数理解析研究所講究録
648巻 1988年 145-150

ある6次方程式の数値解法

韓国・柳韓工業専門大学／朴　鳳圭(Bong-kyu Park)
京都大学数理解析研究所／一松　信(Sin Hitotumatu)

1．方法

6次方程式

(1) $$A(x)=a_6x^6+a_5x^5+\dots+a_1x+a_0=0$$

を解くために、まず平行移動 $x\to x+a_5/6a_6$ を行い、x^5 の係数を 0にする。

次にこれが

(2) $$(x^3+\alpha_1x+\beta_1)(x^3+\alpha_2x+\beta_2)$$

と因数分解できるものと仮定する。 変換した後で x^6 の係数を1にした方程式の係数を $b_4,\dots,b_0$ とするとき、α_i は b_4,b_2 から、β_i は b_3,b_0 から、共に2次方程式を解いて求められる。 それから(2) の2個の括弧内を0と置いた2個の3次方程式を解けばよい。 3実根のときも、三角関数を使えばこれらの演算はすべて（余分の初期情報などが不要という意味で）決定的な算法である。

現在では、代数方程式はNewton法などの数値解法によって容易に解けるので、古典的な Tartaglia-Cardanoの解法などは時代遅れで不必要だといわれているようである。 しかし初期値を人間が工夫しなければならないのでは、計算機向きとはいえない。 今や計算機が高速になったため、多少複雑な公式であっても、全く自動的に解けるのならば、その方が有用になってきた。
(Hermite-Kleinらによる 5次方程式を楕円関数を使って解く方法(例えば[3])なども、見直す必要があろう。)

以下この方法の問題点と実例を述べる。

<u>2．問題点</u>　条件(2) が厳密に成立するためには、条件式

(3)
$$\alpha_2\ \beta_1 + \alpha_1\ \beta_2 = b_1$$

が必要である。これは余りにも特殊過ぎる。この条件は、6個の根の内3個ずつの和が同一ということである。実係数ですべての根が複素数というような場合には、実変換だけでこの条件を満たすようにすることは、最初から不可能である。また一次分数変換により条件(3) を満たすように変換することは可能だが、8次方程式になるので、(1) を直接に解く方が楽である。

しかしながらもしも α_i, β_i のうまい組合せにより、(3) が近似的に成立するものならば、(2) の解を<u>逐次近似の初期値に採用</u>してはどうだろうか？　数学は一般化指向が本筋なのかもしれないが、実用上では有効範囲が限られても、うまく行けば儲ものという種類の算法を拒否することはないと信ずる。

(3) の両辺の差を δ とおけば、(1) から x^5 の項を消去した方程式

(4)
$$B(x) = x^6 + b_4 x^4 + \ldots + b_1 x + b_0 = 0$$

は、(2)を $-\delta x$ に等しいと置いた方程式と同値である。

δ が小さければ、(2)=0 の一つの解 ξ に対する(4) の近似解は、2次以上の項を無視して

$$\xi - \delta \xi / B'(\xi)$$

となる。これは ξ を初期値としたNewton法の第 1段と同じである。

実際には後記の実例のように、各根から個々にNewton法を適用したのでは、同一の根が重複して現れることが多い。Bairstow(Hitchcock) 法も同様である。

これらは大域的な収束性に欠ける。Durand-Kerner 法によれば、ほとんどの場合すべての根が求められる。

しかしもともと「大域的な収束性をもつDurand-Kerner 法の初期値に対して、これだけの手間を掛ける必要があるかどうかは別の問題であろう。

3．実験例　実例として、「スピングラスの代数方程式」の n=3の場合について、変数を消去してえられた次の方程式を扱った。 その導出は[1] に述べた。

元の方程式に対して$x = x_0$ 以外の変数を消去し、特殊解 x=1,1/3を除くと、X=3x として６次方程式

(5)　$$77X^6-688X^5+2509X^4-(42872/9)X^3+4935X^2-2616X+543=0$$

をうる。 この方程式は、４実根と１対の複素根をもつ。 ２個の複素根と２番目に小さい実根との和が、他の３実根の和との差が 0.064程であり、近似的に条件(3) が成立するように見える。 しかしこれを直接に適用した結果は思わしくなかった。 その理由はx^5の係数を０にすると低次の係数が著しく小さくなり、0.064 が「十分に小さい」とはいえないせいらしい。

変換 T=2/(X-1)-2を施すと、(5) は

(6)　$$T^6-30T^4+72T^3-96T^2+18T+26=0$$

となる。 これに適用すると、比較的うまくいった（表１）。

但し実根はすべて求められたが、Newton法でもBairstow法でも、１対の複素根は(2) の解からは求められなかった。―すべて実根または実根の対に収束してしまった。

Durand-Kerner 法によると、うまく解がえられた（表２）。 これに使ったプログラムを表３に掲げる。

— — — — — — — —

プログラムに関する注意. これはHP-85 のBASICで, "方言"的性格が強い。
@は区切り符号(多くは :)，170の#は≠，∧は累乗, 出力中の;は同一行。
収束判定用のEは倍長(12桁)ならこれでよいが, 単長の場合は 0.0001 (10^{-4}) 程度にしないと収束しない.
初期値はテスト用として入力するようにしたが, 3次方程式の解を直接セットするように組み合せる方がよい.

表 1　(6) に対する解

$\alpha_1, \alpha_2 = -15 \mp \sqrt{321} = -32.91647287, \quad 2.916472867$

$\beta_1, \beta_2 = 36 \pm \sqrt{1270} = 71.63705936, \quad 0.362940638$

注. α_i, β_i の選択は (3)の左辺がb に近い方を採る。

(2)=0の解	Newton法の結果	反復回数	Xの値
-6.6141750	-6.57435579740	4	0.562779965403
3.6326479	4.24956154493	7	1.32002245048
2.9815271	0.864403949676	10	1.69822554191
-0.1237946	-0.385578818797	6	2.23883409317
0.0618973	0.922984560779	*	1.55760144206
±i 1.7111301	±i 1.39294538426		∓i 0.265724412436

注1. 上の 3個は $x^3+\alpha_1 x+\beta_1=0$の、下の 3個は $x^3+\alpha_2 x+\beta_2=0$の解。

2. 最下の 2個は複素根の実部と虚部。 複素根での* は、左の初期値からでは期待される中央の値が出なかったことを示す。

3. 倍長 (十進12桁) で、収束判定は $\epsilon = 10^{-7}$。

* * * * * * * * * * * *

表 2　Durand-Kerner 法による結果

6	0.922984560779 +-I 1.39294538426
1	-6.57435579737
2	-0.385578818797
3	0.864403949674
4	4.24956154493

注、左上の 6は反復回数 ($\epsilon = 10^{-7}$)。 最上行は複素根。 その下 4行は実根。 その初期値は、表 1左列の実根を小さい方から順に入力した。

表3. DURAND-KERNER 法のプログラム

```
10    REM DURAND-KERNER
20    DIM P(4),T(4),D(4)
30    P(0)=-30@ P(1)=72@ P(2)=-96@ P(3)=18@ P(4)=26
40    E=0.0000001@ N=0
50    INPUT T0,T1
60    FOR I=1 TO 4
70    INPUT T(I)
80    NEXT I
90    S=0
100   FOR K=1 TO 4
110   X=T(K)@ Q=X
120   FOR I=0 TO 4
130   Q=Q*X+P(I)
140   NEXT I
150   Q=Q/((X-2*T0)*X+T0∧2+T1∧2)
160   FOR I=1 TO 4
170   IF I#K THEN Q=Q/(X-T(I))
180   NEXT I
190   D(K)=Q@ S=S+ABS(Q)
200   NEXT K
210   B0=T0@ B1=T1
220   A0=B0@ A1=B1
230   FOR I=0 TO 4
240   GOSUB 500
250   A0=C0+P(I)@ A1=C1
260   NEXT I
270   D0=A0@ D1=A1
280   A0=0@ A1=T1*2
290   FOR I=1 TO 4
300   B0=T0-T(I)
310   GOSUB 500
320   A0=C0@ A1=C1
330   T(I)=T(I)-D(I)
340   NEXT I
350   REM COMPLEX DIVISION
360   Q=C0∧2+C1∧2@ A1=-C1
370   B0=D0@ B1=D1
380   GOSUB 500
390   D0=C0/Q@ D1=C1/Q
400   S=S+ABS(D0)+ABS(D1)
410   T0=T0-D0@ T1=T1-D1
420   N=N+1
430   IF S E  THEN GOTO 90
440   PRINT N;T0;"+-I";T1
450   FOR I=1 TO 4
460   PRINT I;T(I)
470   NEXT I
480   STOP
490   REM SUBROUTINE COMP. MULT.
500   C0=A0*B0-A1*B1
510   C1=A0*B1+A1*B0
520   RETURN
530   END
```

4．二三の注意　(1) 表3のプログラムは、1対の複素根を持つことが既知な代数方程式に対して、Durand-Kerner 法を実数の範囲の計算のみで実行するように工夫したものである（但しこれは既知の工夫であり、著者達の創意ではない）。

もっともさらに改良の余地がある。　複素根 T0+iT1 の計算に複素数の積のサブルーチンを使ったが、$B(x)$に $x=a+ib$ を代入した値は

$B(x)$を $x^2-2a+a^2+b^2$ で割った剰余 $ux+v$

に $x=a+ib$ を代入すればよい。　また分母の積は虚部ibが同一なので

$\prod_j (u_j+ib)=c_1+ic_0$ は $\prod_j (x+u_j) \bmod (x^2+b^2)=d_1 x+d_0$ から $d_0=c_0$, $d_1=bc_1$

として計算できる。　実質的には同一だが、少し演算回数が少ない。

(2) 実係数の代数方程式の実根の個数は、Sturm の定理によって求められる。

この折の互除法の計算には不安定性が伴うが、整係数の方程式をREDUCEのような数式処理システムで（有理数あるいは長大整数として）扱えば、困難はない。

(3)　3実根を持つ 3次方程式 $x^3-\alpha x+\beta=0$ $(\alpha>0)$ を三角関数によって解くには、三角関数の3倍角公式により、次のようにするとよい。　但し実質的には、これは古典的な解法を使い、複素数の3乗根を極座標形で計算したのと同値である。

$\rho=2\sqrt{\alpha/3}$,　$A=-\beta/(\alpha/3)^{3/2}$　(3実根の条件は $|A|\leqq 1$) とおくと

$\theta=\arccos A$,　$x=\rho\cdot\cos\theta/3$,　$\rho\cdot\cos(\theta+2\pi/3)$, $\rho\cdot\cos(\theta+4\pi/3)$

5．結び　ただ1例のみでは不十分であるが、数値解の初期値として、試みる価値のある方法と思う。　なお講演当日の予稿に計算誤り（本稿では訂正済）があったことをお詫びする。

[参]　[1] 一松　信：スピングラスの代数方程式について，数理解析研究所講究録－数式処理1987－に掲載予定。

[2]　Bong-kyu Park & Sin Hitotumatu, On a numerical method for a certain algebraic equation of 6 degree, will appear.

[3]　Felix Klein, Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade, Teubner 1884; 英訳 Cambridge, 1914.