数理解析研究所講究録
644巻 1988年 24-29

Grzegorczyk hierarchy について

名古屋大学　波多野祥二

Cobhan[1]とMuchnik[4]はGregorczyk hierarchy(see,[3][5]) の$\mathcal{E}^n$がある空間領域制限のTuring machinesの族と一致することを証明した。本論文では時間領域制限のTuring machinesに対応する族$\mathcal{P}^n$を定義し、それらが一致することを証明し、それらのhierarchyの構造を調べる。

§1．記号と定義

記号として以下を使用する。

C_*	特性関数がCに含まれる述語の集合
$\mathcal{E}^n$	Grzegorczyk hierarchyの第n番のクラス
P	多項式時間内にdeterministic Turing machinesで計算可能な関数族
NP	多項式時間内にnondeterministic Turing machinesで計算可能な関数族
i^n_j	$i^n_j(x_1,\ldots,x_n)=x_j$ for $1\leqq j\leqq n$ and $n=1,2,\ldots$.
$0(x)$	定数関数$0(x)=0$.
$s(x)$	$s(x)=x+1$.
$Ack(x,y)$	Peter関数
	$Ack(0,y)=y+1, Ack(x+1,0)=Ack(x,1), Ack(x+1,y+1)=Ack(x,Ack(x+1,y))$
$\lvert x\rvert$	$\lvert x\rvert$=xを２進展開した長さ
$x\#y$	smash関数　$x\#y=2^{\lvert x\rvert\cdot\lvert y\rvert}$.

Def.1.1　関数$f(x_0,\ldots,x_{n-1})$が *increasing* とは、すべての$i<n$に対して、

$$a<b \Rightarrow f(x_0,\ldots,x_{i-2},a,x_i,\ldots x_{n-1})\leqq f(x_0,\ldots,x_{i-2},a,x_i,\ldots x_{n-1}).$$

Def.1.2　g,h,j を既に定義された関数とする。その時、次に定義されている関数fを関数g,h,jからlimited recursionによって得られた関数という。

$$f(0,x_1,\ldots,x_n)=g(x_1,\ldots,x_n)$$
$$f(y+1,x_1,\ldots,x_n)=h(y,x_1,\ldots,x_n,f(y,x_1,\ldots,x_n))$$
$$f(y,x_1,\ldots,x_n)\leqq j(y,x_1,\ldots,x_n)$$

Def.1.3 g, h_1, h_2, jを既に定義された関数とする。その時、次に定義されている関数fを関数g, h_1, h_2, jからbounded recursionによって得られた関数という。

$$f(0, x_1, \ldots, x_n) = g(x_1, \ldots, x_n)$$
$$f(2y, x_1, \ldots, x_n) = h_1(y, x_1, \ldots, x_n, f(y, x_1, \ldots, x_n)) \quad \text{for } y>0$$
$$f(2y+1, x_1, \ldots, x_n) = h_2(y, x_1, \ldots, x_n, f(y, x_1, \ldots, x_n))$$
$$f(y, x_1, \ldots, x_n) \leqq j(y, x_1, \ldots, x_n)$$

Def.1.4 $f_1, \ldots, f_n$を関数とする。$Com(f_1, \ldots, f_n)$を次の条件を満たす最小の関数族Cとする

1) $\mathcal{O}(x), \mathcal{S}(x), i^m_j, f_1, \ldots, f_n \in C$

2) $h, g_1, \ldots, g_m \in C \Rightarrow h(g_1(x_1, \ldots, x_k), \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_k)) \in C$

Def.1.5 $\mathcal{E}(f_1, \ldots, f_n)$を次の条件を満たす最小の関数族$C$とする。

1) $\mathcal{O}(x), \mathcal{S}(x), i^m_j, f_1, \ldots, f_n \in C$

2) $h, g_1, \ldots, g_m \in C \Rightarrow h(g_1(x_1, \ldots, x_k), \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_k)) \in C$

3) Cはlimited recursionについて閉じている。

Def.1.6 $\mathcal{P}(f_1, \ldots, f_n)$を次の条件を満たす最小の関数族$C$とする。

1) $\mathcal{O}(x), 2x, 2x+1, i^m_j, f_1, \ldots, f_n \in C$

2) $h, g_1, \ldots, g_m \in C \Rightarrow h(g_1(x_1, \ldots, x_k), \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_k)) \in C$

3) Cはbounded recursionについて閉じている。

定義より次の事実がわかる。

Theorem 1.1

$$\mathcal{E}^n = \mathcal{E}(Ack(n,x), \max(x,y)) \supsetneqq \mathcal{E}(Ack(n,x)) \text{ for } n>2 .$$
$$\mathcal{E}^0 = \mathcal{E}(Ack(0,x)) = \mathcal{E}() \subsetneqq \mathcal{E}(\max(x,y)).$$
$$\mathcal{E}^1 = \mathcal{E}(Ack(2,x), \max(x,y)) = \mathcal{E}(x+y) = \mathcal{E}(2x, \max(x,y)) \supsetneqq \mathcal{E}(2x).$$
$$\mathcal{E}^2 = \mathcal{E}(x \cdot y) = \mathcal{E}(x^2, \max(x,y)) \supsetneqq \mathcal{E}(x^2)$$
$$\mathcal{E}^3 = \mathcal{E}(Ack(3,x), \max(x,y)) = \mathcal{E}(2^{x \cdot y}) = \mathcal{E}(2^x, \max(x,y)) \supsetneqq \mathcal{E}(2^x)$$

□

Def.1.7　$\mathcal{P}^1=\mathcal{P}()$, $\mathcal{P}^2=\mathcal{P}(x^2,\max(x,y))$,

n>2のとき、$\mathcal{P}^n=\mathcal{P}((Ack(n,x),\max(x,y))$

Def.1.8　Cを関数族とする。

DTTM(C)={f| ∃t∈C(f($x_1,...,x_n$)を|t($x_1,...,x_n$)|ステップで計算可能な determinastic Turing machine が存在する。)}

DSTM(C)={f| ∃t∈C(f($x_1,...,x_n$)を|t($x_1,...,x_n$)|空間領域で計算可能な determinastic Turing machine が存在する。)}

§2　$\mathcal{E}$と$\mathcal{P}$

Theorem 2.1　$\mathcal{P}^1 \subsetneq \mathcal{P}^2 \subsetneq \mathcal{P}^3 \subsetneq \cdots$

$\mathcal{P}^1{}_* \subseteq \mathcal{P}^2{}_* \subsetneq \mathcal{P}^3{}_* \subsetneq \cdots$

proof Gregorczyk hierarchyの場合（$\mathcal{E}^0{}_* \subseteq \mathcal{E}^1{}_* \subseteq \mathcal{E}^2{}_* \subsetneq \mathcal{E}^3{}_* \subsetneq \cdots$, $\mathcal{E}^n \subsetneq \mathcal{E}^{n+1}$, see [3]）と同様に証明出来る。□

Theorem 2.2　$\mathcal{P}(f_1,...,f_n) \subseteq \mathcal{E}(f_1,...,f_n,2x)$

proof $\mathcal{E}(f_1,...,f_n,2x)$がbounded recursionについて閉じていることを示せばよい。$g,h_1,h_2,j \in \mathcal{E}(f_1,...,f_n,2x)$、fをg,$h_1$,$h_2$,jからbounded recursionによって得られた関数とする。f'を次のlimited recursionによって得られた関数とする。

$$f'(0,y,\vec{x})=g(\vec{x})$$

$$f'(s+1,y,\vec{x})=\begin{cases} h_1(q,\vec{x},f'(s,y,\vec{x})) & \text{if } |y|\geqq s+1, y=(2\cdot q)\cdot 2^{|y|-s-1}+r \\ h_2(q,\vec{x},f'(s,y,\vec{x})) & \text{if } |y|\geqq s+1, y=(2\cdot q+1)\cdot 2^{|y|-s-1}+r \\ f'(s,y,\vec{x}) & \text{o.w.} \end{cases}$$

$$f'(s,y,\vec{x})\leqq j(y,\vec{x})$$

従って、$f(y,\vec{x})=f'(y,y,\vec{x})\in\mathcal{E}(f_1,...,f_n,2x)$。□

Theorem 2.3 $a(x)\geqq 2^x \Rightarrow \mathcal{P}(a,...)=\mathcal{E}(a,...)$

proof $a\in\mathcal{P}(a,...)$より、$2^x\in\mathcal{P}(a,...)$。$\mathcal{P}(a,...)$がlimited recursionについて閉じていることを示す。$g,h,j\in\mathcal{P}(a,...)$とし、fがg,h,jからlimited recursionによって得られた関数とする。

$f'(0,\vec{x})=g(\vec{x})$

$f'(2s,\vec{x})=f'(2s+1,\vec{x})=h(|s|,\vec{x},f'(s,\vec{x}))$

$f'(s,\vec{x})\leqq j(|s|,\vec{x})$

$f(y,\vec{x})=f'(2^y-1,\vec{x})\in \mathcal{P}(a,\ldots)$。 □

Theorem 2.4 $f(x)\geqq x^2, f\in \mathrm{DSTM}(\mathcal{Com}(\max(x,y),f))$ならば、

$\mathcal{E}(\max(x,y),f)=\mathrm{DSTM}(\mathcal{Com}(\max(x,y),f))$

proof 仮定より、$\{x^2\}\cup \mathcal{Com}(\max(x,y),f)\subseteq \mathrm{DSTM}(\mathcal{Com}(\max(x,y),f))$。

(⊆) $\mathrm{DSTM}(\mathcal{Com}(\max(x,y),f))$がlimited recursionについて閉じている。

(⊇) $g\in \mathcal{Com}(\max(x,y),f)$, $h(x)$を$|g(x)|$空間領域で計算可能なdeterminastic Turing machine $\mathbb{M}$が存在するとする。qを$\mathbb{M}$の内部状態の数とする。$h(x)$を計算するために、Turing machine $\mathbb{M}$とテープの取り得る状態はたかだか$m\cdot q\cdot g(x)$である（mは定数である。）。すなわち、$\mathbb{M}$は$m\cdot q\cdot g(x)$ステップ以内でとまる。よって、bounded recursionを使用して、関数$h(x)$を$\mathcal{E}(\max(x,y),f)$に属するように定義しなおすことが出来る。 □

Cor.2.1(Ritchie) $\mathcal{E}^2=\mathrm{DLBA}$ (=DSTM({多項式})) □

Theorem 2.5

(a) $f(x)\geqq x^2, f\in \mathrm{DTTM}(\mathcal{Com}(\max(x,y),f))$ ならば、

$\mathcal{P}(\max(x,y),f)\supseteq \mathrm{DTTM}(\mathcal{Com}(\max(x,y),f))$

(b) $f(x)\geqq x\#x, f\in \mathrm{DTTM}(\mathcal{Com}(\max(x,y),f))$ ならば、

$\mathcal{P}(\max(x,y),f)=\mathrm{DTTM}(\mathcal{Com}(\max(x,y),f))$

proof (a)明らか。

(b) (⊇) (a)より。(⊆) $\mathrm{DTTM}(\mathcal{Com}(\max(x,y),f))$がbounded recursionについて閉じていることを示せばよい。 □

Rose[5] は$\mathcal{P}(x\#y)_*=\mathrm{P}$を示した。

Cor.2.1 $\mathcal{P}(x\#y)_*=\mathrm{P}\subseteq \mathrm{NP}\subseteq \mathcal{E}(x\#y)_*$

proof theorem 2.3 より、$\mathcal{P}(x\#y)_*=\mathrm{P}\subseteq \mathcal{E}(x\#y)_*$。$\mathcal{E}(x\#y)_*$はbounded quantifiersについても閉じている。よって、$\mathrm{NP} \subseteq \mathcal{E}(x\#y)_*$。 □

§3　1変数と多変数

Lemma 3.1　fをincreasing関数とし、$f(x_0,\ldots,x_{n-1}) \geqq \max(x_0,\ldots,x_{n-1})$, "$f(x_0,\ldots,x_{n-1})<y$"$\in \mathcal{E}(f(x,\ldots,x))$, $g \in \mathcal{E}(f(x_0,\ldots,x_{n-1}))$とする。そのとき、次の条件を満たす関数$g' \in \mathcal{E}(f(x,\ldots,x))$, $j \in \mathit{Com}(f(x_0,\ldots,x_{n-1}))$がある。

$$j(x_0,\ldots,x_{m-1}) \leqq x_m \Rightarrow g'(x_0,\ldots,x_{m-1},x_m)=g(x_0,\ldots,x_{m-1}).$$

proof　gの構成に関する帰納法で証明出来る。 □

Theorem 3.1 f をincreasing関数、$f(x_0,\ldots,x_{n-1}) \geqq \max(x_0,\ldots,x_{n-1})$ 、そして"$f(x_0,\ldots,x_{n-1})<y$"$\in \mathcal{E}(f(x,\ldots,x))$とする。そのとき、

$$\mathcal{E}(f(x_0,\ldots,x_{n-1}))_* = \mathcal{E}(f(x,\ldots,x))_*.$$

proof　(⊆) を証明する。$g \in \mathcal{E}(f(x_0,\ldots,x_{n-1}))_*$。$g'$、$j$をLemma 3で作られた関数とする。

$$g(x_0,\ldots,x_{m-1}) = \begin{cases} g'(x_0,\ldots,x_{m-1},j(x_0,\ldots,x_0)) & \text{if } x_0 \geqq x_0,\ldots,x_{m-1} \\ \cdots\cdots\cdots & \\ g'(x_0,\ldots,x_{m-1},j(x_i,\ldots,x_i)) & \text{if } x_i \geqq x_0,\ldots,x_{m-1} \\ \cdots\cdots\cdots & \\ g'(x_0,\ldots,x_{m-1},j(x_{m-1},\ldots,x_{m-1})) & \text{if } x_{m-1} \geqq x_0,\ldots,x_{m-1} \end{cases}$$

よって、$g \in \mathcal{E}(f(x,\ldots,x))_*$. □

Cor.3.1　$\mathcal{E}^0{}_* = \mathcal{E}(\max(x,y))_*$, $\mathcal{E}(2x)_* = \mathcal{E}^1{}_*$, $\mathcal{E}(x^2)_* = \mathcal{E}^2{}_*$,
$\mathcal{E}(\mathit{Ack}(n,x))_* = \mathcal{E}^n{}_*$ for $n>2$. □

Gandyは[1]のなかで$\mathcal{E}^0{}_* = \mathcal{E}(\max(x,y))_*$と述べている。

Lemma 3.2 関数fをincreasingとし、$f(x_0,\ldots,x_{n-1}) \geqq \max(x_0,\ldots,x_{n-1})$,
$\exists k \in \mathit{Com}(f(x_0,\ldots,x_{n-1})) \exists f' \in \mathcal{P}(f(x,\ldots,x))$

$k(x_0,\ldots,x_{n-1}) \leqq x_n \Rightarrow f'(x_0,\ldots,x_{n-1},x_n) = f(x_0,\ldots,x_{n-1})$,

$g \in \mathcal{P}(f(x_0,\ldots,x_{n-1}))$とする。そのとき、

次の条件を満たす関数$g' \in \mathcal{P}(f(x,\ldots,x))$, $j \in \mathcal{C}om(f(x_0,\ldots,x_{n-1}))$か存在する。

$j(x_0,\ldots,x_{m-1}) \leqq x_m \Rightarrow g'(x_0,\ldots,x_{m-1},x_m) = g(x_0,\ldots,x_{m-1})$.

proof gの構成に関する帰納法で証明出来る。 □

Theorem 3.2 関数fをincreasingとし、$f(x_0,\ldots,x_{n-1}) \geqq \max(x_0,\ldots,x_{n-1})$,

$\exists k \in \mathcal{C}om(f(x_0,\ldots,x_{n-1})) \exists f' \in \mathcal{P}(f(x,\ldots,x))$

$k(x_0,\ldots,x_{n-1}) \leqq x_n \Rightarrow f'(x_0,\ldots,x_{n-1},x_n) = f(x_0,\ldots,x_{n-1})$,

とする。そのとき、

$$\mathcal{P}(f(x_0,\ldots,x_{n-1}))_* = \mathcal{P}(f(x,\ldots,x))_*.$$

proof theorem 3.1 と同様に証明出来る。 □

theorem 3.2より、ただちに次のことがわかる。

Cor.3.2 $\mathcal{P}()_* = \mathcal{P}(x+y)_*$, $\mathcal{P}(x^2)_* = \mathcal{P}(x \cdot y)_*$, $\mathcal{P}(x\#x)_* = P$ □

References

[1] **Alen Cobham**,"The intrinsic computational difficulty of functions",in: Y.Bar-HilleL.(ed.) Proceesings of the 1964 International Conference on Logic,Methodology and the Philosophy of science,North-Holland Publ.Comp., Amsterdam 1965,24-30

[2] **R.O.Gandy**,"Some relations between classes of low computational complexity", Bull. London Math. Soc. 16(1984)127-134.

[3] **Andrzej Grzegorczyk**,"Some classes of recursive functions",Rozprawy Matematycne(Inst Mat. Polsk. Akad. Nauk.)Ⅳ(1953).

[4] **Steven S. Muchnick**,"On two approaches to classical recursive functions", in: Problems in Mathematical Logic [in Russian],Moscow,pp.123-138(1970)

[5] **H. E. Rose**,Subrecursion