

EXACT MOMENTS OF THE MULTIVARIATE F AND BETA DISTRIBUTIONS

筑波大 数学 今野 良彦
Yoshihiko Kenno

§ 1 序 多変量 F 分布及び Beta 分布に関する部分積分の公式 (F identity と Beta identity) を求め、それを用いてこれら二つの分布の正確な 2 次のモーメントを導出することを考える。

§ 2 準備 $m \times m$ の正定値確率行列 F と B がそれぞれ多変量 F 分布と多変量 Beta 分布に従い、確率密度関数

$$f_1(F) = K |\Delta|^{\frac{n_2}{2}} |F|^{\frac{n_1-m-1}{2}} |\Delta+F|^{\frac{n}{2}} \quad (1)$$

と

$$f_2(B) = K |\Delta|^{\frac{n-m-1}{2}} |B|^{\frac{n_1-m-1}{2}} |\Delta-B|^{\frac{n_2-m-1}{2}} \quad (2)$$

を持つとする。ただし、

$$K = \frac{\Gamma_m(\frac{n}{2})}{\Gamma_m(\frac{n_1}{2}) \Gamma_m(\frac{n_2}{2})}, \quad \Gamma_m(a) = \pi^{\frac{m(m-1)}{4}} \prod_{i=1}^m \Gamma(a - \frac{i-1}{2})$$

$n = n_1 + n_2, n_1 > m + 1, n_2 > m + 1, \Delta$ は正定値のパラメータ行列とする。我々は、この二つの分布を $F_m(n_1, n_2; \Delta)$ と $B_m(n_1, n_2; \Delta)$ と記すことにする。

これらの分布は、Wishart 分布が χ^2 分布の多次元への拡張であるように、一次元の F と Beta 分布の一つの拡張として考えることができる。この二つの分布については、Katri(1970), Oikin and

Rubin(1964), Tan(1969), Mitra(1970), De Waa1(1970), Perlman(1977), Dawid(1981)等により議論されている。

§ 3 F identity F identityを述べるために、次の記号を用意する。 $m \times m$ の行列 $Q = (q_{ij})$ に対して、ノルムを $\|Q\| = \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m q_{ij}^2 \right)^{1/2}$ とし、 $Q_{(\Delta)} = ((1/2)(1 + \delta_{ij}) q_{ij})$ とする。ただし、 δ_{ij} はクロネッカー・デルターとする。

定理 1 $m \times m$ の行列 $V = (V_{ij}(F, \Delta))$ とスカラー $h(F)$ が以下の条件を満たすと仮定する。

(i) $V_{ij}(F, \Delta) h(F)$ が領域

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}(\rho_1, \rho_2) = \{F; F \geq 0, 0 \leq \rho_1 \leq \|F\| \leq \rho_2\}$$

でストークスの定理の条件を満たす。

(ii) $b_1(\mathcal{R}) = \{F; F \geq 0, \|F\| = \rho_1\}$ 上において

$$\lim_{\rho_1 \rightarrow +0} \sup_{F \in b_1(\mathcal{R})} \frac{|h(F)| \|V(F, \Delta)\|}{\rho_1^{1 - \frac{m n_1}{2}}} = 0$$

が成立する。

(iii) $b_2(\mathcal{R}) = \{F; F \geq 0, \|F\| = \rho_2\}$ 上において

$$\lim_{\rho_2 \rightarrow +\infty} \sup_{F \in b_2(\mathcal{R})} \frac{|h(F)| \|V(F, \Delta)\|}{\rho_2^{\frac{m n_2}{2} + 1}} = 0$$

が成立するとする。

そのとき、

$$E_F[h(F)\text{tr}(\Delta+F)^{-1}V] = E_F\left[\frac{2}{n}h(F)\text{tr}(DV) + \frac{2}{n}\text{tr}\left(\frac{\partial h(F)}{\partial F} \cdot V \cdot \frac{1}{2}\right) + \frac{n_1 - m - 1}{n}h(F)\text{tr}(F^{-1}V)\right] \quad (3)$$

が成り立つ。ただし、 $n = n_1 + n_2$, $D = ((1/2)(1 + \delta_{ij}) \partial / \partial F_{ij})$ とする。

注意 (3) において、 $h(F)$ を定数とすれば、Muirhead and Verathaworn (1985) の identity が得られる。

この F identity は Haff (1979) の Wishart identity を多変量 F 分布に応用したものである。以下、 $h(F)$ と $V(F, \Delta)$ をうまく定めることにより、多変量 F 分布のモーメントを求める。

定理 2 F が確率密度関数(1)を持ち、 $n_2 - m - 1 > 0$ とすれば、

$$(i) \quad E[F_{ij}] = \frac{n_1}{n_2 - m - 1} \Delta_{ij}$$

$n_2 - m - 3 > 0$ とすれば、

$$(ii) \quad E[F_{ij}F_{kl}] = \frac{n_1}{(n_2 - m)(n_2 - m - 1)(n_2 - m - 3)} \{ [n_1(n_2 - m - 2) + 2] \Delta_{ij} \Delta_{kl} \\ + (n - m - 1)(\Delta_{jl} \Delta_{ik} + \Delta_{kj} \Delta_{il}) \}$$

$$(iii) \quad \text{Cov}(F_{ij}, F_{kl}) = \frac{n_1(n - m - 1)}{(n_2 - m)(n_2 - m - 1)(n_2 - m - 3)} \left\{ \frac{2}{n_2 - m - 1} \Delta_{ij} \Delta_{kl} + \Delta_{jl} \Delta_{ki} + \Delta_{kj} \Delta_{il} \right\}$$

$$(iv) \quad E[FAF] = \frac{n_1}{(n_2 - m)(n_2 - m - 1)(n_2 - m - 3)} \{ [n_1(n_2 - m - 2) + 2] \Delta A \Delta + (n - m - 1) \{ (\Delta A \Delta)^t + \text{tr}(\Delta A) \Delta \} \}$$

ただし、 $\Delta = (\Delta_{ij})$ 、 A は $m \times m$ の任意の行列とする。

我々の求めた F のモーメントより、Wishart モーメントを得ることができる。定理 2 の (iii) において、 $F^* = n_2 F$ 、 A

を対称行列とすれば、

$$\lim_{n_2 \rightarrow +\infty} E[F^* A F^*] = n_1(n_1+1)\Delta A \Delta + n_1 \text{tr}(\Delta A)\Delta$$

となる。上の式の右辺は、 W がWishart分布 $W_m(n_1, \Delta)$ に従うときの $E_W[W A W]$ に一致することが、 F^* が W に弱収束することよりわかる。

定理2において、モーメントをF identityを使って導出したが、Wishart分布の共分散行列に逆Wishart priorを仮定することにより、同様の結果を得ることができることがProfessor Sinhaにより指摘された。ここで、その別証明について少し述べる。

今、

$$W \sim W_m(n_1, \Delta), \quad \Sigma^{-1} \sim W_m(n_2, \Delta^{-1})$$

を仮定する。 W と Σ^{-1} の同時密度関数は ($n = n_1 + n_2$)

$$\frac{2^{-\frac{mn}{2}} |\Delta|^{\frac{n_2}{2}} |W|^{\frac{n_1-m-1}{2}}}{\Gamma_m(\frac{n_1}{2}) \Gamma_m(\frac{n_2}{2}) |\Sigma|^{\frac{n-m-1}{2}}} \text{etr}\{-\frac{1}{2}\Sigma^{-1}(W+\Delta)\} (dW)(d\Sigma^{-1})$$

となる。ここで、 $\Phi = (W+\Delta)^{\frac{1}{2}} \Sigma^{-1} (W+\Delta)^{\frac{1}{2}}$ なる変換をすれば、 Φ と W の同時密度関数

$$\frac{2^{-\frac{mn}{2}} |\Delta|^{\frac{n_2}{2}} |W|^{\frac{n_1-m-1}{2}}}{\Gamma_m(\frac{n_1}{2}) \Gamma_m(\frac{n_2}{2}) |W+\Delta|^{\frac{n}{2}}} |\Phi|^{\frac{n-m-1}{2}} \text{etr}\{-\frac{1}{2}\Phi\} (dW)(d\Phi)$$

を得る。 Φ に関して積分をすると、 W の周辺分布が $F_m(n_1, n_2; \Delta)$

になることが示される。そこで、 F の二次のモーメントは

$$\iint W_{ij} W_{kl} \frac{2^{-\frac{mn}{2}} |\Delta|^{\frac{n_2}{2}} |W|^{\frac{n_1-m-1}{2}}}{\Gamma_m(\frac{n_1}{2}) \Gamma_m(\frac{n_2}{2}) |\Sigma|^{\frac{n-m-1}{2}}} \text{etr}\{-\frac{1}{2} \Sigma^{-1}(W+\Delta)\} (dW) (d\Phi)$$

と表現されることがわかる。上の式を W と Σ^{-1} について順次積分すると定理 2 の (ii) をえる。

F が $F_m(n_1, n_2; \Delta)$ に従うとき、 F^{-1} の分布が $F_m(n_2, n_1; \Delta^{-1})$ となることより、ただちに次の定理が得られる。

定理 3 $n_1 - m - 1 > 0$ とすれば、

$$(i) \quad E[F^{-1}] = \frac{n_2}{n_1 - m - 1} \Delta^{-1}$$

$n_1 - m - 3 > 0$ とすれば、

$$(ii) \quad E[F^{ij} F^{kl}] = \frac{n_2}{(n_1 - m)(n_1 - m - 1)(n_1 - m - 3)} \{ [n_2(n_1 - m - 2) + 2] \Delta^{ij} \Delta^{kl} + (n - m - 1) (\Delta^{jl} \Delta^{ik} + \Delta^{kj} \Delta^{il}) \}$$

$$(iii) \quad \text{Cov}(F^{ij}, F^{kl}) = \frac{n_2(n - m - 1)}{(n_1 - m)(n_1 - m - 1)(n_1 - m - 3)} \left[\frac{2}{n_1 - m - 1} \Delta^{ij} \Delta^{kl} + \Delta^{jl} \Delta^{ik} + \Delta^{kj} \Delta^{il} \right]$$

$$(iv) \quad E[F^{-1} A F^{-1}] = \frac{n_2}{(n_1 - m)(n_1 - m - 1)(n_1 - m - 3)} \{ [n_2(n_1 - m - 2) + 2] \Delta^{-1} A \Delta^{-1} + (n - m - 1) \{ \Delta^{-1} A \Delta^{-1} + \text{tr}(\Delta^{-1} A) \Delta^{-1} \} \}$$

ただし、 $\Delta^{-1} = (\Delta^{ij})$ 、 A は $m \times m$ の任意の行列とする。

§ 4 Beta identity 多変量 Beta 分布のモーメントをここでは、Beta identity を用いて求める。

定理 4 $m \times m$ の行列 $T=(T_{ij}(B, \Delta))$ とスカラー $g(B)$ が以下の条件を満たすと仮定する。

(i) $T_{ij}(B, \Delta) g(B)$ が領域

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(\rho_1, \rho_2) = \{B; 0 \leq B \leq \Delta, \|B\| \geq \rho_1 \geq 0, \|\Delta - B\| \geq \rho_2 \geq 0\}$$

でストークスの定理の条件を満たす。

(ii) $b_1(\mathfrak{R}) = \{B; B \geq 0, \|B\| = \rho_1\}$ 上において

$$\lim_{\rho_1 \rightarrow +0} \sup_{B \in b_1(\mathfrak{R})} \frac{|g(B)| \|T(B, \Delta)\|}{\rho_1^{1 - \frac{m n_1}{2}}} = 0$$

が成立する。

(iii) $b_2(\mathfrak{R}) = \{B; \Delta - B \geq 0, \|\Delta - B\| = \rho_2\}$ 上において

$$\lim_{\rho_2 \rightarrow +0} \sup_{B \in b_2(\mathfrak{R})} \frac{|g(B)| \|T(B, \Delta)\|}{\rho_2^{1 - \frac{m n_2}{2}}} = 0$$

が成立するとする。

そのとき、

$$E_B[g(B) \text{tr}(\Delta - B)^{-1} T] = E_B \left[\frac{2}{n_2 - m - 1} g(B) \text{tr}(DT) + \frac{2}{n_2 - m - 1} \text{tr} \left(\frac{\partial g(B)}{\partial B} T \right) \left(\frac{1}{2} \right) + \frac{n_1 - m - 1}{n_2 - m - 1} g(B) \text{tr}(B^{-1} T) \right]$$

が成り立つ。ただし、 $n = n_1 + n_2, D = ((1/2)(1 + \delta_{ij}) \partial / \partial B_{ij})$ とする。

定理 5 B が確率密度関数(2)を持つとする。

$$(i) \quad E[B] = \frac{n_1}{n} \Delta$$

$$(ii) \quad E[B_{ij} B_{kl}] = \frac{n_1}{n(n-1)(n+2)} \{ [n_1(n+1)-2] \Delta_{ij} \Delta_{kl} + n_2 (\Delta_{ji} \Delta_{ki} + \Delta_i \Delta_{kj}) \}$$

$$(iii) \quad \text{Cov}(B_{ij}, B_{kl}) = \frac{n_1 n_2}{n(n-1)(n+2)} \left[-\frac{2}{n} \Delta_{ij} \Delta_{kl} + \Delta_{ij} \Delta_{ik} + \Delta_{il} \Delta_{kj} \right]$$

$$(iv) \quad E[BAB] = \frac{n_1}{n(n-1)(n+2)} \left[\{n_1(n+1) - 2\} \Delta A \Delta + n_2 \{(\Delta A \Delta)^t + \text{tr}(\Delta A) \Delta\} \right]$$

ただし、 $\Delta = (\Delta_{ij})$, A は $m \times m$ の任意の行列とする。

Tan (1969) により、 $F \sim F_m(n_1, n_2; \Delta)$ ならば、 $\Delta (\Delta + F)^{-1} F \sim B_m(n_1, n_2; \Delta)$ となり、 $B \sim B_m(n_1, n_2; \Delta)$ ならば、 $\Delta (\Delta - B)^{-1} B \sim F_m(n_1, n_2; \Delta)$ となる。これより、 $F^{-1} + \Delta^{-1} = B^{-1}$ なる関係式が得られ、ただちに B の逆行列のモーメントが得られる。

定理6 $n_1 - m - 1 > 0$ の時

$$(i) \quad E[B^{-1}] = \frac{n-m-1}{n_1-m-1} \Delta^{-1}$$

$n_1 - m - 3 > 0$ の時

$$(ii) \quad E[B^{ij} B^{kl}] = \frac{n-m-1}{(n_1-m)(n_1-m-1)(n_1-m-3)} \left[\{(n-m)(n_1-m-3) + n_2\} \Delta^{ij} \Delta^{kl} + n_2 (\Delta^{jl} \Delta^{ik} + \Delta^{il} \Delta^{kj}) \right]$$

$$(iii) \quad \text{Cov}(B^{ij}, B^{kl}) = \frac{n_2(n-m-1)}{(n_1-m)(n_1-m-1)(n_1-m-3)} \left[\frac{2}{n_1-m-1} \Delta^{ij} \Delta^{kl} + \Delta^{il} \Delta^{kj} + \Delta^{il} \Delta^{ik} \right]$$

$$(iv) \quad E[B^{-1} A B^{-1}] = \frac{n-m-1}{(n_1-m)(n_1-m-1)(n_1-m-3)} \left[\{(n-m)(n_1-m-3) + n_2\} \Delta^{-1} A \Delta^{-1} + n_2 \{(\Delta^{-1} A \Delta^{-1})^t + \text{tr}(\Delta^{-1} A) \Delta^{-1}\} \right]$$

ただし、 $\Delta^{-1} = (\Delta^{ij})$, A は $m \times m$ の任意の行列とする。

§ 4 F の scale matrix の推定 次に、 $\hat{\Delta}(F)$ による Δ の推定問題を
損失関数

$$L(\hat{\Delta}, \Delta) = \text{tr}(\hat{\Delta} \Delta^{-1}) - \log \det(\hat{\Delta} \Delta^{-1}) - m \quad (5)$$

のもとで考える。不偏推定量 $\hat{\Delta}_0 = \{(n_2 - m - 1)/n_1\} F$ は αF
(α は定数) なる推定量の族の中で最良となることがわかる。
ここで、 $\hat{\Delta}(F) = \frac{n_2 - m - 1}{n_1} \{ F + (a / \text{tr} F^{-1}) I_m \}$ なる推定量を
考える。ただし、 a は非負の定数とする。定理 1 より、
次の補題を得ることができる。

補題 7 F が (1) の確率密度関数を持つとき、不等式

$$E\left[\frac{\text{tr} \Delta^{-1}}{\text{tr} F^{-1}} \right] \leq \frac{n_1 - m + 1}{n_2 - 2}$$

が成り立つ。ただし、等号成立は $m = 1$ の時のみ。

この補題を用いることで、次の定理がわかる。

定理 8 $0 < a < 2(m-1)(n_1 + n_2 - m - 1) / (n_1(n_2 - 2))$ のとき

$$\hat{\Delta}(F) = \frac{n_2 - m - 1}{n_1} \left(F + \frac{a}{\text{tr} F^{-1}} I_m \right)$$

は損失関数 (5) のもとで $\hat{\Delta}_0$ を一様に改良する。

References

- [1] Dawid, A. P. (1981). Some matrix-variate distribution theory: Notational considerations and a Bayesian application. *Biometrika*. **68** 265-274.
- [2] De Waal, D. J. (1970). Distributions connected with a multivariate Beta statistic. *Ann. Math. Statist.* **41** 1091-1095.
- [3] Haff, L.R. (1979). An identity for the Wishart distribution with applications. *J. of Multi. analysis.* **9** 531-544.
- [4] Khatri, C. G. (1970). A note on Mitra's paper " A density - free approach to the matrix variate beta distribution." *Sankhyā, Series A.* **32** 311-318.
- [5] Mitra, S. K. (1970). A density-free approach to the matrix variate Beta distribution. *Sankhyā, Series A.* **32** 81-88.
- [6] Muirhead, J. and Verathaworn, T. (1985). On estimating the latent roots of $\Sigma_1 \Sigma_2^{-1}$. P.R. Krishnaiah, ed., *Multivariate Analysis - VI.* 431-447.
- [7] Olkin, I. and Rubin, H. (1964). Multivariate Beta distributions and independence properties of the Wishart distribution. *Ann. Math. Statist.* **35** 261-269.
- [8] Perlman, M. D. (1977). A note on the matrix-variate F distribution. *Sankhyā, Series A.* **39** 290-298.
- [9] Tan, W. Y. (1969). Note on the multivariate and the generalized multivariate Beta distributions. *J. Amer. Statist. Assoc.* **64** 230-241.