数理解析研究所講究録
648 巻 1988 年 20-38

ＤＥ変換公式の最適性について　ＩＩ

一橋大学　経済学部　杉原正顕(Masaaki Sugihara)

本稿においては，ＤＥ変換公式の最適性に関係する次の２つの話題を扱う．
《第一の話題》　“従来のＤＥ公式を越えるＤＥ公式”
《第二の話題》　“ＩＭＴ変換の反復によって得られる公式は，何故ＤＥ公式を越えられないか”

1　《第一の話題》　“従来のＤＥ公式を越えるＤＥ公式”

1．1　はじめに

よく知られているように，積分問題 $\int_0^1 f(x)dx$ に用いる標準的ＤＥ変換：

$$\varphi_{DE}^{A}(t)=\frac{1}{2}\tanh(A\sinh(t))+\frac{1}{2}$$

において，Ａをπ/2より大きくすると，変換後の被積分関数

$$f(\varphi_{DE}^{A}(t))\varphi_{DE}^{A}{}'(t)$$

は減衰が急になるものの，この変換に基つくＤＥ公式（変換 $\varphi_{DE}^{A}(t)$＋台形公式）を用いた時の数値積分誤差は大きくなってしまう．では，$\varphi_{DE}^{\pi/2}(t)$ を用いたＤＥ公式以上に効率のよい数値積分公式（従来のＤＥ公式を越える数値積分公式）は考えられないのであろうか？　ここでは，この問いに対して一つの解答を与える．

まず初めに，最も基本的な intrinsic error（関数１を数値積分した時の誤差）について詳細に研究し，intrinsic error については，従来のＤＥ変換を用いるＤＥ公式（ＤＥ変換＋台形公式）より，次のような“ＤＥ変換”（$\frac{d}{dt}\psi_{DE\text{-}X}^{A}(t)$ が二重指数関数的に減衰するのでこのように呼んでも差しつかえないと思われる）

$$\psi_{DE\text{-}X}^{A}(t)=\int_{-\infty}^{t}\exp(-2A\cosh(s))ds \Big/ \int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-2A\cosh(s))ds$$

$$(\ A > \pi/2\ )$$

を用いるＤＥ公式（“ＤＥ変換”＋台形公式）の方がより有効であることを示す．さらには，この“ＤＥ変換” $\psi_{DE\text{-}X}^{A}$ を用いるＤＥ公式がある意味で究極の公式であることを証明する．次に，“ＤＥ変換” $\psi_{DE\text{-}X}^{A}$ を用いるＤＥ公式を，種々

の積分問題に適用し，その効率および実用性を従来のＤＥ公式と比較検討する．

以下の節の構成は次のとおりである．まず，**１．２　従来のＤＥ公式の intrinsic error** において，従来のＤＥ公式の intrinsic error の評価を復習し，従来のＤＥ変換 φ_{DE}^{A} を用いるＤＥ公式の場合には，Ａを$\pi/2$より大きくすると，Ａ＝$\pi/2$の場合に比べて intrinsic error が大きくなってしまうことを見る．次に，**１．３　“ＤＥ変換” ψ_{DE-X}^{A} を用いたＤＥ公式** において，１．２における intrinsic error の評価を踏まえて，従来のＤＥ変換を用いるＤＥ公式よりも intrinsic error を小さくできる公式を模索し，“ＤＥ変換” ψ_{DE-X}^{A} を用いるＤＥ公式を導入する．さらに，この“ＤＥ変換”を用いるＤＥ公式がある意味で究極の公式であることを示す．**１．４　“ＤＥ変換”を用いたＤＥ公式の効率および実用性** においては，数値実験を通して，“ＤＥ変換”を用いるＤＥ公式の効率および実用性を，従来のＤＥ公式と比較する．最後の**１．５　まとめと今後の課題** では，まとめと今後の課題について述べる．

１．２　従来のＤＥ公式の intrinsic error

従来のＤＥ公式の intrinsic error の評価を復習する．

次の Stenger の補題を用いる．

Stenger の補題 ［４］

領域　$D_d=\{z\in\mathbb{C}\,|\,|\mathrm{Im}\ z|<d\}$　で正則な関数 f が次の条件を満足するとする．

(i)
$$N_d(f)=\lim_{c\to d-0}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x+ci)|+|f(x-ci)|dx<+\infty$$

（但し，$0\leq c<d$ を満足する任意の c について右辺は存在するとする）

(ii) $0\leq c<d$ を満足する任意の c に対して

$$\lim_{|x|\to\infty}\int_{-c}^{+c}|f(x+yi)|dy=0$$

このとき，任意の $h>0$ に対して

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx-h\sum_{j=-\infty}^{\infty}f(jh)\right|\leq\frac{\exp(-\frac{2\pi d}{h})}{1-\exp(-\frac{2\pi d}{h})}N_d(f)$$

まず，上記の Stenger の補題を用いて，従来のＤＥ公式の intrinsic error を次のように評価していく．（以下，記述を簡単にするために

$$\frac{d}{dt}\varphi_{DE}^{A}(t) = \frac{(A/2)\cosh(t)}{\cosh^2(A\sinh(t))}$$

の代わりに w(z) という記号を用いる）

$$|\text{intrinsic error}| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} w(x)dx - h\sum_{j=-N/2}^{N/2} w(jh)\right|$$

$$\le \left|\int_{-\infty}^{+\infty} w(x)dx - h\sum_{j=-\infty}^{\infty} w(jh)\right| + h\sum_{|j|>N/2}|w(jh)|$$

$$\le \frac{\exp(-\frac{2\pi d}{h})}{1-\exp(-\frac{2\pi d}{h})} N_d(f) + h\sum_{|j|>N/2}|w(jh)|$$

（ここで，d は w(z) が Stenger の補題にいう条件を満足するような d の値）

$$\le C_1\exp(-\frac{2\pi d}{h}) + C_2\, h\exp\{-\frac{A}{2}\exp(\frac{N}{2}h)+\frac{N}{2}h\} \qquad (1.1)$$

（ここで，C_1，C_2は，N および h には無関係な定数．但し， h<1 と仮定しておく）

次に，式（1.1）の第一項の指数部と第二項の指数部が等しくなるように h をとる．つまり，等式：

$$-\frac{2\pi d}{h} = -\frac{A}{2}\exp(\frac{N}{2}h)+\frac{N}{2}h$$

が成立つように h をとる．このように決定された h を h(N;d,A) と記すことにする．この h = h(N;d,A) を式（1.1）に代入して，intrinsic error の評価：

$$|\text{intrinsic error}| \le C\exp(-\frac{2\pi d}{h(N;d,A)}) \qquad (1.2)$$

を得る．

Remark 上に記した intrinsic error の評価から分かるように，intrinsic error は，A（ＤＥ変換に含まれるパラメーター＝ w(z) の実軸上での減衰度）と d（ w(z) が Stenger の補題にいう条件を満足するような d の値）に依存して決まる．特に，A，d が大きければ大きいほど intrinsic error は小さくなる．

今，さらに，上記の評価を進め，従来のＤＥ公式（ＤＥ変換 φ^{A}_{DE} ＋台形公式）においては A を $\pi/2$ より大きくすると効率が悪くなることを示す．そのためにd が A にどのように依存するかを調べる．それには，

$$w(z) = \frac{(A/2)\cosh(z)}{\cosh^2(A\sinh(z))}$$

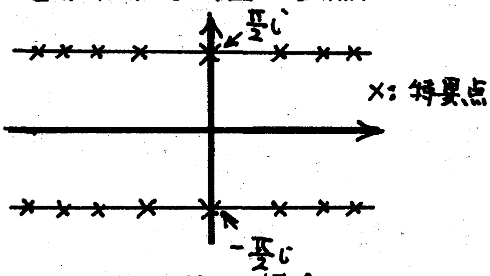
の特異点を調べればよい．簡単な計算から，w(z) は次の２種類の特異点：

(1) $\sin^{-1}\left(\frac{(2k+1)\pi}{2A}\right)$ (k: integer)

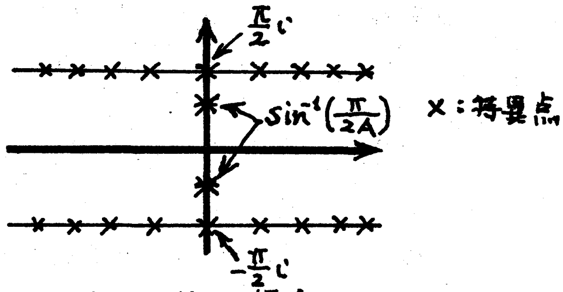
(2) $\cosh^{-1}\left(\frac{(2l+1)\pi}{2A}\right) + \frac{(2m+1)\pi}{2}i$ (l,m: integer)

（但し，k は $\sin^{-1}(*)$ が実数になるような整数値のみ，l は $\cosh^{-1}(*)$ が実数になるような整数値のみをとるとする）

を持つことがわかる（図１参照）．



A≦$\pi/2$ の場合



A＞$\pi/2$ の場合

図１．１ w(z) の特異点

このことから，次の d の A に対する依存性：

A≦$\pi/2$ ならば d としては d＝$\pi/2-\varepsilon$（εは任意の正数）なる値が取れ，

A＞$\pi/2$ ならば d としては d＝$\sin(\pi/(2A))-\varepsilon$（$\varepsilon$は任意の正数）なる値しか取れないこと

が分かる（ここで，$\sin(\pi/(2A)) < \pi/2$ に注意）．この結果から，h(N;A,d) の定義方程式 (1.1) および intrinsic error の評価式 (1.2) に注意すると

intrinsic error は A=$\pi/2$ の場合に最小になり， A>$\pi/2$ の場合には A=$\pi/2$ の場合に比べ大きくなる

ことが分かる．これは，ここで示したかったこと：“従来のＤＥ公式（ＤＥ変換 φ^{A}_{DE} ＋台形公式）においては A を $\pi/2$ より大きくすると効率が悪くなる”に他ならない．

1.3　“DE変換” $\psi^{A}_{DE\text{-}X}(t)$を用いたDE公式

1.2で述べたことから分かるように，DE公式の場合，A を $\pi/2$ より大きくすると公式の効率が悪くなるのは，$w(z)=\frac{d}{dz}\varphi^{A}_{DE}(z)$ において A を $\pi/2$ より大きくすると d の値が $\pi/2-\varepsilon$（εは任意の正数）より小さくなってしまうためである．従って，DE公式より効率のよい公式を作るためには，そのようなことのない関数 $w(z)$ を探す必要がある．では，そのような関数（$\frac{d}{dz}\varphi^{A}_{DE}$ と同様に実軸で $|x|\longrightarrow\infty$ のとき $\exp(-A\exp(|x|))$ の order で減衰し，かつ，A が大きくなっても d の値が $\pi/2-\varepsilon$（εは任意の正数）のままで変わらない関数）はあるのか？ 少々模索してみれば，“そのような関数”として次の関数が見つかる．

$$\exp(-2A\cosh(z))$$

（この関数が“そのような関数”であることは殆ど自明であるので，その証明は略す） かくして，次の“DE変換”：

$$\psi^{A}_{DE\text{-}X}(t)=\int_{-\infty}^{t}\exp(-2A\cosh(s))ds\ \Big/\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-2A\cosh(s))ds$$

が得られる（これが，1.1で述べた“DE変換”である）．

この節の初めに述べたことから，この“DE変換”を用いたDE公式の方が，従来のDE変換を用いたDE公式よりも intrinsic error を小さくできることは，少なくとも理論的には明かである．後に，数値実験を通して，実際に，この“DE変換”を用いたDE公式の方が，従来のDE変換を用いたDE公式よりも intrinsic error を小さくできることを示す．

今，さらに，この“DE変換”を用いたDE公式より intrinsic error を小さくできるような公式は考えられないかを考察する．1.2で述べた intrinsic error の評価から容易に分かるように，“DE変換”を用いたDE公式より intrinsic error を小さくできるような公式を作るためには，実軸上で任意の A に対して $\exp(-A\exp(|x|))$ の order より速く減衰し，かつ，d の値を $\pi/2-\varepsilon$（εは任意の正数）ととれる関数を見つければよい．しかし，次の定理から分かるように，そのような関数は 0 以外に存在しないのである．

定理１．１（二重指数関数的減衰の極限性）

関数 f が次の３条件：

(i) $f(z)$ は D_d で解析的で $\overline{D}_d$ で連続．

(ii) $f(z)$ は $\overline{D}_d$ で有界：$|f(z)| \le M$

(iii) $f(x)=O\left(\exp(-m(|x|)\exp(\frac{\pi}{2d}|x|))\right)$ $(|x|\longrightarrow+\infty,\ x\in R)$

（ここで $m(x)$ は $m(x)\longrightarrow+\infty$ $(x\longrightarrow+\infty)$ なる任意の実数値関数）

を満足するならば，$f(z)\equiv 0$

従って，“ＤＥ変換”を用いたＤＥ公式より intrinsic error を小さくできるような公式を作ることはできないのである．この意味で“ＤＥ変換”を用いたＤＥ公式は，究極の公式であると言える．

１．４　“ＤＥ変換”を用いたＤＥ公式の効率および実用性

ここでは，種々の積分問題に，従来のＤＥ変換 φ_{DE}^{A} を用いたＤＥ公式と，本稿で導入した“ＤＥ変換” ψ_{DE-X}^{A} を用いたＤＥ公式を適用して，その数値積分誤差を比較する．

今，関数 f を数値積分しようとする場合を考える．ＤＥ公式は，元来，無限和

$$h\sum_{j=-\infty}^{\infty} f(\varphi(jh))\varphi'(jh)$$

を次のような有限和：

$$h\sum_{j=N_-}^{N_+} f(\varphi(jh))\varphi'(jh)$$

で置き換えて得られる公式であるから，有限和のとり方（ N_-，N_+ のとり方）によって数値積分誤差は，大きく変わり得る．従って，有限和のとり方を定め，刻み幅が h のときのＤＥ公式の数値積分誤差を定義しなければ，公式の比較はできない．文献［７］などでは，N_-，N_+ のとり方として，discretization error：

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(\varphi(x))\varphi'(x)dx - h\sum_{j=-\infty}^{\infty} f(\varphi(jh))\varphi'(jh)\right|$$

と trimming error（上記の無限和を有限和に置き換えたために生ずる誤差）：

$$h \sum_{j<N_-,\, j>N_+} |f(\varphi(jh))\varphi'(jh)|$$

が等しくなるようにとり，そのようにした時の誤差をＤＥ公式の数値積分誤差としている．このようにして得られる誤差は，一般に，積分を有限和で近似する時の誤差の最小値となっており，それをＤＥ公式の数値積分誤差と考えるのは，ごく自然なことである．ここでも，この考え方を踏襲することにする．しかし，discretization error と trimming error が等しくなるような N_-，N_+ を計算して，数値積分誤差を求めるのは大変な手間を要するので，ここでは，便宜的に，次のようにして，ＤＥ公式の数値積分誤差の近似値を求め，それをＤＥ公式の数値積分誤差と見なすことにした．

【 ＤＥ公式の数値積分誤差の近似値の求め方】

まず，N_-，N_+ を十分大きくとって $h \sum_{j=N_-}^{N_+} f(\varphi(jh))\varphi'(jh)$ を計算し，

discretization error:

$$\varepsilon = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(\varphi(x))\varphi'(x)dx - h \sum_{j=N_-}^{N_+} f(\varphi(jh))\varphi'(jh) \right|$$

を求める．次に，和 $h \sum_{j=N_-}^{N_+} f(\varphi(jh))\varphi'(jh)$ のうち，次の不等式：

$$h|f(\varphi(jh)\varphi'(jh)| > \varepsilon/2$$

を満足する項のみについて和をとり，そのときの数値積分誤差：

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(\varphi(x))\varphi'(x)dx - h \sum_{h|f(\varphi(jh))\varphi'(jh)|>\varepsilon/2} f(\varphi(jh))\varphi'(jh) \right|$$

を刻み幅が h のときのＤＥ公式の数値積分誤差の近似値とする．ここで，数値積分に要する関数評価回数（分点総数）は，和：

$$h \sum_{h|f(\varphi(jh))\varphi'(jh)|>\varepsilon/2} f(\varphi(jh))\varphi'(jh)$$

を計算するのに要した関数評価回数である．

以下，数値実験では，従来のＤＥ変換 φ_{DE}^{A} ，および，“ＤＥ変換” ψ_{DE-X}^{A}（A の値＝0.5，1.0，1.5，2.0，3.0，4.0）を用いたＤＥ公式を，次の６つの関数に適用して数値積分誤差を調べた．

$f_1(x) = 1$

$f_2(x) = x$

$f_3(x) = \exp(x)$

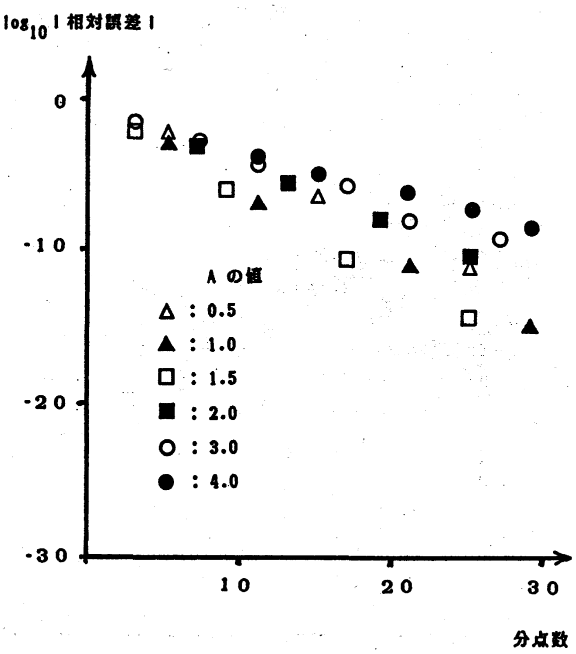
$f_4(x) = \sqrt{x}$

$f_5(x) = \log(x)$

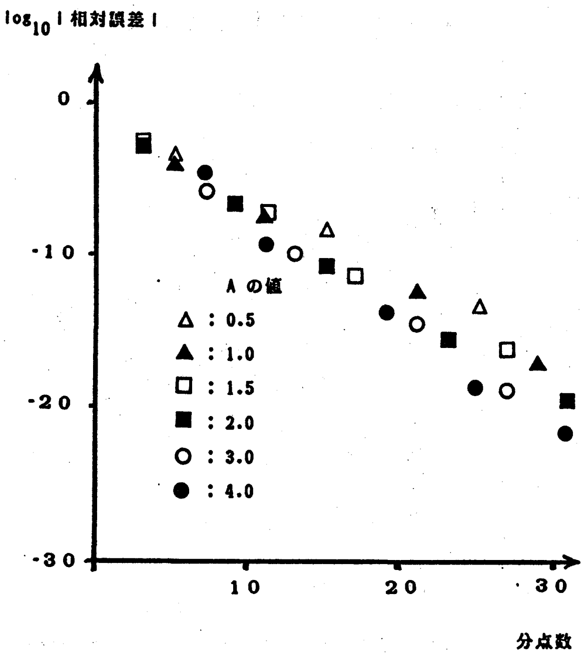
$f_6(x) = 1/\sqrt{x}$

（関数の特異性に注意）

数値実験の結果を図１．２に示す．

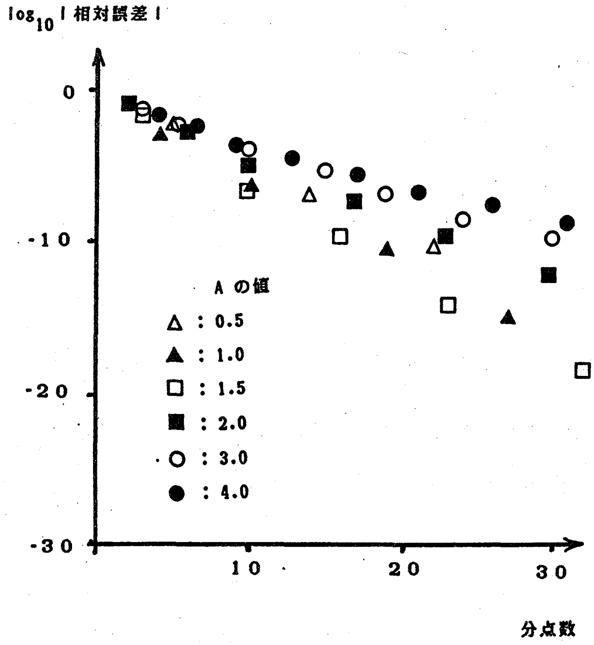


(1)　φ^{A}_{DE} を用いたＤＥ公式を $f_1(x)=1$ に適用したときの誤差

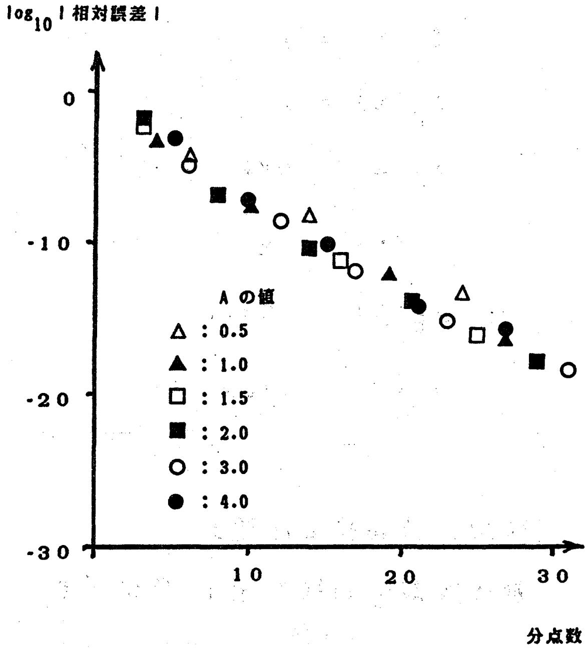


(2)　$\psi^{A}_{DE\text{-}X}$ を用いたＤＥ公式を $f_1(x)=1$ に適用したときの誤差

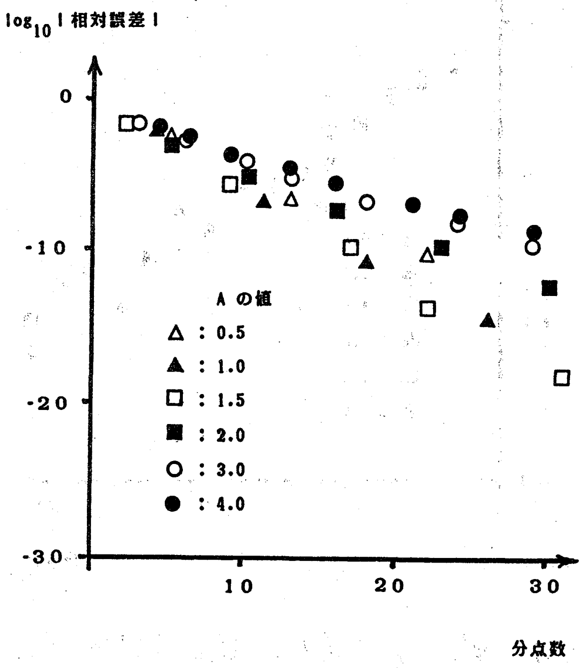
図１．２　φ^{A}_{DE}, $\psi^{A}_{DE\text{-}x}$ を用いたＤＥ公式の数値積分誤差



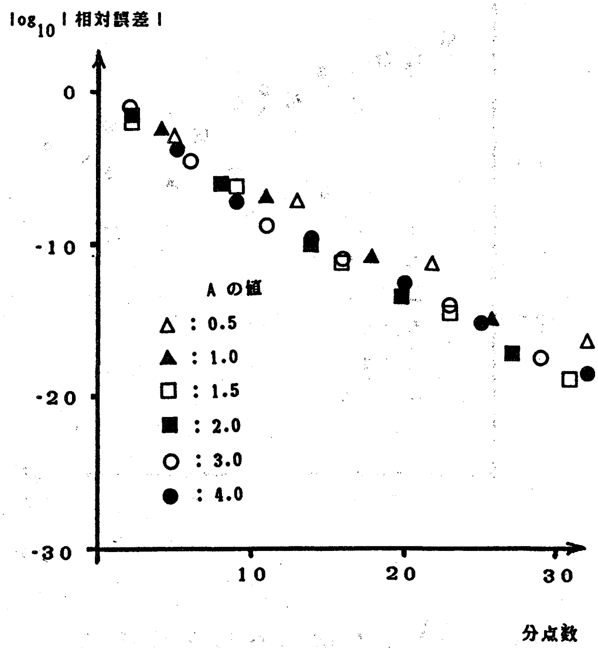
(7) φ^{A}_{DE} を用いたＤＥ公式を $f_4(x)=\sqrt{x}$ に適用したときの誤差



(8) $\psi^{A}_{DE\text{-}X}$ を用いたＤＥ公式を $f_4(x)=\sqrt{x}$ に適用したときの誤差

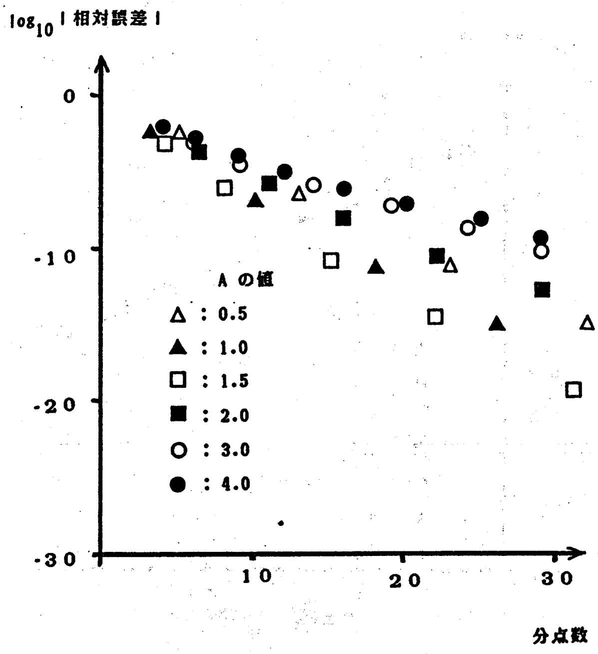


(9) φ^{A}_{DE} を用いたＤＥ公式を $f_5(x)=\log(x)$ に適用したときの誤差

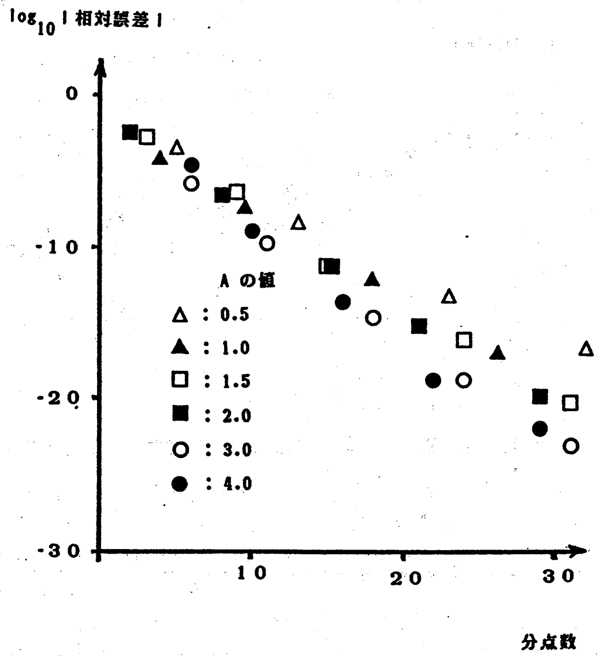


(10) $\psi^{A}_{DE\text{-}X}$ を用いたＤＥ公式を $f_5(x)=\log(x)$ に適用したときの誤差

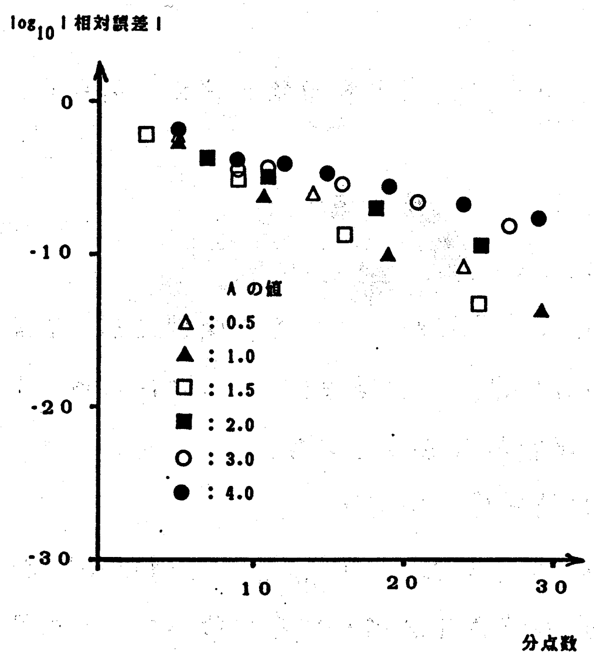
図１．２ φ^{A}_{DE}, $\psi^{A}_{DE\text{-}X}$ を用いたＤＥ公式の数値積分誤差（続き）



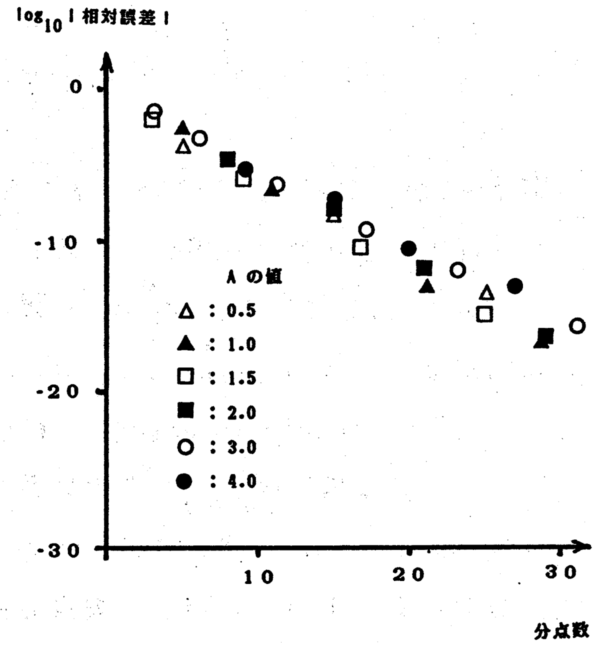
(3) φ_{DE}^{A} を用いたＤＥ公式を $f_2(x)=x$ に適用したときの誤差



(4) $\psi_{DE\text{-}X}^{A}$ を用いたＤＥ公式を $f_2(x)=x$ に適用したときの誤差

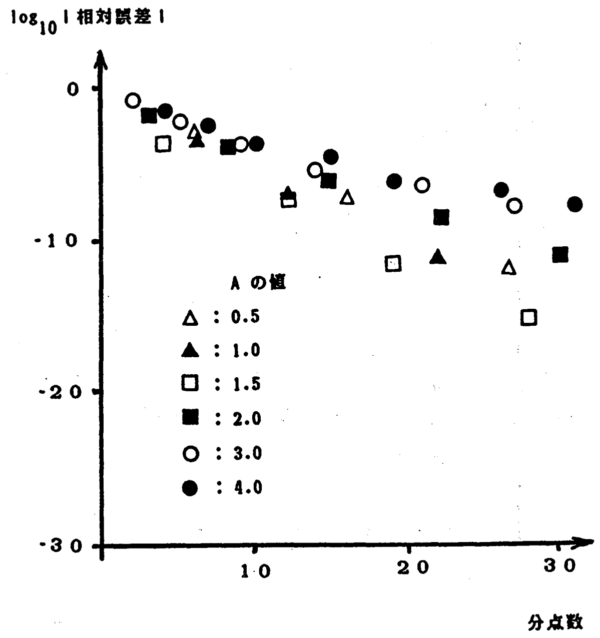


(5) φ_{DE}^{A} を用いたＤＥ公式を $f_3(x)=\exp(x)$ に適用したときの誤差

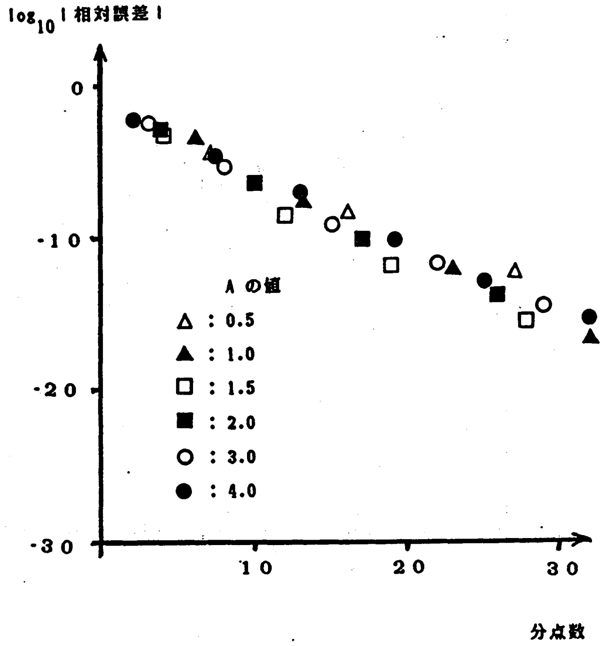


(6) $\psi_{DE\text{-}X}^{A}$ を用いたＤＥ公式を $f_3(x)=\exp(x)$ に適用したときの誤差

図１．２ φ_{DE}^{A}, $\psi_{DE\text{-}x}^{A}$ を用いたＤＥ公式の数値積分誤差（続き）



(11) φ_{DE}^{A} を用いたＤＥ公式を $f_6(x)=1/\sqrt{x}$ に適用したときの誤差



(12) $\psi_{DE\text{-}X}^{A}$ を用いたＤＥ公式を $f_6(x)=1/\sqrt{x}$ に適用したときの誤差

図１．２　φ_{DE}^{A}, $\psi_{DE\text{-}X}^{A}$ を用いたＤＥ公式の数値積分誤差（続き）

図１．２から次のようなことが見て取れる．

(1) 《従来のＤＥ変換を用いたＤＥ公式について》

Ａの値を 1.5 にした φ_{DE}^{A} を用いるＤＥ公式が，すべての関数に対して最も効率がよい．（ intrinsic error に関しては，この結果は１．２で述べた従来のＤＥ公式の intrinsic error の理論的評価と合致している）

(2) 《“ＤＥ変換” $\psi_{DE\text{-}X}^{A}$ を用いたＤＥ公式について》

intrinsic error に関しては，Ａの値を 4.0 にした $\psi_{DE\text{-}X}^{A}$ を用いるＤＥ公式が最も効率がよい．しかし，被積分関数の特異性が強くなるに従って，Ａの値を1.5 の前後の値にした $\psi_{DE\text{-}X}^{A}$ を用いるＤＥ公式が，最も効率のよい公式となる．但し，Ａの値の大きな $\psi_{DE\text{-}X}^{A}$ を用いるＤＥ公式も，それほど効率は悪くはならない．（ intrinsic error に関しては，この結果は１．３で述べた“ＤＥ変換”を用いたＤＥ公式の intrinsic error の理論的評価と合致している）

(3)《従来のＤＥ変換を用いたＤＥ公式と“ＤＥ変換” $\psi^{A}_{DE\text{-}X}$ を用いたＤＥ公式の比較》

比較的素直な関数に関しては，従来のＤＥ変換を用いたＤＥ公式より，“ＤＥ変換” $\psi^{A}_{DE\text{-}X}$ を用いたＤＥ公式（ A の値は大きめ）の方が有効である．しかし，特異性の強い関数に関しては，従来のＤＥ変換を用いたＤＥ公式と“ＤＥ変換” $\psi^{A}_{DE\text{-}X}$ を用いたＤＥ公式は，対等である．

1.4 まとめと今後の課題

従来のＤＥ公式の intrinsic error を理論的に解析することによって，intrinsic error に関して，従来のＤＥ変換を用いたＤＥ公式よりも有効である“ＤＥ変換” $\psi^{A}_{DE\text{-}X}$ を用いたＤＥ公式を導入した．この公式は，比較的素直な関数に関しては，従来のＤＥ変換を用いたＤＥ公式より有効である．しかし，特異性の強い関数に関しては，従来のＤＥ変換を用いたＤＥ公式と対等である．

一般に，intrinsic error の小さい変数変換型の数値積分公式は，他の関数の数値積分誤差も小さいと思われている（信じられている？）が，このことは，上記のことからもわかるように，ここでは，正しくないようである．このあたりの事情の解明も含めて，“ＤＥ変換” $\psi^{A}_{DE\text{-}X}$ を用いたＤＥ公式の数値積分誤差の詳細な解析（例えば，誤差の特性関数の解析など）は，今後の課題としたい．

2.《第二の話題》 “ＩＭＴ変換の反復によって得られる公式は，何故ＤＥ公式を越えられないか”

2.1 はじめに

1974年，伊理，森口，高沢は，［１］において，積分問題 $\int_0^1 f(x)dx$ に対する数値積分公式として，次のような変数変換に基つく公式（ＩＭＴ公式）：

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f(\varphi_{IMT}(\frac{k}{N}))\varphi'_{IMT}(\frac{k}{N})$$

ここで，$\varphi_{IMT}(t) = \int_0^t \exp\left(-\frac{1}{s}-\frac{1}{1-s}\right)ds \Big/ \int_0^1 \exp\left(-\frac{1}{s}-\frac{1}{1-s}\right)ds$

を提案し，この公式を用いたときの数値積分誤差が次のように評価されること

$$\exp(-c\sqrt{N})$$

を示した．その後，室田，伊理［３］は，ＩＭＴ変換を反復して用いることによって得られる数値積分公式：

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f(\varphi^{(i)}_{IMT}(\frac{k}{N}))\varphi^{(i)\prime}_{IMT}(\frac{k}{N})$$

ここで，$\varphi^{(1)}_{IMT}(t) = \varphi_{IMT}(t)$, $\varphi^{(i+1)}_{IMT}(t) = \varphi^{(i)}_{IMT}(\varphi_{IMT}(t))$ $(i \geq 1)$

文献［３］では

変換 $\varphi^{(2)}_{IMT}$ を用いる公式を IMT-double rule

変換 $\varphi^{(3)}_{IMT}$ を用いる公式を IMT-triple rule

変換 $\varphi^{(4)}_{IMT}$ を用いる公式を IMT-quadruple rule

と呼んでいる．

を導入し、この公式を用いたときの数値積分誤差が次のように評価されること

IMT-Double rule: $\exp\left(-\frac{cN}{(\log N)^2}\right)$

IMT-Triple rule: $\exp\left(-\frac{cN}{(\log N)(\log\log N)^2}\right)$

IMT-Quadruple rule: $\exp\left(-\frac{cN}{(\log N)(\log\log N)(\log\log\log N)^2}\right)$.

を示し，ＩＭＴ変換の反復によって得られる公式を用いることによってＩＭＴ公式を用いたときに比べ数値積分誤差が飛躍的に改善できることを示した。しかし，この一連の誤差評価からわかるように，“ＩＭＴ変換の反復の回数をいくら多くしても，得られる公式の数値積分誤差は，ＤＥ公式の数値積分誤差 $C\exp(-cN/\log N)$ より良くはならない．” 第二の話題は，この現象に対する一つの説明である．まず，ＩＭＴ変換の反復によって得られる公式が有効であるような関数空間を設定し，その関数空間上で，不等式“数値積分公式の誤差ノルム $\geqq C\exp(-cN/\log N)$”（ここで，C，c はＩＭＴ変換の反復回数には関係しない定数としてとることができる）が成立することを示し，この現象に対する一つの説明を与える．

以下の節の構成は次のとおりである．まず，**２.２　ＩＭＴ変換の反復によって得られる公式が有効であるような関数空間** において，ＩＭＴ変換の反復によって得られる公式が有効であるような関数空間を設定する．次に，**２.３　数値積分公式の誤差ノルムの下からの評価** で，ＩＭＴ変換の反復によって得られる公式が有効であるような関数空間における数値積分公式の誤差ノルムの下からの評価“数値積分公式の誤差ノルム $\geqq C\exp(-cN/\log N)$”を示す．

２.２　ＩＭＴ変換の反復によって得られる公式が有効であるような関数空間

ＩＭＴ公式に関しては，すでに，［６］において，公式が有効であるような関数空間を設定した．それとまったく同様にして，［２］にあるＩＭＴ変換の反復によって得られる公式の誤差解析を参照すれば，ＩＭＴ変換の反復によって得られる公式が有効であるような関数空間を設定できる．詳細は省略するが，結果として，つぎのような関数空間を得る．

$$H^{\alpha}_{R\text{-}IMT} = \{ f \mid f \text{ は Riemann 面 } \varphi_{IMT}(\Delta) \text{ 上で正則，かつ，} \sup_{z\in\varphi_{IMT}(\Delta)} |f(z)/(z^{-\alpha}(1-z)^{-\alpha})| < +\infty \text{ なる関数} \}$$

但し，$\alpha > -1$ で Δ は図２.１に描いたような領域（領域の高さは十分に低いとする）であり，図にも記してあるように境界が直線 $x=0$，$x=1$ に接している（例えば，ＩＭＴ-double rule の場合，境界の $x=0$ への接し方は $x=y/(\log y)^2$ であり，ＩＭＴ変換の反復回数が増えるほど接し方は強くなる）．

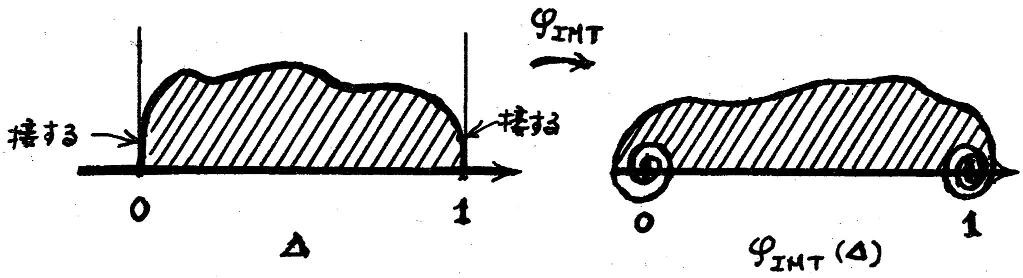


図2.1 領域 Δ および Riemann 面 $\varphi_{IMT}(\Delta)$ の概略図

ここで，空間のノルムは， $\|f\| = \sup_{z\in\varphi_{IMT}(\Delta)} |f(z)/(z^{-\alpha}(1-z)^{-\alpha})|$ でいれ，この空間上での線形作用素のノルムとしては，通常の作用素ノルムをとることにする．

この関数空間は，一見奇怪に見えるが，条件

$$\sup_{z\in\varphi_{IMT}(\Delta)} |f(z)/(z^{-\alpha}(1-z)^{-\alpha})| < +\infty$$

を次のように書き替えてみれば

$$|f(z)| \le \|f\|\ z^{\alpha}(1-z)^{\alpha} \qquad (\ ^{\forall}z \in \varphi_{IMT}(\Delta)\ )$$

わかるように，z=0，及び z=1 における特異性が $z^{\alpha}(1-z)^{\alpha}$ 以下であるような関数の成す空間である．従って，この関数空間は，決して奇怪なものではない．

2.3 数値積分公式の誤差ノルムの下からの評価

2.1で導入した関数空間 H^{α}_{R-IMT} において，数値積分公式（N個の関数値及び導関数値を用いた公式）：

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=0}^{m_i-1} a_{ij} f^{(i)}(x_i) \qquad \left(\underline{\sum_{i=1}^{k} m_i = N,\ a_{ij}\in\mathbf{C},\ x_{ij}\in\varphi_{IMT}(\Delta)}\right)$$

を考える．そして，この数値積分公式に対する誤差生成作用素を次のように定義する：

$$E_N(x_i\ ; a_{ij})(f) \equiv \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=0}^{m_i-1} a_{ij} f^{(i)}(x_i) - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

以下の目標は，数値積分公式の分点 x_i や重み a_{ij} を動かした時の誤差生成作用素のノルムの下限：

$$\inf_{x_i\in\varphi_{IMT}(\Delta),\ a_{ij}\in\mathbf{C}} \|E_N(x_i\ ; a_{ij})\|_{H^{\alpha}_{R-IMT}}$$

を求める（評価する）ことである．

まず，ＤＥ変換：

$$\varphi_{DE}(t)=\frac{1}{2}\ \tanh(\frac{\pi}{2}\ \sinh(t))+\ \frac{1}{2}$$

によって H^{α}_{R-IMT} から導入される関数空間：

H^{α}_{DE} ＝｛ f ｜ f は $\varphi^{-1}_{DE}(\varphi_{IMT}(\Delta))$ 上で正則，かつ，

$\sup_{w\in\varphi^{-1}_{DE}(\varphi_{IMT}(\Delta))} |f(w)/(\varphi_{DE}(w)^{-\alpha}(1-\varphi_{DE}(w))^{-\alpha}\varphi'_{DE}(w)| < +\infty$ なる関数｝

を考える．但し，空間のノルムは，

$$\|f\| = \sup_{w\in\varphi^{-1}_{DE}(\varphi_{IMT}(\Delta))} |f(w)/(\varphi_{DE}(w)^{-\alpha}(1-\varphi_{DE}(w))^{-\alpha}\varphi'_{DE}(w)|$$

でいれ，この空間上での線形作用素のノルムとしては，通常の作用素ノルムをとることにする．空間 H^{α}_{R-IMT} と空間 H^{α}_{DE} の基本関係（空間 H^{α}_{R-IMT} 上の数値積分誤差生成作用素のノルムと空間 H^{α}_{DE} 上の数値積分誤差生成作用素のノルムの基本関係）は次の補題２．１で与えられる．

補題２．１

(1) $f\in H^{\alpha}_{R-IMT}$ ならば $f(\varphi_{DE})\varphi'_{DE}\in H^{\alpha}_{DE}$ で $\|f\| = \|f(\varphi_{DE})\varphi'_{DE}\|$

逆に，$g\in H^{\alpha}_{DE}$ ならば $g(\varphi^{-1}_{DE})(\varphi^{-1}_{DE})'\in H^{\alpha}_{R-IMT}$ で $\|g\| = \|g(\varphi^{-1}_{DE})(\varphi^{-1}_{DE})'\|$

(2) 任意の $x_i\in\varphi_{IMT}(\Delta)$，$a_{ij}\in\mathbf{C}$ に対して $y_i\in\varphi^{-1}_{DE}(\varphi_{IMT}(\Delta))$，$b_{ij}\in\mathbf{C}$ が存在して

$$\|\ E_N(x_i;\ a_{ij})\ \|_{H^{\alpha}_{R-IMT}} = \|\ E_N(y_i;\ b_{ij})\ \|_{H^{\alpha}_{DE}}$$

逆に，任意の $y_i\in\varphi^{-1}_{DE}(\varphi_{IMT}(\Delta))$，$b_{ij}\in\mathbf{C}$ に対して $x_i\in\varphi_{IMT}(\Delta)$，$a_{ij}\in\mathbf{C}$ が存在して

$$\|\ E_N(y_i;\ b_{ij})\ \|_{H^{\alpha}_{DE}} = \|\ E_N(x_i;\ a_{ij})\ \|_{H^{\alpha}_{R-IMT}}$$

（証明は容易であるから省略する）

この補題からわかるように，等式：

$$\inf_{x_i\in\varphi_{IMT}(\Delta),\ a_{ij}\in\mathbf{C}} \|\ E_N(x_i;\ a_{ij})\ \|_{H^{\alpha}_{R-IMT}} = \inf_{y_i\in\varphi^{-1}_{DE}(\varphi_{IMT}(\Delta)),\ b_{ij}\in\mathbf{C}} \|\ E_N(y_i;\ b_{ij})\ \|_{H^{\alpha}_{DE}}$$

が成立するから，$H^{\alpha}_{R\text{-}IMT}$ における数値積分公式の分点や重みを動かした時の誤差生成作用素のノルムの下限の評価は H^{α}_{DE} における数値積分公式の分点や重みを動かした時の誤差生成作用素のノルムの下限の評価に帰着される.

以下 H^{α}_{DE} における数値積分公式の分点や重みを動かした時の誤差生成作用素のノルムの下限を評価する. そのために，関数空間 H^{α}_{DE} がどのような空間なのかを調べる. まず $\varphi^{-1}_{DE}(\varphi_{IMT}(\Delta))$ の解析が必要である. いま，$\varphi_{DE}(D_{\pi/2})$ ($D_{\pi/2}=\{\ z\in\mathbf{C}\ |\ |\mathrm{Im}\ z|<\pi/2\ \}$) を考えると，図２.２からわかるように $\varphi_{DE}(D_{\pi/2})$は 0，1 を分岐点にもつ無限葉の Riemann 面で，１枚目の Riemann 面は複素平面から分岐点 {0, 1} を除いたものであり，他の Riemann 面は複素平面から分岐点 {0, 1} および直線 Re z=1/2 を除いたものである.

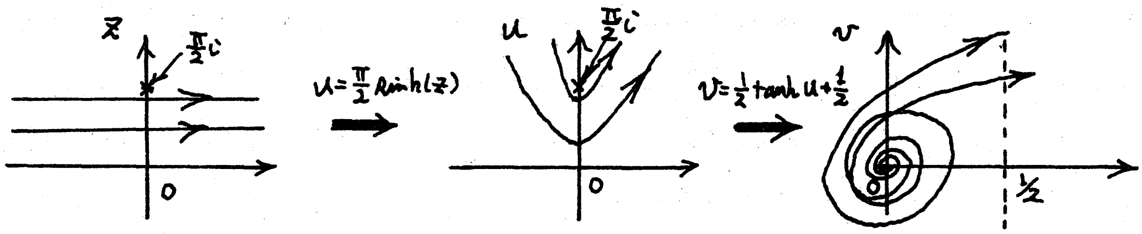


図２.２　Riemann 面 $\varphi_{DE}(D_{\pi/2})$（領域 $D_{\pi/2}$ の内の実軸に平行な直線群が φ_{DE} によってどのように変換されるかを描いたもの）

このことから，$\varphi^{-1}_{DE}(\varphi_{IMT}(\Delta))$ は $D_{\pi/2}$ に含まれる領域であることが分かる. 従って関数空間 H^{α}_{DE} は，次のような関数空間

$$\mathscr{H}^{\alpha}_{DE}(\mathscr{D})=\{\ f\ |\ f\ \text{は 領域}\ \mathscr{D}\ \text{で正則，かつ,}\ \sup_{w\in\mathscr{D}}|f(w)/(\varphi_{DE}(w)^{-\alpha}(1-\varphi_{DE}(w))^{-\alpha}\varphi'_{DE}(w)|<+\infty\ \text{なる関数}\}$$

ここで $\mathscr{D}$ は $D_{\pi/2}$ に含まれる領域.

の特殊なものに他ならないことがわかる. この関数空間 $\mathscr{H}^{\alpha}_{DE}(\mathscr{D})$ における数値積分公式の分点や重みを動かした時の誤差生成作用素ノルムの下限の評価は，[５] で与えた誤差生成作用素ノルムの下限の評価法を用いれば，容易に得られる. 結果は次のようになる：

$$\inf_{x\in\mathscr{D},\ a_{ij}\in\mathbf{C}}\|\ E_N(x_i;\ a_{ij})\ \|_{\mathscr{H}^{\alpha}_{DE}(\mathscr{D})}\geq C\ \exp(-c\ N/\log N)$$

（ここで，C，c は領域 $\mathscr{D}$ には関係しない定数としてとることができる）

従って，関数空間 H^{α}_{DE} における数値積分公式の誤差生成作用素ノルムの下限の評価は次のようになる.

$$\inf_{x_i \in \varphi_{DE}^{-1}(\varphi_{IMT}(\Delta)),\ a_{ij} \in \mathbf{C}} \| E_N(x_i;\ a_{ij}) \|_{H_{DE}^{\alpha}} \geq C \exp(-c\ N/\log N)$$

上記の評価は，先に述べた $H_{R\text{-}IMT}^{\alpha}$ と H_{DE}^{α} の関係に鑑みれば，ＩＭＴ変換の反復によって得られる公式が有効であるような関数空間 $H_{R\text{-}IMT}^{\alpha}$ において数値積分公式の誤差ノルムが下からの次のように

$$\inf_{x_i \in \varphi_{IMT}(\Delta),\ a_{ij} \in \mathbf{C}} \| E_N(x_i;\ a_{ij}) \|_{H_{R\text{-}IMT}^{\alpha}} \geq C \exp(-c\ N/\log N)$$

（ここで，C，c はＩＭＴ変換の反復回数には関係しない定数としてとることができる）

評価されることを示している．これは，我々がここで示したかったことである．

Remark 1 関数空間 $\mathcal{H}_{DE}^{\alpha}(\mathcal{D})$ における数値積分公式の誤差生成作用素のノルムの下限の評価の結果，および，Riemann 面 $\varphi_{DE}(D_{\pi/2})$ に含まれる領域と $D_{\pi/2}$ に含まれる領域の対応関係に注意すれば，次の定理を得る（上で示したＩＭＴ変換の反復によって得られる公式が有効であるような関数空間 $H_{R\text{-}IMT}^{\alpha}$ における数値積分公式の誤差ノルムが下からの評価は，この定理の特殊な場合に過ぎないとも言える）．

定理２．２

$\mathcal{D}$ を Riemann 面$\varphi_{DE}(D_{\pi/2})$に含まれる任意の領域とする（図２．３）．

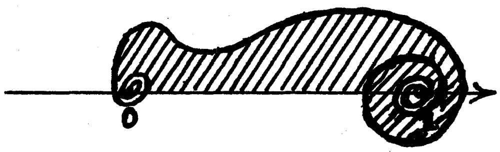


図２．３　Riemann 面 $\varphi_{DE}(D_{\pi/2})$ に含まれる領域 $\mathcal{D}$

そして，次のような関数空間を考える：

$$\mathcal{H}^{\alpha}(\mathcal{D}) = \{ f \mid f \text{ は } \mathcal{D} \text{ 上で正則，かつ，} \sup_{z \in \mathcal{D}} |f(z)/(z^{-\alpha}(1-z)^{-\alpha})| < +\infty \text{ なる関数} \}$$

このとき，

$$\inf_{x_i \in \mathcal{D},\ a_{ij} \in \mathbf{C}} \| E_N(x_i;\ a_{ij}) \|_{\mathcal{H}^{\alpha}(\mathcal{D})} \geq C \exp(-c\ N/\log N)$$

（ここで，C，c は $\mathcal{D}$ には関係しない定数としてとることができる）

参考文献

[1] 伊理正夫，森口繁一，高沢嘉光： ある数値積分公式について，京都大学数理解析研究所講究録，No.21 (1970)，pp.82-118.

[2] 室田一雄： On numerical quadrature formulas robust against endpoint singularities，東京大学計数工学科卒業論文 1978.

[3] K. Murota and M. Iri: Parameter tuning and repeated application of the IMT-type transformation in numerical quadrature, Numer. Math., Vol.38(1982), pp.327-363.

[4] F. Stenger: Integration formulas based on the trapezoidal formula, J. Inst. Math. Appl., Vol.12(1973), pp.103-114.

[5] 杉原正顕： ＤＥ変換公式の最適性について，京都大学数理解析研究所講究録，No.585 (1986)， pp.150-170.

[6] 杉原正顕： ＩＭＴ積分公式が有効な関数族について，京都大学数理解析研究所講究録，No.613(1987)， pp.170-187.

[7] H. Takahasi and M. Mori: Double exponential formulas for numerical integration, Publ. Res. Inst. Math. Sci., Kyoto Univ., Vol.9(1974), pp. 721-741.