

Title	FMS-Principleのある拡張(数学基礎論およびその応用)
Author(s)	倉田, 令二郎
Citation	数理解析研究所講究録 (1988), 644: 65-73
Issue Date	1988-02
URL	http://hdl.handle.net/2433/100239
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

FMS-Principle の拡張

問合文教研 倉田令一朗 (Reijiro Kurata)

I PH-Principle とその拡張 [K1], [K2] の要約と訂正

Notation

$<$: = Primitive recursive wellordering on \mathbb{N} isomorphic to ε_0

$\Sigma_n^0\text{-RFN}_{(PA)}$: = uniform reflection principle over PA for Σ_n^0 -formulas

$f: \omega \rightarrow \omega$ の関数, $k, e, r, M \in \omega$ と $\vdash \vdash \vdash$

$M \xrightarrow{f} (k)_r^e$: = $\forall P: [M]^e \rightarrow r, \exists X \subseteq M$ [(i) X is homogeneous for P , (ii) $|X| \geq k$

(iii) X is f -large i.e. $f(\min X) \leq |X|$

$\text{PH}(f)$: = $\forall k \forall e \forall r \exists M (M \xrightarrow{f} (k)_r^e)$

f_n と λ^{ω} の Δ_n -function が dominate する strictly increasing Δ_n -関数

と \exists の k に関する関数は存在する ([K2] 1.4.3)

PH_n^* : = f は Δ_n -function $\rightarrow \text{PH}(f)$

$\text{WFP}_{\Delta_n}^{\varepsilon_0}$ (well founded principle) : = f は Δ_n -関数 $\rightarrow \exists x (f(x+1) \geq f(x))$

$\text{LSP}_{\Delta_n}^{\varepsilon_0}$ (Large set principle) : = f は strictly increasing Δ_n -function

$\rightarrow \forall \alpha < \varepsilon_0 \forall m \exists k ([m, k] \text{ は } \alpha\text{-}f\text{-large i.e. } f[m, k] \text{ は } \alpha\text{-large})$ (c.f. [K.S])

定理 1 次の 2 系列の命題を考える。

- (1) $\Sigma_n^0\text{-RFN}_{(PA)}, PH_n, PH(\text{t-})$
 (2) $PH_n^*, WFP_{\Delta_n}^{\epsilon_0}, LSP_{\Delta_n}^{\epsilon_0}, TI_{\Pi_n}^{\epsilon_0}$ (Π_n -formula = 1段の超限帰納法)
 とする (1)(2) の各命題の形式的表現は PA に同じ同値である。

(1) の命題 $\phi \rightarrow \tau \in P_n$ (2) の命題 $\phi \rightarrow \tau \in P_n^*$ とする

$$PA \vdash P_{n+1} \rightarrow P_n^* \quad PA \vdash P_n^* \rightarrow P_n$$

[注] 1) 定理 1 (1) 中の PH_n は [K1] §3. Def 4 ([K2], 1.2.3) と同じ定義に τ が τ が τ であること明示する必要はない。

2) " f は Δ_n -function $\rightarrow \square$ " の形の命題の形式的表現は
 " $\psi(x, y) \leftrightarrow \theta(x, y) \wedge \forall x \exists y \psi(x, y) \wedge f = \gamma \psi(x, y) \rightarrow \square$ " と意味する。
 ψ, θ は Σ_n^0 の Π_n^0, Σ_n^0 -formula of PA である。

3) f_n の形式的表現 ϕ と τ の性質が仮定される

" f_n is strictly increasing Δ_n -function and

f is a Δ_n -function $\rightarrow f_n$ dominate f " の PA 証明可能

4) [K1], [K2] の $PA \vdash P_n \leftrightarrow P_n^*$ とあるのは同値性を証明する。

P_n^* は Π_{n+1} -sentence である。 Π_{n+2} -sentence である

$PA, TI_{\Pi_n}^{\epsilon_0} \vdash Con(PA + \Sigma_n^0\text{-RFN}_{(PA)}) \Leftrightarrow PA \vdash \Sigma_n^0\text{-RFN}_{(PA)} \rightarrow TI_{\Pi_n}^{\epsilon_0}$ とは

なる (新井敏康氏の指摘)

5) (1) の命題の同値性の証明は [K1] §3 12 [VT].

(2) については $LSP_{\Delta_n}^{\epsilon_0} \leftrightarrow WFP_{\Delta_n}^{\epsilon_0}$ の証明は [K2] 2.5.5.

$WFP_{\Delta_n}^{\epsilon_0} \leftrightarrow TI_{\Pi_n}^{\epsilon_0}$ は [K2] 2.5.6.

$PH_n^* \rightarrow LSP_{\Delta_n}^{\epsilon_0}$ は事実上 [K2] 2.6.1

$WFP_{\Delta_1^1}^{\Sigma_0} \rightarrow PH^*$ is true [K2] 2.7.4 is a 3.

II FMS-Principle

2.1. RT(2, <w) (Ramsey theorem for 2, <w)

$[X]^{<w}$ ($X \subseteq \omega$) is the set of all finite subsets of X

$C \subseteq [X]^{<w}$ is d-closed (downward closed) $\iff t \in C \implies s \subseteq t$ (s is initial segment) $\iff \exists s \in C$

$(C_i)_{i < r}$ ($C_i \subseteq [X]^{<w}$) is d-closed r-covering $\iff C_i$ is d-closed and $\bigcup_{i < r} C_i = [X]^{<w}$

C_i are pairwise disjoint $\iff (C_i)_{i < r}$ is d-closed r-partition \iff i.

$Y \subseteq X$ is homogeneous for a r-covering $(C_i)_{i < r}$ of $[X]^{<w}$

$\iff \exists i < r; [Y]^{<w} \subseteq C_i$

$RT(2, <w) \iff [w]^{<w}$ has a d-closed 2-covering $(C_0, C_1) \iff \exists X \subseteq \omega$

(infinite) s.t. X is homo for (C_0, C_1)

i.e.) $RT(2, <w)$ is Π^1_1 ([G, P])

2.2. FMS-Principle

2.2.1 m-dense set X is finite set $C \subseteq \omega$ r.f.d.

X is 0-dense $\iff |X| \geq 2 \quad |X| \geq \min X$

X is (n+1)-dense $\iff \exists$ d-closed 2-covering $(C_i)_{i < 2}$ of $[X]^{<w}$ s.t. $\exists m \in \mathbb{N}$

s.t. $1 \leq$ homogeneous \cap m-dense subset of X s.t. \exists r.f.d.

2.2.2 FMS-principle $\iff \forall n \exists X$ (X is an m-dense finite set)

$RT(2, <w)_0 \equiv ACA_0 + RT(2, <w)$ r.f.d. (c.f. [FMS])

ATR (Arithmetical transfinite recursion) is 12

任意. \rightarrow arithmetical formula $\varphi(Y, X)$ \wedge recursive well-ordering on $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$$\exists X (X = \{(x, m); \varphi(Y, X \upharpoonright m)\}, \quad := X \upharpoonright m = \{(x, m); m < n, (x, m) \in X\}$$

$$\therefore \text{ACA}_0 \vdash \text{RT}(2, < \omega) \leftrightarrow \text{ATR} \text{ (3.2 Th [FMS])}$$

$$\text{ATR}_0 \equiv \text{RT}(2, < \omega)_0$$

定理 2 (2.1 Th [FMS]) $\text{PA} \vdash \Sigma_1^0\text{-RFN}_{\text{ATR}_0} \leftrightarrow \text{FMS}$

III FMS-Principle の 概 説

3.1 $\text{FMS}(f) := \forall m \exists X (X \text{ is } m\text{-dense and } f\text{-large set})$

$$\text{FMS}_n^* := f \text{ is } \Delta_n\text{-function} \rightarrow \text{FMS}(f).$$

f_n is β I \rightarrow Δ_n -function \rightarrow FMS_n^*

定理 3. (1) $\Sigma_n^0\text{-RFN}_{\text{ATR}_0} \leftrightarrow \text{FMS}(f_n) \text{ in PA}$

(2) $\text{FMS}_n^*, \text{WFP}_{\Delta_n}^0, \text{LSP}_{\Delta_n}^0, \text{TI}_{\pi}^0$ in PA are Π_1^1 -equivalent

(3) (1) in PA \rightarrow F_n^* , (2) in PA \rightarrow F_n^* \leftrightarrow F_n

$$\text{PA} \vdash \text{F}_{n+1}^* \rightarrow \text{F}_n^*, \text{F}_n^* \rightarrow \text{F}_n$$

以下に (1) and (2) の 証明 の outline を 示す.

3.2 $< \omega$ の 補題

補題 1. $([M], [\text{FMS}])$ $S = \{s_0, \dots, s_{k-1}\}$ is $k+1$ -dense, $\min S > 3$

$\therefore \exists S \setminus \{s_0, s_1\} = \{s_2, \dots, s_{k-1}\}, S \setminus \{s_{k-2}, s_{k-1}\} = \{s_0, s_1, \dots, s_{k-3}\}$ is k -dense

[証明] 次 の 2 は partition (C_0, C_1) of $[S]^{<\omega}$ を 定義 する

$$\{a\} \in C_0 \iff a = s_0 \text{ or } a = s_1, \text{ for } a \text{ is } s_0 \text{ or } s_1, \text{ or } a \text{ is } \{s_0, s_1\}$$

$\text{if } \{a\} \in C_1$ is λ and $\text{if } \{a\} \in C_0$ is λ $\text{then } X \subseteq S$ is k -dense

$$[X]^{<\omega} \subseteq C_0 \text{ iff } [X]^{<\omega} \subseteq C_1, \quad [X]^{<\omega} \subseteq C_0 \text{ iff } s_0, s_1 \in X \text{ and } C \in X$$

ある $\varepsilon > 0$ に対して $\{s_0, s_1, c\} \subseteq X$ $\{c\} \in (X)^{< \omega} \subseteq C_0$ であることが示される。

$X = \{s_0, s_1\}$ $|X| = 2$, $\min X = s_0 > 3$ であるから X は k -dense である。

$\Rightarrow \varepsilon = (X)^{< \omega} \subseteq C_1$, $X \subseteq S \setminus \{s_0, s_1\}$ であるから $S \setminus \{s_0, s_1\}$ は k -dense, 同様にして $S \setminus \{s_{2i}, s_{2i+1}\}$ は k -dense である。

FMS_r , $r \geq 2$ は次の命題を導くことができる。

任意の n に対して次のような M がある。 M は \mathbb{R}^n の r -covering $(C_i)_{i \in \mathbb{R}}$ であり

$X \subseteq M$ であるから X は (C_i) に対して homogeneous r -dense.

$FMS_r(1)$ は上の X に対して f -large である条件が成り立つ。

補題 2 $FMS \rightarrow FMS_r$ in PA

(証明) FMS を仮定する。任意の $S \subseteq \mathbb{R}$ に対して FMS_{2^S} が成り立つ。 M は $n+S$ -dense set であるから M が所定の性質を導くことができる。 (証明略)

M は $n+S$ -dense set であり、 $r = 2^S$ であるから $(C_i)_{i \in \mathbb{R}} \in [M]^{< \omega}$ は r -covering である。

$D_0 = C_0 \cup \dots \cup C_{\frac{r}{2}-1}$, $D_1 = C_{\frac{r}{2}} \cup C_{\frac{r}{2}+1} \cup \dots \cup C_{r-1}$ であるから $(D_0, D_1) \in [M]^{< \omega}$ は 2-covering

であるから $Y \subseteq \mathbb{R}^M$ であるから Y は $n+S-1$ -dense であり $Y \subseteq D_0$ であるから $Y \subseteq D_1$

$Y \subseteq D_0$ であるから $C'_i = (C_i \cap Y)^{< \omega}$ $i < \frac{r}{2} = 2^{S-1}$ であるから (C'_i) は $[Y]^{< \omega}$ の

2^{S-1} -covering である。 (帰納法を仮定により) $X \subseteq Y$ であるから X は n -dense

であり $(X)^{< \omega} \subseteq C'_i \subseteq C_i$ for some i . $\Rightarrow X$ は homogeneous for $(C_i)_{i \in \mathbb{R}}$.

$Y \subseteq D_1$ であるから同様である。

任意の $r \geq 2$ に対して $r \leq 2^S$ であるから S に対して r -covering は 2^S -covering である。

FMS_r が成り立つ。

補題 3 $(C_i)_{i \in \mathbb{R}}$ $(C'_j)_{j \in S}$ は $[X]^{< \omega}$ の d -closed r, S -covering である。

$(D_\alpha)_{\alpha \in r.s} = (C_i \cap C_j)_{i \in r, j \in s}$ is a d -closed $r.s$ -covering $r \neq s \geq 2$

H is (D) iff it is homogeneous for r (C) iff it is homo for (C') iff it is homo for

the d .

補題 4. ([PH] 2.12) 任意の自然数 $p \in M$ に対して $p+1$ -partition $(D_i)_{i \in p+1}$ が $d \geq 2$, X is (D) -homo for $|X| \geq 2$ for $p \leq \min X$ $[M]^{<\omega}$ is d -closed

[証明] $Q: [M]^{<\omega} \rightarrow p+1$ is defined as follows.

$$Y \in [M]^{<\omega} \quad Y = \{y_0, y_1, \dots, y_{k-1}\} \text{ is in } L.$$

$$Q(\{y_0, y_1, \dots, y_{k-1}\}) = \min(y_0, p)$$

$$X \text{ is } Q\text{-homo for } |X| \geq 2, X = \{x_0, x_1, \dots, x_{k-1}\} \text{ is in } L.$$

$$x_0 < p \text{ for } i \text{ is } Q(\{x_0, x_1, \dots, x_{k-1}\}) = \min(x_0, p) = x_0.$$

$$Q(\{x_1, x_2, \dots, x_{k-1}\}) = \min(x_1, p) > x_0.$$

is for X is Q -homo for the other i 's. \rightarrow is $x_0 \geq p$.

補題 5 $FMS(f)$ is in L . 任意の n に対して n -dense X is

$$\forall x, y \in X, x < y \Rightarrow f(x) < y \text{ is in } L \text{ for } f \text{ exists.}$$

[証明] $p \geq 2 \in M$ is in L . 補題 4 is for $[M]^{<\omega}$ partition (D) is

is in L . $[M]^{<\omega}$ is 2-partition $(C) = (C_i)_{i \in 2}$ is in L is defined as

$$X \in [M]^{<\omega} \text{ is in } L. \quad X \in C_0 \iff \forall x, y \in X \quad x < y \Rightarrow f(x) < y$$

補題 3 is for $(C), (D)$ is combine is for $(E) = (E_i)_{i \in r}$ is in L .

$FMS(f)$ is in L is 補題 2 is the same is $FMS_r(f)$ is in L for r is in L for any n is in L $FMS_r(f)$ is in L is the set $X \in M$ is in L . M is in L is (E) is in L .

is for $X \subseteq M$ is in L is X is n -dense f -large for (E) -homo,

(E) $\delta > 2(D)$ -homo \Rightarrow (C)-homo

$Y = \{y_0, y_1, \dots, y_{l-1}\} \subset \mathbb{R}^n$ $|Y| \geq 2^{12} \delta^2$; $\delta \in \mathbb{R}^n$; $y_0 \geq 2 \delta^2$

Y is f -large \mathbb{R}^n ; $f(y_0) \leq \delta < y_{l-1}$ ($y_0 \geq 2 \delta^2$)

$\Rightarrow \exists \{y_0, y_{l-1}\} \in C_0$

Y is (C)-homo \mathbb{R}^n ; $\{Y\}^{\omega} \subseteq C_0$, $\forall C \subseteq Y \in C_0$ $\subset \mathbb{R}^n$.

Y is n -dense \mathbb{R}^n : $\forall x, y \in Y, x < y \Rightarrow f(x) < y \in \mathbb{R}^n$.

3.3 定理 3(1) の証明 (Outline)

Σ_m^0 -RFN_{ATR₀} \rightarrow FMS(f_m) ; \Leftarrow

\Leftarrow の証明は $m=1$ の場合を | 証明 \times $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ " | " として

$\delta_0(n) \in \exists X$ (X is n -dense and f_m -large) $\subset \mathbb{R}^n$

" 12.9.9 $m=1$ の場合 $\text{RT}(2, \omega)_0 \vdash \delta(\bar{n})$ " の PA 上の証明 \Rightarrow $\delta_0(n) \in \mathbb{R}^n$

\Leftarrow : $\delta_0(n) := \exists X$ (X is n -dense and $f_m(\min X) \leq |X|$) の Σ_m^0 -formula として $\delta_0(n) \in \mathbb{R}^n$ を認める

FMS(f_m) $\rightarrow \Sigma_m^0$ -RFN_{ATR₀} \Leftarrow

Σ_m^0 -RFN_{ATR₀} \Leftrightarrow m -consistency of $\text{RT}(2, \omega)_0$ として

FMS(f_m) の仮定 $\forall \tau \in \text{RT}(2, \omega)_0 \vdash \text{Th} \Pi_m^0$ の consistency \Leftarrow として

FMS(f_m) の IN \Leftarrow $\text{IN} \models \text{FMS}(f_m), \text{PA}, \text{Th} \Pi_m^0$ として

FMS(f_m), PA, $\text{Th} \Pi_m^0$ の countable nonstandard model M の存在

δ is nonstandard number in $M < 1$, X is M -finite δ -dense \Rightarrow

$\forall x, y \in X, x < y \Rightarrow f_m(x) < y \in \mathbb{R}^n$ (これは $\delta_0(n)$ の性質)

$(C_i^0, C_i^1)_{i=0,1,2, \dots, 12}$ is M -finite d -closed 2 -covering of $[0, \max(X)]^{\omega}$

の enumeration \Leftarrow " | " covering \Leftarrow $\text{RT}(2, \omega)_0$ の性質

$X = X_0 \supseteq X_1 \supseteq X_2 \supseteq \dots$

として \Leftarrow X_{i+1} is $(\delta - i^{-1})$ -dense set homogeneous for $(C_i^0, C_i^1) \upharpoonright [X_i]$.

$I = \{a \in M ; \exists i (a < \min(X_i)) \in \text{RT}(2, \omega)_0 \vdash \text{Th} \Pi_m^0\}$

[FMS] Th. 2.1 に示すように証明の一部分は X が f_m の値の追加的性質とは無関係に成立する。ゆえに $I \models \text{Th } \Pi_m^0$ といえる。

また $a \in I \Rightarrow f_m(a) \in I$

$a < \min(X_i)$ $X_i = \{s_0, s_1, \dots, s_{i-1}\}$ と $s_0 < s_1 < \dots < s_{i-1} \subseteq X_j \subseteq X_i (j < i)$ とする。

補題 1 の証明中の (C_0, C_1) は $(C_0^j, C_1^j) (j > i)$ とし $s_0 < s_1 < \dots < s_{i-1}$ とする。

十分大なる $j > i$ に対して $X_j \subseteq \{s_2, \dots, s_{i-1}\}$ とする。

(2.1) $f_m(a) < f_m(s_0) < s_1 < \min(X_j)$ ゆえに $f_m(a) \in I$

$\varphi_i = \forall v_0 \exists v_1 \dots \forall v_{i-1} \psi(v_0, v_1, v_2, \dots, v_{i-1}) \psi \in \Pi_m^0$

は true Π_m^0 -sentence とする。

$h_1(v_0) = \mu v_1 \forall v_2 \dots \forall v_{i-1} \psi(v_0, v_1, v_2, \dots, v_{i-1})$

$h_3(v_0, v_2) = \mu v_3 \forall v_4 \dots \forall v_{i-1} \psi(v_0, h_1(v_0), v_2, \dots, v_{i-1})$

$h_5(v_0, v_2, v_4) = \mu v_5 \forall v_6 \dots \forall v_{i-1} \psi(v_0, h_1(v_0), v_2, h_3(v_0, v_2), \dots, v_{i-1})$

$h_1^*(u_0) = \max\{h_1(v_0); v_0 \leq u_0\}$

$h_2^*(u_0, u_2) = \max\{h_2(v_0, v_2); v_0 \leq u_0, v_2 \leq u_2\}$

$g(x) = \max\{h_1^*(x), h_3^*(x, x), h_5^*(x, x, x), \dots\}$ とする。

$h_i = h_i^* g$ は Δ_{m-1} -function である。

$a \in I$ 任意 $a_i \in I$ とする。

$a_0, a_2, \dots, a_{i-1} \in I \Rightarrow h_i(a_0, a_2, \dots, a_{i-1}) \in I$ とする。

$a_0, a_2, \dots, a_{i-1} \in \mathbb{N}$ とする。

$a = \max(a_0, a_2, \dots, a_{i-1}) > \mathbb{N}$

$h_i(a_0, a_2, \dots, a_{i-1}) \leq h_i^*(a_0, \dots, a_{i-1}) \leq h_i^*(a, a, \dots, a) \leq g(a) < f_m(a) \in I$

(g は Δ_{m-1} であり f_m が g を支配し、 a は nonstandard であるから $g(a) < f_m(a)$)

