数理解析研究所講究録
645巻 1988年 78-83

強従属定常過程の極限定理について

東京工大理　矢島美寛 (Yoshihiro Yajima)

§1. 序

有限フーリエ変換(以下FFTと略)は時系列解析において、基本的な統計量でありその漸近的性質は多くの著者により論じられている。(例えばBrillinger (1975) 第4章) しかし従来対象にされていった定常過程は、その自己共分散関数また高次のキュムラント関数が絶対収束性を満たす、観測値間の相関の弱い確率過程であった。

一方経済学・地球物理学等の分野においては、時間差が隔たっても、相関の低下が遅い時系列も数多く存在する。この様な時系列を解析するため、Granger and Joyeux (1980), Hosking (1981) によってfractional ARIMA modelが、またMandelbrot and Van Ness (1968) によりfractional Gaussian Noiseが提案されている。

本論では定常過程が両モデルを含む強従属

定常過程に従う場合の、FFTの極限定理について論じる。

§2. 定理

$\{X_t\}$は強定常過程で、$EX_t = C_x$ またすべてのモーメントが存在すると仮定する。スペクトル密度$f(\lambda)$は

(1) $$f(\lambda) = f^*(\lambda)/|1-e^{i\lambda}|^{2\alpha}, \quad -\pi < \lambda \leq \pi$$

とする。ここで$f^*(\lambda)$は正の連続関数とする。αは$0 < \alpha < 1/2$をみたす。したがって$\lambda \to 0$のとき$f(\lambda)$は無限大に発散し、これにちなみ$\{X_t\}$を強従属定常過程という。$f(\lambda)$は

$$\int_{-\pi}^{\pi} \log f(\lambda)\, d\lambda > -\infty$$

をみたすので、無限次数の移動平均表現

$$X_t - C_x = \sum_{j=0}^{\infty} \theta_j \varepsilon_{t-j}$$

が可能である。ここで$\{\varepsilon_t\}$は平均0分散σ_ε^2の無相関な確率変数列で、

$$\sum_{j=0}^{\infty} \theta_j z^j \neq 0, \quad |z| < 1$$

$$\sigma_\varepsilon^2 = \exp\{\int_{-\pi}^{\pi} \log 2\pi f(\lambda)\, d\lambda / 2\pi\}$$

$$2\pi f(\lambda)/\sigma_\varepsilon^2 = |\sum_{j=0}^{\infty} \theta_j e^{ij\lambda}|^2$$

が成立する(Doob(1953)第12章)。

ここでX_t $(t = 0, 1, \cdots, T-1)$を観測値、$h(t)$, $t \in [0, 1]$を有界変動実数値関数とする。$h(t)$をdata-taperとして用い、FFTを

$$d_T(\lambda) = \sum_{t=0}^{T-1} h(t/T) e^{-i\lambda t}$$

で定義する。また $Q_K^{\varepsilon}(t_1, t_2, \cdots, t_{K-1})$ を $\varepsilon_t, \varepsilon_{t+t_1}, \cdots, \varepsilon_{t+t_{K-1}}$ の K 次同時キュムラントとする。Q_K^{ε} には絶対収束性.

(2) $\sum_{t_1, \cdots, t_{K-1}=-\infty}^{\infty} | Q_K^{\varepsilon}(t_1, t_2, \cdots, t_{K-1}) | < \infty$

を仮定する. このとき次の定理を得る

定理

(i) $2\lambda_j, \lambda_j \pm \lambda_k \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$ $1 \leq j < k < J$ とする. このとき $d_T(\lambda_j)$, $j = 1, 2, \cdots, J$ は互いに漸近的に独立で、$N^c(0, 2\pi T H_2 f(\lambda_j))$ を極限分布にもつ。ここで $N^c(\mu, \sigma^2)$ は平均 μ 分散 σ^2 の複素正規分布とし、

$$H_k = \int_0^1 h(t)^k dt \quad , \quad k = 1, 2, \cdots$$

である。

(ii) $\lambda = \pi \pmod{2\pi}$ とする。このとき $d_T(\lambda)$ は $N(0, 2\pi T H_2 f(\lambda))$ を極限分布にもつ. また (i) の $d_T(\lambda_j)$, $j = 1, 2, \cdots, J$ とは互いに漸近的に独立である.

(iii) $\lambda = 0 \pmod{2\pi}$ とする。このとき $d_T(\lambda)$ は $N(T H_1 c_x, T^{1+2d} \widetilde{\sigma}^2)$ を極限分布にもつ。

ここで

$$\tilde{\alpha}^2 = \frac{2\pi f^*(0)\Gamma(1-2d)}{\Gamma(d)\Gamma(1-d)} \int_0^1\int_0^1 h(x)h(y)|x-y|^{2d-1}dxdy$$

とする。また(i)の$d_T(\lambda_j)$, $j=1,2,\cdots,J$, (ii)の$d_T(\lambda)$ ($\lambda=\pi$, mod2π)とは互いに漸近的に独立である.

注意

(i) $Q_K^X(t_1,\cdots,t_{K-1})$を$X_t, X_{t+t_1},\cdots,X_{t+t_{K-1}}$の$K$次同時キュムラントとする。$Q_K^X$が(2)式をみたす場合については、類似の結果が既に証明されている.しかし強従属定常過程においては、二次および高次のスペクトル密度は有界ではなく、Q_K^Xはもはや(2)式を満足しない。しかし定理は『$d_T(\lambda)$ ($\lambda=0$, mod 2π)の漸近分散を$2\pi TH_2 f(\lambda)$から$T^{1+2d}\tilde{\alpha}^2$に変更すれば、従来の結果(Brillinger (1975),定理4.4.2)が依然として成立する。』ことを保証する。

(ii) 定理はfractional ARIMA及びfractional Gaussian Noise両モデルに適用できる。今

$$\phi(z) = 1-\phi_1 z-\cdots-\phi_p z^p$$

$$g(z) = 1-g_1 z-\cdots-g_q z^q$$

とおく. $\phi(z)=0$, $g(z)=0$は共通根をもたずさらに

$$\phi(z) \neq 0 \quad , g(z) \neq 0 \, , \, |z| \leq 1$$

とする。$\{X_t\}$がスペクトル密度

$$f(\lambda; d, \phi, g) = c\, |g(e^{i\lambda})|^2 / |\phi(e^{i\lambda})(1 - e^{i\lambda})^d|^2$$

を持つときfractional ARIMAと言う。ここで $0 < d < 1/2$, $c > 0$ とする。明らかに $f(\lambda; d, \phi, g)$ は (1) 式の $f(\lambda)$ の形式に表現できる.

一方 $f(\lambda; \alpha)$ を

$$f(\lambda; \alpha) = c\, F(\alpha) f_0(\alpha)$$

で定義する. ここで

$$f_0(\lambda; \alpha) = (1 - \cos\lambda) \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\lambda + 2k\pi|^{-1-2\alpha}$$

$$F(\alpha) = \{ \int_{-\infty}^{\infty} (1 - \cos\lambda) |\lambda|^{-1-2\alpha} d\lambda \}^{-1}$$

とし、αは $1/2 < \alpha < 1$ を満たす。$f(\lambda; \alpha)$ をスペクトル密度にもつ正規定常過程をfractional Gaussian Noiseという。$d = \alpha - 1/2$ とおけば $f(\lambda; \alpha)$ は (1) 式の $f(\lambda)$ の形式に表現可能なことが示されている. (Geweke and Porter-Hudak (1983, 定理1))。したがって $\{X_t\}$ が正規過程でなくても、$d_T(\lambda)$ は漸近正規性をもつ。

References

Brillinger, D.R.:*Time Series: Data Analysis and Theory*. New York:Holt, Rinehart and Winston 1975

Doob, J.L.:*Stochastic processes*. New York: Wiley 1953

Geweke, J.L. & Porter-Hudak, S.:The estimation and application of long-memory time series models. *J. Time Series Analysis* 4, 221-238(1983).

Granger, C.W.J. & Joyeux, R.:An introduction to long-memory time series models and fractional differencing. *J Time Sereis Analysis* 1, 15-29(1980)

Hosking, J.R.M.:Fractional differencing. *Biometrika* 68, 165-176(1981)

Mandelbrot, B.B. & Van Ness, J.W.:Fractional Brownian motions, fractional noise and applications. *SIAM Rev.* 10, 422-437(1968)