数理解析研究所講究録
649巻 1988年 61-72

区間力学系のinverse limitについて

筑波大 川村一宏
(Kazuhiro Kawamura)

以下、$I=[0,1]$を単位閉区間、$f:I\twoheadrightarrow I$を上への連続写像とする。$x\in X$に対し、$O_f(x)=\{f^n(x)\mid n\geqq 0\}$ をxの（fによる）軌道(orbit)という。$Perf$, $Fixf$で各々fの周期点の全体、fの不動点の全体を表わす。ここでは、M. Barge - J. Martin による3つの論文 [2], [3], [4] について紹介する。これらは軌道の位相的な状態、特殊な軌道を持つ点の存在、特別な周期を持つ周期点の存在等（これらを<u>力学的な性質</u>と呼ぶことにする）について調べる為に、continuum（=コンパクト連結距離空間）の理論に於ける結果が使える事を示したものである。

定義1. $f:I\twoheadrightarrow I$に対して、$(I,f)=\{(x_n)\in I^\infty\mid f(x_{n+1})=x_n,\ \forall n\geqq 0\}$ とおき、これにI^∞からの部分位相を入れる。但しI^∞はIの可算積に積位相を入れたもの。(I,f) をfによる<u>inverse limit</u>という。$\pi_n:(I,f)\twoheadrightarrow(I,f)$を第$n$座標への射影とする。同相写像$\hat{f}:(I,f)\twoheadrightarrow(I,f)$が$\pi_n\circ\hat{f}=f\circ\pi_n$ を満たすように自然に定まる。また(I,f)はcontinuumである事が知られている。

一般的な問題：f の力学的な性質と (I,f) の位相的な性質の間にはどのような関係があるか？

ここでは位相的な性質として特に「continuum の indecomposability」について考える。ここで

定義と命題2. X は continuum とする。X の subcontinuum $A, B \subsetneqq X$ が存在して、$X=A\cup B$ とできる時、X は <u>decomposable</u> であるという。そうでない時、X は <u>indecomposable</u> であるという。

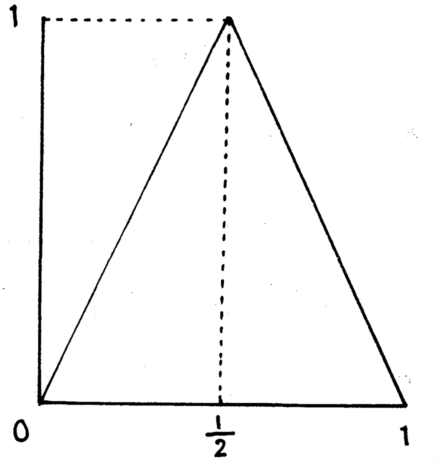
この時（[8], p.139）、

X は indecomposable $\longleftrightarrow$ X の任意の proper subcontinuum は内点を持たない.

従って、locally connected continuum は decomposable である。

まず例を挙げる（[2], example 2と3).

例3. $f: I \twoheadrightarrow I$ を下のグラフで与えられる写像とする。



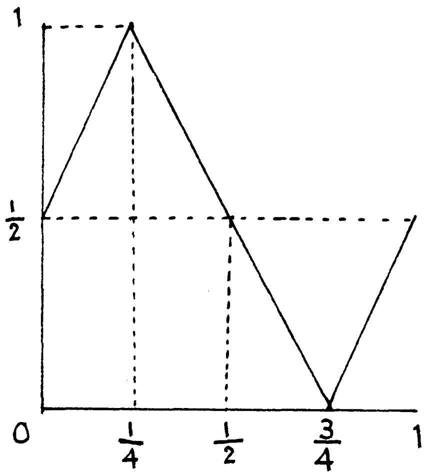
a) $\{x\in I \mid O_f(x)$ は I で dense$\} \neq \phi$.
この時「f は dense orbit を持つ」と呼ぶ事にする。実際は上の集合は dense G_δ in I である。

b) 任意の $n \geqq 1$ に対して f^n は dense orbit を持つ。

c) Perf は dense in I.

d) (I,f) は indecomposable (Knaster continuum と呼ばれている).

例4. $g: I \to I$ を下のグラフで与えられる写像とする。



g は例3の a), c) は満たすが、

b′) f^2 は dense orbit を持たない。

d′) (I,f) は Knaster continuum の one point union. 従って decomposable である。

次は Bing の decomposition theorem ([5] theorem 8) の系である。

定理5. (I,f) の任意の proper subcontinuum が内点を持たないとする。この時 (I,f) から arc G への写像 $p: (I,f) \to G$ が

1) 任意の $t \in G$ に対して $p^{-1}(t)$ は内点を持たない continuum.

2) 任意の同相写像 $g: (I,f) \to (I,f)$ に対して、同相写像 $\bar{g}: G \to G$ が $\bar{g} \cdot p = p \cdot g$ を満たすようにとれる.

の2条件を満たすように存在する。

1. Dense orbit と Indecomposability

定理6（[2], theorem 3）. $x\in I$ とし、$O_f(x)$ は I で dense とする。

1) $O_{f^2}(x)$ が I で dense ならば、(I, f) は indecomposable.

2) $O_{f^2}(x)$ が I で dense でなければ、indecomposable sub-continua H と K が、

a) (I, f) は H と K の one point union.

b) $\hat{f}(H)=K$, $\hat{f}(K)=H$ を満たすようとれる。

補題7（[2], Lemma 2）. $x\in I$ とし、$O_f(x)$ は I で dense とする。$s, k\geqslant 0$ を整数として、$A_{s,k}=\{f^{sn+k}(x)\mid n\geqslant 0\}$ とおく.

1) $A_{2,0}=O_{f^2}(x)$ が I で dense なら、任意の $s\geqslant 0$ と任意の k で $0\leqslant k\leqslant s-1$ を満たすものに対し、$A_{s,k}$ は I で dense.

2) $A_{2,0}$ が I で dense でないなら、$I=\bar{A}_{2,0}\cup\bar{A}_{2,1}$ でかつ

a) $\bar{A}_{2,0}$ と $\bar{A}_{2,1}$ は閉区間で、$\bar{A}_{2,0}\cap\bar{A}_{2,1}$ は1点。

b) $f(\bar{A}_{2,0})=\bar{A}_{2,1}$ かつ $f(\bar{A}_{2,1})=\bar{A}_{2,0}$

c) 任意の $k\geqslant 1$ に対し、$A_{2k,0}$ は $A_{2,0}$ で dense, $A_{2k,1}$ は $A_{2,1}$ で dense.

定理6の証明の概略. $\underline{x}\in(I, f)$ を $\pi_0(\underline{x})=x$ であるような点とする。1). $O_{f^2}(x)$ が I で dense ならば、内点を持つ

indecomposable continuum Sが存在する事を示す。もしそうでなければ、定理5のような $p:(I,f)\twoheadrightarrow G$ が存在する。$O_{\hat{f}}(\underline{x})$ は (I,f) でdenseだから、定理5の2)より $O_{\tilde{\hat{f}}}(p(\underline{x}))$ は G でdenseになるが、arc上の同相写像はdense orbitを持たないので矛盾である。

$O_{\hat{f}}(\underline{x})$ がdenseであることから、$\mathrm{int}\,S \cap \mathrm{int}\,\hat{f}^k(S) \neq \phi$ を満たす $k \geq 1$ が存在する。$S \cap \hat{f}^k(S)$ がcontinuumである事が示せるので、命題2から $\hat{f}^k(S) = S$ となる。$\hat{f}^\ell(\underline{x}) \in S$ となる $\ell \geq 1$ を1つとる。補題7 1)から $A_{k,\ell}$ は I でdenseであり、従って $O_{\hat{f}^k}(\hat{f}^\ell(\underline{x}))$ は (I,f) でdenseである。S は $\hat{f}^k$ で不変である事と合わせて $S = (I,f)$ だから結論が出る。

2). $O_{f^2}(x)$ が I でdenseでないなら、補題7 2)のような I の分解 $I = \overline{A}_{2,0} \cup \overline{A}_{2,1}$ を考える。

$H = \{(y_n) \in (I,f) \mid y_{2n} \in \overline{A}_{2,0},\ y_{2n+1} \in \overline{A}_{2,1} \quad \forall n \geq 0\}$

$K = \{(y_n) \in (I,f) \mid y_{2n} \in \overline{A}_{2,1},\ y_{2n+1} \in \overline{A}_{2,0} \quad \forall n \geq 0\}$ が求めるものである事がわかる。

補題7の系として次が示せる。

系8. $f: I \twoheadrightarrow I$ がdense orbit を持つなら、$\mathrm{Per} f$ は I でdense.

注意9. f がdense orbit を持たない時には定理6のようなはっきりとした結果を得るのは難しそうである。例えば

写像 $f: I \twoheadrightarrow I$ で　1）$f(0)=0$，$f(1)=1$，$f(t)<t$　$0<{}^{\forall}t<1$．2）(I,f) の一点でない全ての subcontinuum は indecomposable であるものが存在する（[2] example 4）．1）から f は dense orbit を持たない。一方 id_I も dense orbit を持たず $(I, id_I)=I$ である。このように dense orbit を持たない写像の inverse limit は非常に様子の違うものになり得る。

2. Homoclinic point と indecomposability

定義10．1）$f: I \twoheadrightarrow I$ の不動点 $y \in I$ をとる。$x \in I$ が y に対する homoclinic point であるとは，次の2条件を満たすこと。

a）$f^n(x) \longrightarrow y$ as $n \longrightarrow \infty$．

b）I の中の点列 (x_n) が，$f(x_{n+1})=x_n$ ${}^{\forall}n \geqq 0$，$x_0=x$ を満たすように取れ，かつ $x_n \longrightarrow y$ as $n \longrightarrow \infty$．

2）$y \in I$ を周期 s の周期点とする。$x \in I$ が y と f^s に関して 1）の a)，b) を満たす時，x を y に対する homoclinic point という。

homoclinic point の近くの f の振舞いは一般に複雑である事が知られている。このような点の存在と (I,f) の indecomposability の関係が定理14と15で調べられている。

定理11（[3] theorem 3, 8）．$f: I \twoheadrightarrow I$ について、f^2はdense orbitを持つとする。この時、任意の1点でないproper subcontinuum Hに対して

1）$\mathrm{Lim}_{n\to\infty} \hat{f}^n(H) = (I, f)$　（Lim は topological limit を表わす）．

2）$\lim_{n\to\infty} \mathrm{diam}\, \hat{f}^{-n}(H) = 0$　（diam は直径を表わす）．

1）は次の定理から得られる．

定理12（[3] theorem 6）．$f: I \twoheadrightarrow I$ に対して

f^2がdense orbitを持つ $\longleftrightarrow$ 任意の1点でない閉区間$J \subset I$に対して $\mathrm{Lim}_{n\to\infty} f^n(J) = I$．

2）の証明の概略．$H \subset (I, f)$を1点でないproper subcontinuumとする。$\hat{f}^{-n}$の定義を考える事により、次を示せばよい。

(*)　$\lim \mathrm{diam}\, H_n = 0$，但し $H_n = \pi_n(H)$．

そうでないと仮定するとある$\varepsilon > 0$と部分列(H_{n_i})をとり、$\mathrm{diam}\, H_{n_i} > \varepsilon$ $\forall i \geq 0$ とできる。必要なら部分列を取り直して、$H_{n_i} \supset J$となる1点でない閉区間$J \subset I$があるとしてよい。系8からJの中に異なる周期点p, qがとれる。周期を各々r_1, r_2とすると、p, qからHの中の周期点$\underline{p}$（周期r_1），$\underline{q}$（周期r_2）が見つかる。$K = \cap \{L \mid L$は$\underline{p}, \underline{q}$を共に含む$(I, f)$のsubcontinuum$\}$とおくと、KはHのsubcontinuumでかつ$\hat{f}^{r_1 r_2}(K) = K$を満たす。任

意の整数$n \geqq 0$に対して　$f^{n_1 n_2}(\pi_n(K)) = \pi_n(K)$　が得られるが、補題7 1)から$f^{n_1 n_2}$はdense orbit を持つから$\pi_n(K) = I$　$\forall n \geqq 0$, 従って$K = (I, f)$である。$K \subset H \subsetneqq (I, f)$だからこれは矛盾.

定義と定理13. Xはindecomposable continuum, $p \in X$とする。
$C_p = \{y \in X \mid p$とyを共に含むXの proper subcontinuum がある$\}$
とおき、pの(Xにおける)<u>composant</u>という。この時、

1) 2つのcomposantは交わらないか、或いは一致する。
2) composantはdense connected でかつfirst category.
3) 異なるcomposantは非可算個存在する。

証明は [8] p.139-141.

定理14 ([3] theorem 10). $f: I \to I$に対し、f^2はdense orbit を持つとする。任意の$y \in \mathrm{Perf} \cap \mathrm{int}\, I$に対するhomoclinic pointが存在する。

証明の概略. yの周期をsとする。$g = f^s$とおくと補題7, 1)からgもdense orbit を持つ. g^2もdense orbitを持つ事を使って$x \in \mathrm{int}\, I$で$g(x) = y$を満たす点がある事がわかり、これが求める点である。

これを示す為、$\underline{y} = (y, y, \cdots) \in (I, g) \approx (I, f)$とする。$C$を$\underline{y}$の$(I, g)$におけるcomposantとする。定理13, 2)より$\pi_0(C) \supset \mathrm{int}\, I \ni x$.

従って $\underline{x}\in C$ が $\pi_0(\underline{x})=x$ となるように取れる。$\underline{x}$ と $\underline{y}$ を共に含む proper subcontinuum H に定理11, 2) を適用すると、$\hat{g}^{-n}(\underline{x})\to\underline{y}$ as $n\to\infty$. が得られて、$\hat{g}^{-n}(\underline{x})\to\underline{y}$ as $n\to\infty$ がわかる。このことは $\underline{x}=(x_n)$ とおくと、$g(x_{n+1})=x_n$ かつ $x_n\to y$ as $n\to\infty$ を示し、しかも $g^n(x)=y$ $\forall n\geqq 2$ だから x は y に対する homoclinic point である。

定理5の応用として次も得られている。

定理15（[2], theorem 4）. $f: I\to I$ がある周期点に対する homoclinic point を持つなら、(I,f) は indecomposable subcontinuum を含む。

3. 周期点と indecomposability

例3の写像 f は全ての整数 $n\geqq 1$ について周期 n である点を持つ。この性質は chaotic な力学系において重要である([6]). Sarkovski の定理によれば $f: I\to I$ が2の巾でない周期の周期点を持てば、任意の整数 $n\geqq 1$ に対し 2^n-周期点を持つ([7])。このような性質と (I,f) の indecomposability との関係について

定理16（[2] Corollary, [3] theorem 13). $f: I\to I$ は dense orbit を持つとする。

$$
\begin{tikzcd}[column sep=large]
f^2\text{ が dense orbit を持つ} \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d] & (I,f)\text{ は indecomposable} \arrow[dd] \\
f\text{ は奇数周期の周期点を持つ} \arrow[d] & \\
\begin{array}{l}f\text{ は2の巾でない周期の}\\ \text{周期点を持つ}\end{array} \arrow[r, shift left] & \begin{array}{l}\text{ある整数 }\ell\geqq 1\text{ があって}\\ (I,f)\text{ は }f^{2^\ell}\text{ で不変な in-}\\ \text{decomposable continuum を}\\ \text{含む}\end{array} \arrow[l, dashed, shift left, "\begin{array}{c}\text{piecewise}\\ \text{monotone}\end{array}"]
\end{tikzcd}
$$

周期点全体が I で dense であるような写像は、その構造がかなりはっきりと分かる。

定理17（[4]）. $f:I\to I$ に対し、Per f は I で dense であるとする。この時、高々可算個（空でもよい）の閉区間の族 (J_i) が次を満たすように存在する。

1）任意の $k\neq\ell$ に対して、$\mathrm{int}\,J_k\cap\mathrm{int}\,J_\ell=\phi$.

2）任意の k に対して $f^2(J_k)=J_k$ かつ $O_{f^4}(x_k)$ が J_k で dense であるような点 $x_k\in J_k$ が存在する。

3）$f^2|I\setminus\bigcup J_i=id_{I\setminus\bigcup J_i}$.

例えば例3では $J_1=I$ とすればよい。

証明の概略. (I,f) が内点を持つ indecomposable continuum を含ま

ない時は、定理5によって $p:(I,f)\twoheadrightarrow G$ （Gはarc）と同相写像 $\bar{f}:G\twoheadrightarrow G$ が $p\circ\hat{f}=\bar{f}\circ p$ となるように取れる。$\mathrm{Per}\,\hat{\bar{f}}$ はGでdenseだから、$\hat{\bar{f}}^2=\mathrm{Id}_G$ であるがpが同相であることが示せるので $\hat{f}^2=$ $=\mathrm{Id}_{(I,f)}$. 従って $f^2=\mathrm{Id}_I$ である。

(I,f)が内点を持つindecomposable continuumを含む時は、$\mathcal{H}$ をそのようなものの全体とする。任意の $H\neq K\in\mathcal{H}$ に対して $\mathrm{int}\,H\cap\mathrm{int}\,K=\phi$ だから $\mathcal{H}$ は高々可算である。$\mathcal{H}=(H_i)$ とおき、$J_i=\pi_0(H_i)$ とおくと (J_i) が求めるものである事が示される。

参考文献

1. J. Auslander - J. A. Yorke; Interval maps, factors of maps, and chaos, Tohoku Math. J. 32 (1980), p.177-188.
2. M. Barge - J. Martin; Chaos, Periodicity, and Snake-like continua, Trans. A.M.S. 289 (1985), p.355-365.
3. ______________; Dense orbit on the interval, Mich. Math. J. 34 (1987) p.3-11.
4. ______________; Dense periodicity on the interval, Proc. A.M.S. 94 (1985) p.731-735.
5. R.H. Bing; Snake-like continua, Duke Math. J. (1951) p.653 - 663.

6. T. Y. Li - J. A. Yorke; Period three implies chaos, Amer. Math. Monthly 82 (1975), p. 985 - 992.

7. P. Stephan; A theorem of Sarkovski on the coexistence of periodic points of continuous endomorphisms of the real line, Comm. Math. Phys. 54 (1977), p. 237 - 248.

8. J. Hocking - G. Young; _Topology_, Addison-Wesley Pub. (1961).