数理解析研究所講究録
647巻 1988年 161-168

弾性弦の非線型振動について

東京理大 理 細谷正憲
(Masanori HOSOYA)

次の方程式について考える。

$$
\begin{cases}
(1)\quad u_{tt} - M\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)\Delta u + |u|^\alpha u + \lambda u_t = f(x,t) & x \in \Omega,\ 0<t \\
(2)\quad u(x,t)|_\Gamma = 0, & 0<t \\
(3)\quad u(x,0) = u_0(x),\quad u_t(x,0) = u_1(x), & x \in \Omega,
\end{cases}
$$

ここに，Ωは$\mathbb{R}^n$のb.d.d. domain，$\Gamma = \partial\Omega$はsmooth boundary，$\alpha \geqq 0$，$\lambda > 0$，$T > 0$である。$M(\cdot)$は弦の歪みを表わす。M，α，fに関して，次の仮定を設ける。

(A.1) $M(\cdot) \in C^1[0,\infty)$, $M(r) \geqq m_0 > 0$ for $r \geqq 0$.

(A.2) $M'(r) \geqq 0$ for $r \geqq 0$.

(A.3) $0 \leqq \alpha \leqq \frac{2}{n-2}$ $(n \geqq 3)$, $0 \leqq \alpha < \infty$ $(n = 1, 2)$.

(A.4) $f \in L^1(0,\infty; H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0,\infty; L^2(\Omega))$.

<u>Theorem 1. (Existence).</u> (A.1), (A.3), (A.4) を仮定する。初期値は，$u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$，$u_1 \in H_0^1(\Omega)$ にとる。もし，初期エネルギー $E(0)$ と $\|f\|_{L^1(0,\infty: L^2(\Omega))}$ がある意味で十分小ならば，(1)-(3)の解が一意に存在し，(i) $u \in L^\infty(0,\infty: H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))$ (ii) $u_t \in L^\infty(0,\infty: H_0^1(\Omega))$ & (iii) $u_{tt} \in L^\infty(0,\infty: L^2(\Omega))$ を満す。

解の漸近挙動に関しては，次の結果が得られる。

<u>Theorem 2. (Decay estimate I).</u> (A.1) − (A.4) を仮定する。もし，$\delta_0(t) \equiv \left(\int_t^{t+1} \|f(s)\|^2 ds\right)^{1/2} \leqq C_0 e^{-\theta_0 t}$，$(C_0, \theta_0 > 0)$ ならば全エネルギーに対し，$E(t) \leqq Ce^{-\theta t}$，$(C, \theta > 0)$ が成り立つ。

<u>Theorem 3. (Decay estimate II).</u> $f \equiv 0$ の場合。(A.1) − (A.3) を仮定する。もし，$\lambda < 2\sqrt{m_0}$ ならば，次の評価が成り立つ。

$$E(0)e^{-2\lambda t} \leqq E(t) \leqq \left[\left(1+\frac{\lambda}{2\sqrt{m_0}}\right)\Big/\left(1-\frac{\lambda}{2\sqrt{m_0}}\right)\right]E(0)e^{-\lambda t}.$$

<u>記号</u>：$E(t) = \frac{1}{2}\left\{\|u_t(t)\|^2 + \overline{M}(\|\nabla u(t)\|^2) + \frac{2}{\alpha+2}\|u(t)\|_{L^{\alpha+2}}^{\alpha+2}\right\}$

$\overline{M}(s) = \int_0^s M(r)\,dr$，$\|\cdot\|$ は L^2−ノルム。

次に，

$$u_{tt} - M\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)\Delta u + g(u_t) = f(x,t) \qquad (4)$$

$$x \in \Omega,\quad 0 < t$$

及び

$$u_{tt} - M\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)\Delta u + |u|^\alpha u - \Delta u_t = f(x,t) \qquad (5)$$

$$x \in \Omega,\quad 0 < t$$

について考える。初期条件，境界条件は，同様に (3) 及び (2) とする。$g(u_t)$ は nonlinear damping term の場合を考える。主目的は，local，global solvability そして解の漸近的挙動を調べることである。紙面の余白も少なくなってきたので，これらの結果は当日紹介することにする。

注1) Theorem 2 の仮定に出て来た条件に番号を付けて置く.

(A.5) $\delta_0(t) \equiv \left(\int_t^{t+1} \|f(s)\|^2 ds\right)^{1/2} \leqq C_0 e^{-\theta_0 t} \quad (C_0, \theta_0 > 0)$

先に (5) について, すなわち次の方程式について考える。

$$\begin{cases} (5)\quad u_{tt} - M\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)\Delta u + |u|^\alpha u - \Delta u_t = f(x,t) & x \in \Omega,\ 0 < t \\ (2)\quad u(x,t)|_\Gamma = 0 & 0 < t \\ (3)\quad u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x), & x \in \Omega. \end{cases}$$

f に関して, 次の仮定を設ける。

(A.6) $f \in L^1(0,\infty; H_0^1(\Omega)) \cap L^2(0,\infty; L^2(\Omega))$

注2) (A.4) との違いは, $f \in L^2$ となること ((A.4) では $f \in L^\infty$)

<u>Theorem 4 (Existence)</u> (A.1), (A.3), (A.6) を仮定する。初期値は, $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, $u_1 \in H_0^1(\Omega)$ にとる。このとき (5)(2)(3) の解が一意に存在し, Theorem 1 における (i)—(iii) を満す。

注3) Theorem 4 においては, 初期値は小さくなくてよい。

解の漸近挙動に関しては，次の結果が得られる．

<u>Theorem 5 (Decay estimate III)</u> (A.1), (A.3), (A.5), (A.6) を仮定する。このとき全エネルギーに対し

$$E(t) \leqq C_2 e^{-\theta_2(t)}, \quad (C_2, \theta_2 > 0 ; \ m_0, \theta_0 \text{ に depend})$$

が成り立つ．

次に (4) について，すなわち次の方程式について考える。

$$
\begin{cases}
(4) \quad u_{tt} - M\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)\Delta u + g(u_t) = f(x, t) & x \in \Omega, \ 0 < t \\
(2) \quad u(x, t)|_\Gamma = 0 & 0 < t \\
(3) \quad u(x, 0) = u_0(x), \ u_t(x, 0) = u_1(x), & x \in \Omega
\end{cases}
$$

ここでは，g として次の2つの場合を考える。

(a) $g(s) = |s|^\alpha s \quad , \alpha > 0$

(b) $g(s) = |s|^\alpha s + \lambda s \ , \quad \alpha > 0, \ \lambda > 0$

f に関しては，次の仮定を設ける。

(A.7) $f \in L^2(0, \infty ; H_0^1(\Omega))$, $f' = \frac{\partial f}{\partial t} \in L^1(0, \infty ; L^2(\Omega))$

(A.8) $f \in L^1(0, \infty ; H_0^1(\Omega))$, $f' = \frac{\partial f}{\partial t} \in L^1(0, \infty ; L^2(\Omega))$

解の存在に関しては，次の結果が得られる。

Theorem 6 (Existence) (a) $g(s)=|s|^\alpha s\ (\alpha>0)$ の場合.
(A.1), (A.3), (A.6 を仮定する. 初期値は $u_0\in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$, $u_1\in H_0^1(\Omega)\cap L^{2(\alpha+1)}(\Omega)$ にとる. このとき $T_0>0$ が存在し.

(i) $u\in L^\infty(0,T_0: H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega))$

(ii) $u_t\in L^\infty(0,T_0: H_0^1(\Omega))$

(iii) $u_{tt}\in L^\infty(0,T_0: L^2(\Omega))$

(iv) $u_t\in L^{\alpha+2}(Q)$ 　　ここで $Q=\Omega\times(0,T_0)$

を満す (4)(2)(3) の解が一意に存在する.

注4) (i)(ii)(iii) は Theorem 1 における (i)(ii)(iii) で ∞ を T_0 にしたもの.

Theorem 7 (Existence) (b) $g(s)=|s|^\alpha s+\lambda s\ (\alpha>0,\ \lambda>0)$ の場合
(A.1), (A.3), (A.8) を仮定する. 初期値は $u_0\in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$, $u_1\in H_0^1(\Omega)\cap L^{2(\alpha+1)}(\Omega)$ にとる. もし初期エネルギー $E(0)$ と $\|f\|_{L^1(0,\infty;L^2(\Omega))}$ がある意味で十分小ならば, (4)(2)(3) の解が一意に存在し, Theorem 1 における (i)(ii)(iii) を得る.

最後に Theorem 4 の略証を述べる.

Proof of Theorem 4 (方針のみ)

Galerkin 法を用いる.

$\{w_j\}$ を $-\Delta w_j = \lambda_j w_j$ in Ω, $w_j = 0$ on Γ $(j=1,2,\cdots)$ を満す $H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$ の basis とする.

① $\quad u_m(t) = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t) w_j$

を

$$
\begin{cases}
② \quad (u_m''(t), w) + M(a(u_m(t)))a(u_m(t), w) \\
\qquad\qquad + (|u_m(t)|^{\alpha} u_m(t), w) = f(t, w) \quad {}^{\forall} w \in V_m \\
③ \quad u_m(0) = u_{0m} \xrightarrow{s} u_0 \quad \text{in } H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega) \\
④ \quad u_m'(0) = u_{1m} \xrightarrow{s} u_1 \quad \text{in } H_0^1(\Omega)
\end{cases}
$$

の解とする.

<u>記号</u>: $a(u,v) \equiv \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} dx$, $a(u) \equiv a(u,u)$

$(\cdot,\cdot)$: L^2 内積

$V_m \equiv$ linear hull of $\{w_1, \cdots, w_m\}$

$\overline{M}(s) \equiv \int_0^s M(r)\,dr \geqq m_0 s$

u_m に関して次の Lemma が得られる.

<u>Lemma 1</u> ⑤ $\quad \|u_m'(t)\| \leqq C_1$

⑥ $\quad \|u_m(t)\|_{H_0^1} \leqq C_2$

⑦ $\quad \int_0^t \|u_m'(s)\|_{H_0^1} ds \leqq C_3$

⑧ $\|u_m(t)\|_{L^{\alpha+2}} \leqq C_4$

∵ ②式に $w = u_m'(t)$ を代入する.

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{d}{dt}\|u_m'(t)\|^2 + \overline{M}(a(u_m(t))) + \frac{2}{\alpha+2}\|u_m(t)\|_{L^{\alpha+2}}^{\alpha+2}\right\} + \|u_m'(t)\|_{H_0^1}^2 \leqq \|f(t)\|\cdot\|u_m'(t)\|$$

この式の両辺を積分し.

$$\frac{1}{2}\left\{\|u_m'(t)\|^2 + m_0\|u_m(t)\|_{H_0^1}^2 + \frac{\alpha}{\alpha+2}\|u_m(t)\|_{L^{\alpha+2}}^{\alpha+2}\right\} + \int_0^t \|u_m'(s)\|^2 ds \leqq C(u_0, u_1) + \int_0^t \|f(s)\|\cdot\|u_m'(s)\| ds$$

あとは Granwall の不等式を利用する.

<u>Lemma 2</u> ⑨ $\|\Delta u_m(t)\| \leqq C_5$

⑩ $\int_0^\infty \|\Delta u_m(s)\|^2 ds \leqq C_6$

∵ $w = -\Delta u_m(t)$ in ② として同様に計算する.

<u>Lemma 3</u> ⑪ $\|u_m'(t)\|_{H_0^1} \leqq C_7$

⑫ $\int_0^\infty \|\Delta u_m'(s)\| ds \leqq C_8$

∵ $W = -\Delta u_m'(t)$ in ② として同様に計算する.

<u>Lemma 4</u> ⑬ $\int_0^\infty \|u_m''(s)\|^2 ds \leqq C_9$

∵ $w = u_m''(t)$ in ② として同様に計算し. Schwarz の不等式を用いる。

「註記」

細谷氏はこの講演の後，不幸にして病床に臥すこととなり，この記録の作成時点で原稿を書けない病状である。ここに載せたものは，御本人の講演予稿を古谷氏のノートによって補ったものである。細谷氏の速やかな御回復をお祈り申し上げます。（高村）