数理解析研究所講究録
647巻 1988年 1-12

粘性解の方法による特異摂動問題への応用

中央大学　石井　仁司（Hitoshi Ishii）
早稲田大学　小池　茂昭（Shigeaki Koike）

§0　序

Crandall と Lions [4]（及び [3]）により、最近導入された粘性解（viscosity solution）の概念を用いて、特異摂動問題のうち、いくつかの large deviation 型の問題の解の漸近挙動に関する結果を述べる。

§1　定義といくつかの命題

Ω は $\mathbb{R}^n$ の有界領域、その境界 $\partial\Omega$ は滑らか、Σ を $\partial\Omega$ の開部分集合、F を $\Omega\cup\Sigma\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^{n\times n}$ から $\mathbb{R}$ への関数とし、次の非線形二階偏微分方程式の境界値問題を考える。

$$
(1.1)\quad \begin{cases} F(x,u,Du,D^2u)=0 & \text{in } \Omega \\ u-h=0 \ \text{ or } \ F(x,u,Du,D^2u)=0 & \text{on } \Sigma \end{cases}
$$

但し、h は Σ から $\mathbb{R}$ への関数とする。

また、関数 $u : \Omega\cup\Sigma \longrightarrow \mathbb{R}\cup\{-\infty,\infty\}$ に対して、

$$u^*(x)=\lim_{r\downarrow 0}\sup\{u(y)\mid y\in\Omega\cup\Sigma\ ,\ |y-x|\le r\}$$

$$u_*(x)=\lim_{r\downarrow 0}\inf\{u(y)\mid y\in\Omega\cup\Sigma\ ,\ |y-x|\le r\}$$

とおく。次に粘性解の定義を述べる。

<u>定義</u> (i)関数 $u:\Omega\cup\Sigma\longrightarrow\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$が、(1.1)の粘性sub解であるとは、任意の$x\in\Omega\cup\Sigma$に対し、$u^*(x)<+\infty$かつ、任意の$\varphi\in C^2(\Omega\cup\Sigma)$に対し、$u^*-\varphi$が$y\in\Omega\cup\Sigma$で極大値をとる時、

$$\begin{cases} y\in\Omega \text{ ならば、} F_*(y,u^*(y),D\varphi(y),D^2\varphi(y))\le 0 \\ y\in\Sigma \text{ ならば、} u^*(y)-h^*(y)\le 0 \text{ 又は、} F_*(y,u^*(y),D\varphi(y),D^2\varphi(y))\le 0 \end{cases}$$

が成り立つ事をいい、

(ii)関数 $u:\Omega\cup\Sigma\longrightarrow\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ が、(1.1)の粘性super解であるとは、任意の$x\in\Omega\cup\Sigma$に対し、$u_*(x)>-\infty$かつ、任意の$\varphi\in C^2(\Omega\cup\Sigma)$に対し、$u_*-\varphi$が$y\in\Omega\cup\Sigma$で極小値をとる時、

$$\begin{cases} y\in\Omega \text{ ならば、} F^*(y,u_*(y),D\varphi(y),D^2\varphi(y))\ge 0 \\ y\in\Sigma \text{ ならば、} u_*(y)-h_*(y)\ge 0 \text{ 又は、} F^*(y,u_*(y),D\varphi(y),D^2\varphi(y))\ge 0 \end{cases}$$

が成り立つ事をいい、

(iii)関数 $u:\Omega\cup\Sigma\longrightarrow\mathbb{R}$が、(1.1)の粘性解であるとは、$u$が(1.1)の粘性sub解かつ、粘性super解である事をいう。

<u>注意</u> $\Sigma=\phi$ の時は、(1.1)の粘性解を $F(x,u,Du,D^2u)=0$ in Ω の粘性解という。粘性sub(又は、super)解についても同様。

次に、2つの命題を証明なしに述べる。

<u>命題1.1</u> 各$\varepsilon>0$に対し、関数$F_\varepsilon:\Omega\cup\Sigma\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^{n\times n}\longrightarrow\mathbb{R}$ があり、u_εを(1.1)のFをF_εに代えた問題の粘性sub(resp. super)解とし、

$$u(x)=\limsup_{\delta\downarrow 0}\{u_\varepsilon(y)\mid 0<\varepsilon<\delta,\ y\in\Omega\cup\Sigma,\ |y-x|<\delta\}$$

$$F(x,r,p,\xi)=\liminf_{\delta\downarrow 0}\{F_\varepsilon(y,s,q,\eta)\mid 0<\varepsilon<\delta,\ (y,s,q,\eta)\in \Omega\cup\Sigma\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^{n\times n},\ |y-x|<\delta,\ |q-p|<\delta,\ \|\eta-\xi\|<\delta\}$$

とする。但し、$(x,r,p,\xi)\in\Omega\cup\Sigma\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^{n\times n}$ とする。

(resp. lim sup と lim inf を入れ代える。) u が、$\Omega\cup\Sigma$ 上で局所有界ならば、u は(1.1)の粘性 sub (resp. super)解である。

<u>注意</u> 証明は、[2]と[8]を参照。

<u>命題1.2</u> 連続関数 $H:\overline{\Omega}\times\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ に対し、u と v を各々次の問題の粘性 sub, super 解とする。

$$(1.2)\quad\begin{cases}H(x,Du)=0 & \text{in }\Omega\\ u-h=0 \text{ or } H(x,Du)=0 & \text{on }\partial\Omega\end{cases}$$

h は、$\partial\Omega$ 上の連続関数, u を $\overline{\Omega}$ 上リプシッツ連続、各 $x\in\overline{\Omega}$ に対し、$p\longrightarrow H(x,p)$ が凸関数とし、更に、$H(x,D\psi(x))<0$ in $\overline{\Omega}$ を満たす $\psi\in C^1(\overline{\Omega})$ があるならば、$u\leq v$ on $\overline{\Omega}$ が成り立つ。

<u>注意</u> 証明は、[8]を参照。

<u>§2 ある境界値問題</u>

Γ を $\partial\Omega$ の開部分集合で空でないとする時、各 $\varepsilon>0$ に対し、次の境界値問題を考える。

$$(2.1)\quad\begin{cases}-\frac{\varepsilon^2}{2}a_{ij}u^\varepsilon_{x_ix_j}+b_iu^\varepsilon_{x_i}=0\quad\text{in }\Omega\end{cases}$$

$$\begin{cases} \qquad\qquad\qquad u^\varepsilon = 1 & \text{on } \Gamma \\ \qquad\qquad\qquad u^\varepsilon = 0 & \text{on } \partial\Omega\setminus\Gamma \end{cases}$$

但し、係数 $a=(a_{ij})$, $b=(b_i)$ には、次の仮定をする。

(2.2) $\quad a_{ij}, b_i \in C^2(\overline{\Omega}) \quad i,j=1,2,\cdots n$, かつ、

(2.3) $\quad a_{ij}\xi_i\xi_j \geq \theta|\xi|^2 \quad \text{in } \Omega$

が、任意の $\xi=(\xi_i)\in\mathbb{R}^n$ に対して成り立つ正数 θ がある。

(2.1)は、ある確率微分方程式の解が"窓"Γから脱出する確率が満たす方程式であり、確率論を用いてFleming[6]が、解 u^ε の $\varepsilon\downarrow 0$ の時の漸近挙動を調べており、その際、b に対して、次の仮定を用いた。

(2.4) 関数 $x(\cdot)\in H^1_{loc}([0,\infty);\mathbb{R}^n)$ が、$x(t)\in\overline{\Omega}$ $(t\geq 0)$ ならば、$\int_0^\infty |\dot{x}(t)-b(x(t))|^2dt = +\infty$ となる。

ここで、関数 $L:\overline{\Omega}\times\mathbb{R}^n\longrightarrow[0,\infty)$ を次の様に決める。

$$L(x,p)^2 = a^{ij}(x)p_ip_j \qquad (x,p)\in\overline{\Omega}\times\mathbb{R}^n$$

但し、$(a^{ij}(x)) = a(x)^{-1}$ とする。更に、関数 $I:\Omega\longrightarrow[0,\infty)$ を次の様に定義する。

$$\begin{aligned} I(x) = \inf\Big\{\tfrac{1}{2}\int_0^T L(x(t),\dot{x}(t)-b(x(t)))^2dt \ \Big|\ &{}^\forall T>0, \\ &{}^\forall x(\cdot)\in H^1(0,T;\mathbb{R}^n),\ x(0)=x,\ x(T)\in\Gamma \\ &x(t)\in\Omega\ \ (t\in[0,T])\Big\} \end{aligned}$$

<u>定理2.1</u> (2.2)~(2.4) を仮定し、各 $\varepsilon>0$ に対し、(2.1) の解 $u^\varepsilon\in C^2(\overline{\Omega}\setminus\partial\Gamma)$ で、Ω 上で $0\leq u^\varepsilon\leq 1$ を満たすものに

対し、次の漸近挙動が成り立つ。

$$-\varepsilon^2 \log u^\varepsilon(x) \longrightarrow I(x) \qquad (\varepsilon \searrow 0)$$

但し、$\Omega\cup\Gamma$ 上、局所一様収束である。

<u>注意</u> (i)同様の結果は[6]の他、εに依存しない$W^{1,\infty}$評価をする方法で、Evans と Ishii[5]によって得られている。ここでは、より少ない評価と粘性解の比較定理だけで証明する。

(ii)定理2.1の仮定を満たすu^εは、存在する。

<u>定理の証明</u> $v^\varepsilon(x)=-\varepsilon^2\log u^\varepsilon(x)$とおくと、$v^\varepsilon$は次式を満足する。

$$(2.5)\quad \begin{cases} -\frac{\varepsilon^2}{2}a_{ij}v^\varepsilon_{x_ix_j}+\frac{1}{2}a_{ij}v^\varepsilon_{x_i}v^\varepsilon_{x_j}+b_iv^\varepsilon_{x_i}=0 & \text{in } \Omega \\ v^\varepsilon=0 \quad \text{on } \Gamma \\ v^\varepsilon(x)\longrightarrow +\infty \quad (x\rightarrow \partial\Omega\setminus\overline{\Gamma}) \end{cases}$$

v^εに対し、次の評価が得られる。(詳しくは、[9]参照)

<u>補題2.2</u> 次の様な関数$v\in C(\Omega\cup\Gamma)$が存在する。

$$\begin{cases} 0\le v^\varepsilon(x)\le v(x) \quad (x\in\Omega\cup\Gamma) \\ v^\varepsilon=0 \quad \text{on } \Gamma \end{cases} \qquad \varepsilon\in(0,1)$$

次に、関数$w_\varepsilon:\Omega\cup\Gamma\rightarrow\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$と$z_\varepsilon:\overline{\Omega}\rightarrow\mathbb{R}$を

$$w_\varepsilon(x)=\sup\{v^\delta(y)\mid 0<\delta<\varepsilon,\ y\in\Omega\cup\Gamma,\ |y-x|<\varepsilon\}$$

$$z_\varepsilon(x)=\inf\{v^\delta(y)\mid 0<\delta<\varepsilon,\ y\in\Omega\cup\Gamma,\ |y-x|<\varepsilon\}$$

とし、 $w(x)=\lim_{\varepsilon\downarrow 0} w_\varepsilon(x)$

$z(x)=\lim_{\varepsilon\downarrow 0} z_\varepsilon(x)$ とおく。

定義より、$z_\varepsilon \le z \le w \le w_\varepsilon$ on $\Omega \cup \Gamma$、更に w は $\Omega \cup \Gamma$ 上上半連続、z は $\overline{\Omega}$ 上、下半連続である。又、補題2.2より、w, z は、Γ で連続であり、$w = z = 0$ on Γ となる。

次に、v^ε は、$-\frac{\varepsilon^2}{2} a_{ij} u_{x_i x_j} + \frac{1}{2} a_{ij} u_{x_i} + b_i u_{x_i} = 0$ in Ω の粘性解だから、命題1.1より、w は、$\frac{1}{2} a_{ij} u_{x_i} u_{x_j} + b_i u_{x_i} = 0$ in Ω の粘性sub解である。方程式の形から、w は $\Omega \cup \Gamma$ 上でリプシッツ連続になる事がわかる。又、定義から I は Ω 上でリプシッツ連続である。そこで、w と I の $\overline{\Omega}$ 上への連続的拡張を改めて、w, I と書くことにする。この w と I に対して、$\partial\Omega$ 上の連続関数 h で、$h = 0$ on Γ, $\max\{w, I\} \le h$ on $\partial\Omega$ を満たすものを1つ固定する。この h に対し、次の補題を得る。証明は、[5]と[8]を参照。

<u>補題2.3</u>　I は、次の境界値問題の粘性解である。

$$(2.6)\quad \begin{cases} \frac{1}{2} a_{ij} u_{x_i} u_{x_j} + b_i u_{x_i} = 0 & \text{in } \Omega \\ u - h = 0 \quad \text{or} \quad \frac{1}{2} a_{ij} u_{x_i} u_{x_j} + b_i u_{x_i} = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

また、$x \in \partial\Omega \setminus \Gamma$ に対し、$v^\varepsilon(x) = +\infty$ とおいて、v^ε を $\overline{\Omega}$ 上に拡張しておくと v^ε は、次式の粘性super解になる。

$$(2.7)\quad \begin{cases} -\frac{\varepsilon^2}{2} a_{ij} u_{x_i x_j} + \frac{1}{2} a_{ij} u_{x_i} u_{x_j} + b_i u_{x_i} = 0 & \text{in } \Omega \\ u - h = 0 \quad \text{or} \quad -\frac{\varepsilon^2}{2} a_{ij} u_{x_i x_j} + \frac{1}{2} a_{ij} u_{x_i} u_{x_j} + b_i u_{x_i} = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

故に、命題1.1より z は、(2.6) の粘性super解になる。
また、w は、(2.6)の粘性sub解になる。

次に仮定(2.4)の同値な条件を述べる。証明は、[1]と[9]を参照。

<u>補題2.3</u>　(2.4)の必要十分条件は、次式を満たす$\varphi \in C^1(\overline{\Omega})$が存在する事である。　$b_i \varphi_{x_i} \leq -1$　on $\overline{\Omega}$

この補題より、十分小さい$\delta > 0$に対し、$\psi = \delta\varphi$とおくと、$\frac{1}{2}a_{ij}\psi_{x_i}\psi_{x_j} + b_i\psi_{x_i} \leq \delta(\frac{\delta}{2}a_{ij}\varphi_{x_i}\varphi_{x_j} - 1) < 0$ on $\overline{\Omega}$が成り立つので、命題1.2が適用できて、$w \leq I \leq z$ on $\overline{\Omega}$が得られる。故に、wとzの定義より、$w = I = z$ on $\Omega \cup \Gamma$となる。又、w_εとz_εの各々w, zへの単調収束性から、v^εが、$\Omega \cup \Gamma$上で、局所一様にIに収束する事が示せる。QED.

<u>§3　漸近挙動の精密化</u>　各$\varepsilon > 0$に対し、次の方程式を考える。

(3.1)
$$\begin{cases} \max\limits_{1 \leq k \leq m}\{-\frac{\varepsilon^2}{2}a_{ij}^k u^\varepsilon_{x_i x_j} + \lambda u^\varepsilon\} = 0 & \text{in } \Omega \\ u^\varepsilon = 1 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

但し、λは正数であり、係数a_{ij}^kには、次の仮定をする。

(3.2)　$a_{ij}^k \in C^2(\overline{\Omega})$　　$i,j = 1,2,\cdots n$, $k = 1,2,\cdots,m$

(3.3)　$a_{ij}^k \xi_i \xi_j \geq \theta|\xi|^2$　　$k = 1,2,\cdots m$

が、すべての$\xi = (\xi_i) \in \mathbb{R}^n$に対して成り立つ正数$\theta$がある。

ここで、次の記号を導入する。

$$\mathbb{K} = \{k : [0,\infty) \longrightarrow \{1,2,\cdots,m\} \mid k(\cdot) : \text{可測}\}$$

$$\mathbb{A}=\{y:[0,\infty)\to\mathbb{R}^n \mid y(\cdot):\text{可測}\}$$

$$\Delta=\{\alpha:\mathbb{K}\to\mathbb{A} \mid k,\hat{k}\in\mathbb{K}\text{ が } k(s)=\hat{k}(s)\ a.e.\ 0\le s\le t \text{ ならば、} \alpha[k](s)=\alpha[\hat{k}](s)\ a.e.\ 0\le s\le t\}$$

次に、関数 $J:\overline{\Omega}\to[0,\infty)$ を次の様に決める。

$$J(x)=\inf_{\alpha\in\Delta}\sup_{k\in\mathbb{K}}\{\int_0^{\tau_x}\left(\frac{1}{2}a_{ij}^{k(t)}(x(t))\alpha_i[k](t)\alpha_j[k](t)+\lambda\right)dt \mid \dot{x}_i(t)=a_{ij}^{k(t)}(x(t))\alpha_j[k](t),\ x(0)=x\}$$

この時、[10]の結果の精密化として、次の定理が得られる。

<u>定理3.1</u>　(3.2)、(3.3)の仮定の下で、(3.1)の解 $u^\varepsilon\in C^2(\overline{\Omega})$ に対し、次の漸近挙動が成り立つ。

(3.4)　$$|-\varepsilon\log u^\varepsilon-J|\le C\sqrt{\varepsilon}\quad \text{on } \overline{\Omega}$$

但し、C は ε に依存しない正数である。

<u>注意</u>　(i) 上の仮定の下で、(3.1) の C^2－解の存在は、[11]で示されている。

(ii) $m=1$ の場合に、$-\varepsilon\log u^\varepsilon$ が $\varepsilon\downarrow 0$ の時、J に一様収束するという結果は、Varadhan[12], VentcelとFreidlin[13]及び、[5]で得られているが、(3.4)の精密化は得られていない。

<u>定理の証明</u>　$v^\varepsilon=-\varepsilon\log u^\varepsilon$ とおくと、v^ε は次式を満たす。

(3.5)　$$\begin{cases}\min\limits_{1\le k\le m}\{-\frac{\varepsilon}{2}a_{ij}^k v^\varepsilon_{x_ix_j}+\frac{1}{2}a_{ij}^k v^\varepsilon_{x_i}v^\varepsilon_{x_j}-\lambda\}=0 & \text{in } \Omega\\ v^\varepsilon=0 & \text{on } \partial\Omega\end{cases}$$

バリヤー関数を用いると、次式を満たすリプシッツ連続関数

vが存在する。

(3.6) $\begin{cases} 0 \le v^\varepsilon \le v & \text{on } \overline{\Omega} \\ v = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \qquad \varepsilon \in (0,1)$

また、Jに関しては、次の事実が示される。([10]を参照。)

<u>補題3.2</u> Jは、$\overline{\Omega}$上でリプシッツ連続であり、次式の粘性解である。

(3.7) $$\min_{1\le k\le m}\left\{\frac{1}{2}a_{ij}^k u_{x_i}u_{x_j} - \lambda\right\} = 0 \quad \text{in } \Omega$$

まず、$v^\varepsilon - J \le C\sqrt{\varepsilon}$を示す。$\Phi(x,y) = v^\varepsilon(x) - \gamma J(y) - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}|x-y|^2$とおく。但し、$\gamma^2 = 1 + \mu\sqrt{\varepsilon}$とし、$\mu$は後で、固定する正数である。$\Phi$が、$\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}$上の最大値を$(\bar{x},\bar{y}) \in \overline{\Omega}\times\overline{\Omega}$でとったとする。

十分大きなμに対し、$(\bar{x},\bar{y}) \in \Omega\times\Omega$とならない事を示す。$(\bar{x},\bar{y}) \in \Omega\times\Omega$とすると、全ての$k \in \{1,2,\cdots,m\}$に対し、

(3.8) $$0 \le -\frac{\varepsilon}{2}a_{ij}^k(\bar{x})\Phi_{x_ix_j}(\bar{x},\bar{y}), \quad \Phi_{x_i}(\bar{x},\bar{y}) = 0$$

が成立する。また、(3.5)より、次の等式を満たす$\tilde{k} \in \{1,2,\cdots,m\}$がある。$-\frac{\varepsilon}{2}a_{ij}^{\tilde{k}}v_{x_ix_j}^\varepsilon + \frac{1}{2}a_{ij}^{\tilde{k}}v_{x_i}^\varepsilon v_{x_j}^\varepsilon - \lambda = 0 \quad \text{at } \bar{x}$

故に、(3.8)を計算すると、次の様になる。

(3.9) $$0 \le -\frac{2}{\varepsilon}a_{ij}^{\tilde{k}}(\bar{x})(\bar{x}-\bar{y})_i(\bar{x}-\bar{y})_j + \lambda + \sqrt{\varepsilon}\,a_{ii}^{\tilde{k}}(\bar{x})$$

一方、Jが(3.7)の粘性super解だから次式を得る。

(3.10) $$\frac{2}{\varepsilon}a_{ij}^{\tilde{k}}(\bar{y})(\bar{x}-y)_i(\bar{x}-\bar{y})_j - \lambda\gamma^2 \ge 0$$

(3.9)より、$|\bar{x}-\bar{y}| \le C_0\sqrt{\varepsilon}$となる$\varepsilon$に依存しない定数$C_0$

がある。この事実と(3.9)+(3.10)より、次式を得る。

$$\lambda(\gamma^2-1) \le \frac{2}{\varepsilon}\{\tilde{a}^{\varepsilon}_{ij}(\bar{y}) - \tilde{a}^{\varepsilon}_{ij}(\bar{x})\}(\bar{x}-\bar{y})_i(\bar{x}-\bar{y})_j + \mu\sqrt{\varepsilon}\,\tilde{a}^{\varepsilon}_{ii}(\bar{x})$$
$$\le C_1\sqrt{\varepsilon}$$

但し、C_1はεに依存しない様にとれるのでγ^2の定義より、$\mu > C_1$ととれば、上の式は矛盾してしまう。故に、$\mu > C_1$とした時、$(\bar{x}, \bar{y}) \in \partial(\Omega \times \Omega)$となる。Jの定義と、(3.6)より、

$$\Phi(\bar{x}, \bar{y}) \le C_2|\bar{x}-\bar{y}| - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}|\bar{x}-\bar{y}|^2$$

となる、εに依存しない定数C_2がとれる。故に、

$$0 \le \sup_{\Omega}\{v^{\varepsilon} - \gamma J\}$$
$$\le \sup_{\Omega\times\Omega} \Phi \le C_2|\bar{x}-\bar{y}| - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}|\bar{x}-\bar{y}|^2$$

となり、$|\bar{x}-\bar{y}| \le C_2\sqrt{\varepsilon}$を得るので、次式が成立する。

(3.11) $$\sup_{\Omega}\{v^{\varepsilon} - \gamma J\} \le C_2^2\sqrt{\varepsilon}$$

(3.11)とγの定義を用いると、任意の$x \in \bar{\Omega}$に対して、次の様になる。

(3.12) $$v^{\varepsilon}(x) - J(x) = v^{\varepsilon}(x) - \gamma J(x) + (\gamma-1)J(x)$$
$$\le C_2^2\sqrt{\varepsilon} + (\gamma-1)J(x)$$
$$\le C_3\sqrt{\varepsilon}$$

但し、C_3は、εに依存しない正数である。

同様に$\Psi(x,y) = \sqrt{1-\mu\sqrt{\varepsilon}}\,J(x) - v^{\varepsilon}(y) - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}|x-y|^2$に対して、上に述べてきたのと同様の議論により、(3.12)と逆の不等式が導けるので(3.4)が示せる。　　　　　Q.E.D.

§ 4 References

[1] M. Bardi, An asymptotic formula for the Green's function of an elliptic operator, preprint.

[2] G. Barles and B. Perthame, Discontinuous solutions of deterministic optimal stopping time problems, preprint.

[3] M. G. Crandall, L. C. Evans and P. L. Lions, Some properties of viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations, Trans. Amer. Math. Soc. 282 (1984), 487-502.

[4] M. G. Crandall and P. L. Lions, Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations, Trans. Amer. Math. Soc. 277 (1983), 1-42.

[5] L. C. Evans and H. Ishii, A PDE approach to some asymptotic problems concerning random differential equations with small noise intensities, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Lin. 2 (1985), 1-20.

[6] W. H. Fleming, Exit probabilities and stochastic optimal control, Appl. Math. Optim. 4 (1978), 329-346.

[7] H. Ishii, A simple, direct proof of uniqueness for solutions of Hamilton-Jacobi equations of eikonal type, to appear in Proc. Amer. Math. Soc.

[8] H. Ishii, A boundary value problem of the Dirichlet type

for Hamilton-Jacobi equations, preprint.

[9] H. Ishii and S. Koike, Remarks on elliptic singular perturbation problems in preparation.

[10] S. Koike, An asymptotic formula for solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman equations, Nonlinear Anal. Theor. Meth. Appl. 11 (1987), 429-436.

[11] P. L. Lions and N. S. Trudinger, Linear oblique derivative problems for uniformly elliptic Hamilton-Jacobi-Bellman equation, Math. Z. 191 (1986), 1-15.

[12] S. R. S. Varadhan, On the behavior of fundamental solution of the heat equation with variable coefficients, Comm. Pure Appl. Math. 20 (1967), 431-455.

[13] A. D. Ventcel and M. I. Freidlin, On small random perturbations of dynamical systems, Russian Math. Surveys, 25 (1970), 1-56.