。

this paper	Martin-Löf
$N_0, N_2, N$	$N_0, N_2, N$
$\underline{0}, \underline{1}, \underline{2}, \underline{3}, \dots$	$0, 0', 0'', 0''' \dots$
$\Pi A(\lambda x.B), \Sigma A(\lambda x.B)$	$(\Pi_{x \in A}) B \quad (\Sigma_{x \in A}) B$
$\Sigma N_2(\lambda x.x A B)$	$A + B$
$\text{dom}(\mathcal{F})$	$\mathcal{U}_0$
$a \in \mathcal{F}(A)$	$a \in A$
$\text{sup}(A.f)$	$\text{sup}(A.f)$
$\mathcal{V}$	$(\bigvee_{x \in \mathcal{U}_0}) x$

なお、Aczel の [1] においては、 $\text{sup}(A.f)$  のかわりに  $\{f(x) \mid x \in A\}$  と書いてある。“sup” の集合論的な意味は、このようなものである。

1-11 Theorem (sup-induction)  $\mathcal{V} \in \text{sup-n.c.t.w.}$  とし、 $\phi(x)$  を  $x$  に関する命題とする時、すべての  $\text{sup}(A.f) \in \mathcal{V}$  で  $\forall a \in \mathcal{F}(A) \phi(f(a))$  ならば  $\phi(\text{sup}(A.f))$  となる時、すべての  $v \in \mathcal{V}$  で  $\phi(v)$  となる。

証明  $v$  の sup-well founded の性質を用い、通常の構造の帰納法と同じ要領で行う。

これが、 $\in$ -帰納法に相当するものである。

## §2. realizability models

この section では、§1 で導いた structure を用いて、CST+MP の realizability models を作る。ここで言う CST とは、Friedman の [8] の  $T_3$  と同等なものであり、Aczel の [1] の CZF とほとんど同じである。

CST は intuitionistic first order language であり、logical symbol として、 $\perp, \vee, \wedge, \rightarrow, \forall x, \exists x$  と、restricted quantifier  $\forall x \in a, \exists x \in a$  から作られ、binary relation として、 $=$  と  $\in$  をもつものとする。axioms は以下に示すとおりである。

### Structural axioms

$$\begin{aligned} \text{Restricted quantifier} \quad \forall x \in a \phi(x) &\leftrightarrow \forall x (x \in a \rightarrow \phi(x)) \\ \exists x \in a \phi(x) &\leftrightarrow \exists x (x \in a \wedge \phi(x)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Equality} \quad a = b &\leftrightarrow \forall z (z \in a \leftrightarrow z \in b) \\ a = b \wedge b \in c &\rightarrow a \in c \end{aligned}$$

### Set Induction scheme

$$\forall x (\forall y \in x \phi(y) \rightarrow \phi(x)) \rightarrow \forall x \phi(x)$$

Set existence axioms

Pairing  $\exists x (a \in x \wedge b \in x)$

Union  $\exists x (\forall y \in a) (\forall z \in y) (z \in x)$

Restricted Separation  $\Delta_0$ -formula  $\phi(x)$  に  $x \neq L$ ,

$$\exists x (\forall y \in x (y \in a \wedge \phi(y)) \wedge \forall y \in a (\phi(y) \rightarrow y \in x))$$

Strong Collection

$$\forall x \in a \exists y \phi(x, y) \rightarrow \exists z (\forall x \in a \exists y \in z \phi(x, y) \wedge \forall y \in z \exists x \in a \phi(x, y))$$

Exponential  $\exists x (x \text{ は 集合 } a \text{ から 集合 } b \text{ への 関数全体})$

ただし Aczel のものは、Subset Collection が。この公理のかおりに書いてあるが、Subset Collection から Exponential は導かれる。

Infinity 以下の条件を満たす  $\omega$  が存在する。ただし、Zero(x)

は、 $\forall y \in x \perp$ 、Succ(x, y) は  $\forall z \in y (z \in x) \wedge y \in x \wedge$

$\forall z \in x (z \in y \vee z = y)$  とする。

$$(i) \exists x \in \omega (\text{Zero}(x)) \wedge \forall x \in \omega \exists y \in \omega (\text{Succ}(x, y))$$

$$(ii) \forall x \in \omega (\text{Zero}(x) \vee \exists y \in \omega \text{Succ}(y, x))$$

この  $\omega$  は、通常 の 自然数 全体の 集合 の こと である。

relativized dependent choice

今、 $\forall x (\varphi(x) \rightarrow \exists y (\varphi(y) \wedge \psi(x, y)))$  とする。その時、

$x$  で  $\varphi(x)$  が成り立つ、関数  $f$  が存在し、 $\text{dom}(f) = \omega$ 、

$f(0) = x$ 、 $\forall n \in \omega (\varphi(f(n)) \wedge \psi(f(n), f(n+1)))$  となる。



以下、 $\mathcal{F}$  と  $\mathcal{V}$  は、 $\Pi\Sigma$ -n.c.t.w. sup-n.c.t.w. とする。

2-1 Definition  $a \in \Lambda$ ,  $A \in \text{CST}$  の formula とする時、

$a \vdash A$  と書き、 $a$  が  $A$  を realize するを (i)、以下の  
ように定義する。

$$(i) f \vdash (A \rightarrow B) \equiv \forall a \in \Lambda [a \vdash A \text{ ならば } f(a) \vdash B]$$

$$(ii) c \vdash (A \wedge B) \equiv (c = \lambda x. x a b) \text{ かつ } (a \vdash A) \text{ かつ } (b \vdash B)$$

$$(iii) c \vdash (A \vee B) \equiv (c = \lambda x. x (\lambda y. y) a) \text{ かつ } (a \vdash A) \\ \text{ かつ } (c = \lambda x. x (\lambda y. y) b) \text{ かつ } (b \vdash B)$$

$$(iv) f \vdash \forall x A(x) \equiv \forall a \in \mathcal{V} [f(a) \vdash A(a)]$$

$$(v) c \vdash \exists x A(x) \equiv \exists a \in \mathcal{V} [c = \lambda x. x a b \text{ かつ } (b \vdash A(a))]$$

$$(vi) f \vdash \forall x \in \alpha A(x) \equiv \forall a \in \mathcal{F}(\alpha) [f(a) \vdash A(\alpha(a))]$$

$$(vii) c \vdash \exists x \in \alpha A(x) \equiv \exists a \in \mathcal{F}(\alpha) [c = \lambda x. x a b \text{ かつ } b \vdash A(\alpha(a))]$$

$$(viii) c \vdash (\alpha = \beta) \equiv c \vdash (\forall a \in \alpha \exists b \in \beta (a = b) \\ \wedge \forall b \in \beta \exists a \in \alpha (a = b))$$

$$(ix) c \vdash (\alpha \in \beta) \equiv c \vdash \exists a \in \beta (\alpha = a)$$

2-2 Remark.  $c \vdash (\alpha = \beta)$  が well defined であることは、

Theorem 1-11 (sup-induction) を  $\alpha$  に関して用いればよい。

2-3 Definition  $p \in \text{dom}(\mathcal{F})$  と CST の formula  $A$  へ

ついて、 $\mathcal{F}(p) = \{c \in \Lambda \mid c \vdash A\}$  の時、 $\|A\|$  と書く。

2-4 Lemma (i) すべての  $\alpha, \beta \in V$  に対して,  $\text{dom}(\mathcal{F}_r)$  の元  $p$  があり  $p = \|\alpha = \beta\|$ 。

(ii) また,  $\Delta_0$ -formula  $A$  に対して  $\exists p \in \text{dom}(\mathcal{F}_r) [p = \|A\|]$

証明 (i) Theorem 1-11 を用い,  $\alpha$  に関する帰納法で解く。

(ii)  $\|A \rightarrow B\| = \prod \|A\|((\lambda x y. x) \|B\|)$ ,  $\|A \wedge B\| = \sum \|A\|((\lambda x y. x) \|B\|)$ ,

$\|A \vee B\| = \sum N_2(\lambda x. x \|A\| \|B\|)$ ,  $\|\forall x \in a A(x)\| = \prod \bar{a}(\lambda x. \|A(\bar{a}(x))\|)$ ,

$\|\exists x \in a A(x)\| = \sum \bar{a}(\lambda x. \|A(\bar{a}(x))\|)$  とすればよい。

Definition 2-1 で定義された realizability model は intuitionistic logic を満たすことは, すぐわかる。また, CST の axioms を満たすことは, Aczel の [ ] [ ] と同じようにすればできる。以下では, MP がこの models において valid であることを示す。

2-5. Lemma  $a \Vdash \neg A$  ならば  $\exists b \in \Lambda (b \Vdash A)$

証明  $a \Vdash \neg A$  となる  $a$  があれば  $b \Vdash A$  となる  $b$  はない。

また,  $a \Vdash \neg A$  となる  $a$  がなければ  $b \Vdash A$  となる  $b$  がある。

以上のことよりあきらか。

2-6 Remark Lemma 2-5 は, かつして,  $\neg \neg A \rightarrow A$  が valid になることを意味しているのではないことに注意。

2-7 Theorem MPは、Definition 2-1 の model において、  
valid である。

証明 今、 $a \vdash \forall n \in \omega (A(n) \vee \neg A(n))$  とする。Definition 2-1  
より、 $\forall n \in \mathcal{F}(N) \vdash A(\tilde{\omega}(n)) \vee \neg A(\tilde{\omega}(n))$  となる。だから、  
 $a(n)(\lambda x y. x) = \lambda x y. x$  ならば、 $a(n)(\lambda x y. y) \vdash A(\tilde{\omega}(n))$   
 $a(n)(\lambda x y. x) = \lambda x y. y$  ならば、 $a(n)(\lambda x y. y) \vdash \neg A(\tilde{\omega}(n))$  の  
どちらかになる。---①

次に、 $b \vdash \neg \exists n \in \omega A(n)$  とすると、Lemma 2-5 より  
 $\exists c \in \Lambda \quad c \vdash \exists n \in \omega A(n)$  となるので、 $A(\tilde{\omega}(n))$  を valid に  
する  $\mathcal{F}(N)$  の元  $n$  の存在はわかる。---②

しかし、この  $n$  を  $\lambda$ -term を用いて具体的に構成  
しなければ、realizability には使えない。そこで、  
① を用いて構成する。

今、 $\Omega \in \Omega F = F(\Omega F)$ ,  $\underline{\omega} \in \underline{\omega} n = n+1$  とする  $\lambda$ -term  
とする。この時、 $\vec{a} = \Omega (\lambda x n. a(n)(\lambda x y. x) n(x(\underline{\omega} n))) \underline{0}$   
 $\vec{a}' = \Omega (\lambda x n. a(n)(\lambda x y. x) (a(n)(\lambda x y. y)) (x(\underline{\omega} n))) \underline{0}$  と  
すれば、 $\vec{a}$  が  $\mathcal{F}(N)$  の元になることは、①② を用いればわかる。  
①より、 $\vec{a} \vdash A(\tilde{\omega}(\vec{a}))$  となる。よって、  
 $\lambda x. x \vec{a} \vec{a}' \vdash \exists n \in \omega A(n)$  となる。---③

①②③より

$\lambda a b. (\lambda x. x \vec{a} \vec{a}') \vdash \forall n \in \omega (A(n) \vee \neg A(n)) \rightarrow \neg \exists n \in \omega A(n) \rightarrow \exists n \in \omega A(n)$   
証完

§3.  $KP + \mathcal{P}\omega$  上での構成

この section では、§1 で定義した  $\Pi\Sigma$ -n.c.t.w., sup-n.c.t.w. を構成してみせる。その時に、これを構成するのは、 $KP + \mathcal{P}\omega$  上で十分であることを示す。なお  $KP$  については、[4] を見よ。

3-1 Remark  $\phi \in \Sigma$ -formula とする時、次は  $KP$  の定理である。(  $\Sigma$ -collection )

$$\forall x \in a \exists y \phi(x, y) \rightarrow \exists b [\forall x \in a \exists y \in b \phi(x, y) \wedge \forall y \in b \exists x \in a \phi(x, y)]$$

3-2 Lemma  $\Lambda$ -calculus の model  $\langle \Lambda, \bar{\mathcal{P}} \rangle$  と、 $\Lambda$  の部分集合全体の集合  $\mathcal{P}\Lambda$  は、 $KP + \mathcal{P}\omega$  の中で集合として構成できる。

証明  $\omega$  を使い  $\Lambda$  の term を code すればよい。 $\mathcal{P}\Lambda$  は、 $\mathcal{P}\omega$  を用いればよい。

3-3 Definition 以下のように  $\mathcal{G}$  と  $\mathcal{U} = \langle \mathcal{U}, \text{sup}, \mathcal{G} \rangle$  を定義する。

$$(i) \mathcal{G} \equiv \bigcup_{g \text{ is } \Pi\Sigma\text{-n.t.w.}} g$$

$$(ii) \mathcal{U} \equiv \bigcup_{\langle u, \text{sup}, g \rangle \text{ is sup-n.t.w.}} u \quad \mathcal{U} = \langle \mathcal{U}, \text{sup}, \mathcal{G} \rangle \text{ とする。}$$

この時  $N_0 \in \text{dom}(\mathcal{G})$ ,  $\text{sup}(N_0, f) \in \mathcal{U}$  なので どちらも空でない。

これから以後、 $\mathcal{G}$ が $\Pi\Sigma$ -n.c.t.w.であり、 $\mathcal{U}$ がsup-n.c.t.w.となることを証明する。この時厳密に、 $KP+PW$ のsystem上で行う。 $KP+PW$ のmodelの中では、 $\mathcal{G}$ や $\mathcal{U}$ は集合になるとはかぎらず、classとして取りあつかっていく。

3-4 Lemma  $\Pi\Sigma$ -n.t.w. は  $\Delta_0$ -formula である。

$a \in \mathcal{G}$  は  $\Sigma$ -formula である。

証明  $\Pi\Sigma$ -normal  $\neq$   $\Pi\Sigma$ -transitive が  $\Delta_0$ -formula であることはあきらか。  $\Pi\Sigma$ -well founded は "すべし" の  $\alpha \subseteq \text{dom}(\mathcal{F})$  となる所を " $\forall \alpha \in \mathcal{P}\Lambda$ " とはじめて Bound してやればよい。  
 $a \in \mathcal{G}$  は、 $\exists \theta$  ( $\theta$  は  $\Pi\Sigma$ -n.t.w. かつ  $a \in \mathcal{G}$ ) となり  $\Sigma$ -formula。

3-5 Lemma  $\mathcal{G}$  は function である。

証明 今、 $\langle a, b_1 \rangle, \langle a, b_2 \rangle \in \mathcal{G}$  で  $b_1 \neq b_2$  とする。すると  $\Pi\Sigma$ -n.t.w. な  $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$  があって、 $\langle a, b_1 \rangle \in \mathcal{G}_1, \langle a, b_2 \rangle \in \mathcal{G}_2$ 。  
 この時  $\mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2$  も  $\Pi\Sigma$ -n.t.w. になる。今、  

$$\alpha = \{ \langle c, d \rangle \in \mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2 \mid \exists e [d \neq e \wedge \langle c, e \rangle \in \mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2] \}$$
 とすると、 $\alpha \subseteq \mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2$  で、 $\langle a, b_1 \rangle \in \alpha$  だが  $\alpha \neq \emptyset$  なので  $\Pi\Sigma$ -transitive より、 $\alpha$  は  $\langle a, b_1 \rangle$  最小元  $\langle c, d_1 \rangle$  をもつ。  
 所が  $\Pi\Sigma$ -normal より、 $\langle c, d_2 \rangle \in \mathcal{G}$  となり  $d_1 \neq d_2$  となるのだが、 $\langle c, d_2 \rangle$  は最小元より出ないので矛盾する。 証完。

3-6. Theorem  $\mathcal{F}$  は  $\Pi\Sigma$ -n.c.t.w. である。

証明  $\mathcal{F}$  が  $\Pi\Sigma$ -normal,  $\Pi\Sigma$ -transitive であることは、

定義よりあきらか

(i)  $\mathcal{F}$  が  $\Pi\Sigma$ -well founded であることを示す。

$\alpha \subseteq \mathcal{F}$  で  $\alpha \neq \emptyset$  なすば、 $\Pi\Sigma$ -n.t.w. な  $\theta$  があり、 $\alpha \cap \theta \neq \emptyset$ 。

すると  $\theta$  は  $\Pi\Sigma$ -well founded なので、 $\alpha \cap \theta$  は  $\langle \theta \rangle$  の最小元をもつ。  $\theta$  の  $\Pi\Sigma$ -transitive より、この最小元は、 $\alpha$  の  $\langle \theta \rangle$  最小元になり、こゝる。

(ii)  $\mathcal{F}$  が  $\Pi\Sigma$ -closed であることを示す。

今、 $A \in \text{dom}(\mathcal{F})$  で  $\forall a \in \mathcal{F}(A) [B(a) \in \text{dom}(\mathcal{F})]$

であるとすると、すべし  $a \in \mathcal{F}(A)$  に対し、

$\Pi\Sigma$ -n.t.w. な  $f_a$  が存在し、 $B(a) \in \text{dom}(f_a)$  となる。

$\Delta_0$ -collection を用いると、 $\bigcup_{a \in \mathcal{F}(A)} f_a$  は set になる。だから、

$$f = \bigcup_{a \in \mathcal{F}(A)} f_a \cup \left\{ \langle \Pi AB, \{ \theta \in \Lambda \mid \forall a \in \mathcal{F}(A) [ \theta(a) \in \mathcal{F}(B(a)) ] \} \rangle \right\} \\ \cup \left\{ \langle \Sigma AB, \{ \lambda x. xab \mid a \in \mathcal{F}(A), b \in \mathcal{F}(B(a)) \} \rangle \right\}$$

も set になり、 $f$  は  $\Pi\Sigma$ -n.t.w. となる。だから、

$\Pi AB, \Sigma AB \in \text{dom}(\mathcal{F})$  となり、 $\mathcal{F}$  は  $\Pi\Sigma$ -closed である。

言正完

3-7. Lemma  $\mathcal{V} = \langle \mathcal{V}, \text{sup}, \mathcal{F} \rangle$  の時、 $\mathcal{V}$  が sup-n.t.w. と

いふのは、 $\Sigma$ -formula である。

証明  $A \in \mathcal{L}$  が  $\Sigma$ -formula になることを用いる。

3-8 Theorem  $\mathcal{U}$  は sup-n.c.t.w. である。

証明  $\mathcal{U}$  が sup-normal, sup-transitive であるのは

あきらか。  $\mathcal{U}$  が sup-well founded であることは

Theorem 3-8 の証明(i)と同じようにすればよい。

$\mathcal{U}$  が sup-closed であることは Theorem 3-8 の証明(ii)

と同じように行い、 $\Delta_0$ -collection を用いる所を

$\Sigma$ -collection を用いるればよい。

以上で、 $\Pi\Sigma$ -n.c.t.w., sup-n.c.t.w. は  $KP + PW$  の中で構成できることを示した。

### 参考文献

[1] P. Aczel, The type theoretic interpretation of constructive set theory, in: A. Macintyre, eds., Logic Colloquium '77.

[2] M. Beeson, Recursive models for constructive set theories, Ann. Math. Logic 23 (1982) 127~178

[3] H. P. Barendregt, The Lambda Calculus: Its syntax and Semantics (North-Holland, Amsterdam, 1981)

- [4] J. Barwise, *Admissible Sets and Structures*  
(Springer, Berlin)
- [5] G. Jäger, *Proof theoretic treatment*,  
Habilitationsschrift München, 1984.
- [6] P. Martin-Löf, *Constructive mathematics and  
computer programming*, in: L.J. Cohen etc eds.,  
*Logic, Methodology, and Philosophy of Science VI*  
(North-Holland, Amsterdam, 1982) 153-175.
- [7] E. Bishop, *Foundations of Constructive Analysis*,  
(McGraw-Hill, New York, 1967)
- [8] H. Friedman, *Set theoretic foundations for constructive  
analysis*, *J.S.L.* 46 (1981) 868-870
- [9] J. Myhill, *Constructive set theory*, *J.S.L.* 40 (1975)  
347-382