Title	多次元空間での非線形 Klein-Gordon および Liouville 方程式の厳密解(戸田格子とその周辺)
Author(s)	松野, 好雅
Citation	数理解析研究所講究録 (1988), 650: 196-206
Issue Date	1988-04
URL	http://hdl.handle.net/2433/100318
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
650巻 1988年 196-206

多次元空間での非線形Klein-GordonおよびLiouville方程式の厳密解

山口大学教養部物理　松野好雅(Yoshimasa Matsuno)

I. 序論

非線形偏微分方程式の厳密解法として現在、逆散乱法、Bäcklund変換、双一次変換法(Hirotaの方法)等が知られている。これらの解法は、時間変数に加えて空間変数が1つ、ないし2つの方程式に対して特に有効である。多次元空間への拡張は色々と試みられているが、低次元系ほどうまくは行っていないようである。

一方、特解を求める方法のひとつとして、方程式の独立変数に関する対称性を考察して適当な対称変数を導入し、偏微分方程式を常微分方程式に還元する方法が知られている。これを"Symmetry reduction"と呼ぶ。両者共に非線形方程式ではあるが、後者は前者に比べて取り扱いが容易であることは言うまでもない。ここではSymmetry reductionの方法を用いて、多次元空間での非線形Klein-Gordon、

および Liouville 方程式の厳密解を構成する。

最初に、4次元空間での非線形 Klein-Gordon 方程式

$$\Box_4 \phi + \lambda \phi^p = 0, \quad (p \neq 0, 1) \tag{1.1}$$

および、Louville 方程式

$$\Box_4 \phi + e^{\lambda \phi} = 0 \tag{1.2}$$

を考える。ここで

$$\Box_4 = \sum_{\mu=1}^{4} \frac{\partial^2}{\partial x_\mu^2} \tag{1.3}$$

は、4次元の Laplace 演算子である。次に一般の n 次元 Euclid 空間での上記方程式について考察する。

基本的なアイディアは、Laplace 演算子の座標 x_μ のすべての置換に対する不変性を考慮して、対称変数として座標 x_μ の基本対称式を導入したことである。すなわち

$$S_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \tag{1.4a}$$

$$S_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 \tag{1.4b}$$

$$S_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 \tag{1.4c}$$

$$S_4 = x_1x_2x_3x_4 \tag{1.4d}$$

さらに独立変数(相似変数)、$y = S_2/S_1^2$ を導入すると、方程式(1.1)および(1.2)は、常微分方程式に還元でき、種々の厳密解が求められる。なお、以下で述べることの詳細については文献1を参照のこと。

II. 非線形 Klein-Gordon 方程式

A. 常微分方程式への還元

(1.4)の対称変数で Laplace 演算子を書きかえると

$$\Box_4 = 4\frac{\partial^2}{\partial s_1^2} + (3s_1^2 - 2s_2)\frac{\partial^2}{\partial s_2^2} + (2s_2^2 - 2s_1s_3 - 4s_4)\frac{\partial^2}{\partial s_3^2} + (s_3^2 - 2s_2s_4)\frac{\partial^2}{\partial s_4^2} + 6s_1\frac{\partial^2}{\partial s_1\partial s_2} + 4s_2\frac{\partial^2}{\partial s_1\partial s_3} + 2s_3\frac{\partial^2}{\partial s_1\partial s_4} + 2(2s_1s_2 - 3s_3)\frac{\partial^2}{\partial s_2\partial s_3} + 2(s_1s_3 - 4s_4)\frac{\partial^2}{\partial s_2\partial s_4} + 2(s_2s_3 - 3s_1s_4)\frac{\partial^2}{\partial s_3\partial s_4} \tag{2.1}$$

以下では簡単のため、ϕ が s_1、および s_2 のみの関数の場合を考える。このとき (1.1) は

$$4\frac{\partial^2\phi}{\partial s_1^2} + 6s_1\frac{\partial^2\phi}{\partial s_1\partial s_2} + (3s_1^2 - 2s_2)\frac{\partial^2\phi}{\partial s_2^2} + \lambda\phi^p = 0 \tag{2.2}$$

となる。さらに方程式 (2.2) のスケール変換、$s_1 \to \gamma s_1$、$s_2 \to \gamma^2 s_2$，$\phi \to \gamma^{-2/(p-1)}\phi$ (γ : 定数) に対する不変性を利用して次の形の ϕ を仮定する。

$$\phi = [\sqrt{\lambda}\, s_1 f(y)]^{-2/(p-1)}, \quad y = s_2/s_1^2 \tag{2.3}$$

(2.3)を (2.2) へ代入すると、f に関する次の常微分方程式が得られる。

$$(2y-1)(8y-3)\left(ff'' - \frac{p-1}{p+1}f'^2\right) + \left[\frac{8(3p+1)}{p-1}y - \frac{12p}{p-1}\right]ff' - \frac{4(p+1)}{p-1}f^2 - \frac{p-1}{2} = 0, \quad (p \neq 0, 1) \tag{2.4}$$

ここで $'$ は y に関する微分を表わす。

B. 厳密解

方程式(2.4)は、pの値に応じて種々の厳密解を有する。ここではf、および対応するϕに対して結果のみを記す。

1. $p=2$

$$f=\pm i2\sqrt{6} \tag{2.5a}$$

$$\phi=-\frac{24}{\lambda}(s_1)^{-1}=-\frac{24}{\lambda}\left(\sum_{\mu=1}^{4}x_\mu\right)^{-1} \tag{2.5b}$$

$$f=\pm\left(y-\frac{3}{8}\right)^{1/2} \tag{2.6a}$$

$$\phi=-\frac{8}{\lambda}(3s_1^2-8s_2)^{-1}=-\frac{8}{\lambda}\Big[\sum_{\substack{\mu,\nu=1\\(\mu<\nu)}}^{4}(x_\mu-x_\nu)^2\Big]^{-1} \tag{2.6b}$$

2. $p=3$

$$f=\pm\frac{i}{2\sqrt{2}} \tag{2.7a}$$

$$\phi=\pm i\sqrt{\frac{8}{\lambda}}\left(\sum_{\mu=1}^{4}x_\mu\right)^{-1} \tag{2.7b}$$

$$f=\pm(-2y+1)^{1/2} \tag{2.8a}$$

$$\phi=\pm[\lambda(s_1^2-2s_2)]^{-1/2}\equiv\pm(\lambda x^2)^{-1/2} \tag{2.8b}$$

$$f=\pm\left(-3y+\frac{5}{4}\right) \tag{2.9a}$$

$$\phi=\pm\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\,\frac{4s_1}{5s_1^2-12s_2}=\pm\frac{2}{\sqrt{\lambda}}\,\frac{\sum_{\mu=1}^{4}x_\mu}{x^2+\frac{1}{4}\sum_{\mu,\nu=1}^{4}(x_\mu-x_\nu)^2} \tag{2.9b}$$

$p=3$の場合は、方程式(1.1)は次の共形変換に対して不変:

$$x_\mu\to\tilde{x}_\mu=(x_\mu+c_\mu x^2)/\sigma(x) \tag{2.10a}$$

$$\phi(x)\to\tilde{\phi}(x)=\phi(\tilde{x})/\sigma(x) \tag{2.10b}$$

$$\sigma(x)=1+2\sum_{\mu=1}^{4}c_\mu x_\mu+c^2x^2,\quad\left(c^2\equiv\sum_{\mu=1}^{4}c_\mu^2\right) \tag{2.10c}$$

解(2.7b)に共形変換(2.10)、および座標の平行移動 $x_\mu\to$

$x_\mu + i\beta/2 \ (\mu = 1 \sim 4)$ を行うと、新しい解

$$\phi = \pm (8\beta^2/\lambda)^{1/2}/(x^2+\beta^2) \qquad (2.11)$$

が得られる。これは、Belavin達によって最初求められたYang-Mills方程式のInstanton解に他ならない。一方球対称解(2.8b)は、Meron解として知られている。また(2.9b)は、$p=3$の場合においてのみ存在する興味ある解である。これに共形変換(2.10)を行うと、次の新しい解が得られる。

$$\phi = \pm\frac{4}{\sqrt{\lambda}}\frac{\tilde{c}_1 x^2 + \sum_{\mu=1}^{4} x_\mu}{(5\tilde{c}_1^2 - 12\tilde{c}_2)x^4 + 2(6\sum_{\mu=1}^{4} c_\mu x_\mu - \tilde{c}_1 \sum_{\mu=1}^{4} x_\mu)x^2 + 6x^2 - \sum_{\mu,\nu=1}^{4} x_\mu x_\nu} \qquad (2.12a)$$

ここで

$$\tilde{c}_1 \equiv \sum_{\mu=1}^{4} c_\mu \qquad (2.12b)$$

$$\tilde{c}_2 \equiv \sum_{\substack{\mu,\nu=1 \\ (\mu<\nu)}}^{4} c_\mu c_\nu \qquad (2.12c)$$

3. $p \neq 2, 3$

$$y = \pm(ay+b)^{1/2}, \quad \begin{cases} a = -(p-1)^2/(p-3) \\ b = \frac{3}{8}\frac{(p-1)^2}{p-3} \end{cases} \qquad (2.13a)$$

$$\phi = \left[\pm\frac{\sqrt{\lambda}(p-1)}{\sqrt{8(p-3)}}\left\{\sum_{\substack{\mu,\nu=1 \\ \mu<\nu}}^{4}(x_\mu - x_\nu)^2\right\}^{1/2}\right]^{-2/(p-1)} \qquad (2.13b)$$

$$y = \pm(ay+b)^{1/2}, \quad \begin{cases} a = -(p-1)^2/2(p-2) \\ b = \frac{1}{4}\frac{(p-1)^2}{p-2} \end{cases} \qquad (2.14a)$$

$$\phi = \left[\pm\frac{\sqrt{\lambda}(p-1)}{\sqrt{4(p-2)}}\sqrt{x^2}\right]^{-2/(p-1)} \qquad (2.14b)$$

III. Liouville 方程式

A. 常微分方程式への還元

変数変換

$$\phi = \frac{1}{\lambda} \ln g \tag{3.1}$$

により(1.2)は次の方程式に変換される。

$$g \Box_4 g - \sum_{\mu=1}^{4} \left(\frac{\partial g}{\partial x_\mu} \right)^2 + \lambda g^3 = 0 \tag{3.2}$$

さらに、gがs_1、およびs_2のみの関数と仮定すると、(3.2)は

$$\begin{aligned} & g \left[4 \frac{\partial^2 g}{\partial s_1^2} + 6 s_1 \frac{\partial^2 g}{\partial s_1 \partial s_2} + (3 s_1^2 - 2 s_2) \frac{\partial^2 g}{\partial s_2^2} \right] \\ & - 4 \left(\frac{\partial g}{\partial s_1} \right)^2 - 6 s_1 \frac{\partial g}{\partial s_1} \frac{\partial g}{\partial s_2} - (3 s_1^2 - 2 s_2) \left(\frac{\partial g}{\partial s_2} \right)^2 \\ & + \lambda g^3 = 0 \end{aligned} \tag{3.3}$$

となる。　方程式(3.3)のスケール変換$s_1 \to \gamma s_1$, $s_2 \to \gamma^2 s_2$, $g \to \gamma^{-2} g$に対する不変性を考慮して

$$g = [\lambda s_1^2 f(y)]^{-1}, \quad y = s_2 / s_1^2 \tag{3.4}$$

の形の解を仮定すると、(3.3)は次の常微分方程式に還元される。

$$\begin{aligned} & (2y-1)(8y-3)(f f'' - f'^2) + 12(2y-1) f f' \\ & - 8 f^2 - f = 0 \end{aligned} \tag{3.5}$$

B. 厳密解

結果のみを記すと以下のようになる。

$$f = -\frac{1}{8} \tag{3.6a}$$

$$\phi = -\frac{1}{\lambda} \ln \left[-\frac{\lambda}{8} \left(\sum_{\mu=1}^{4} x_\mu \right) \right] \tag{3.6b}$$

$$f = -y + \frac{3}{8} \qquad (3.7a)$$

$$\phi = -\frac{1}{\lambda} \ln \left[\frac{\lambda}{8} \sum_{\substack{\mu,\nu=1 \\ (\mu<\nu)}}^{4} (x_\mu - x_\nu)^2 \right] \qquad (3.7b)$$

$$f = -\frac{1}{2} y + \frac{1}{4} \qquad (3.8a)$$

$$\phi = -\frac{1}{\lambda} \ln \left[\frac{\lambda}{4} x^2 \right] \qquad (3.8b)$$

IV. n次元Euclid空間への一般化

ここでは前章の議論をn次元Euclid空間へ拡張する。厳密解の構成法は、4次元の場合と同様であるので、ここでは結果のみを記す。

A. 非線形Klein-Gorden方程式

$$\Box_n \phi + \lambda \phi^p = 0, \quad (p \neq 0, 1) \qquad (4.1a)$$

$$\Box_n = \sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_\mu^2} \qquad (4.1b)$$

方程式(4.1)に対して次の形の解を求める。

$$\phi = \left[\sqrt{\lambda}\, s_1 f(y) \right]^{-2/(p-1)}, \quad y = s_2 / s_1^2 \qquad (4.2)$$

(4.2)を(4.1)へ代入すると、次の常微分方程式へ還元される。

$$\begin{aligned} &[4ny^2 - 2(2n-1)y + n-1]\left(ff'' - \frac{p+1}{p-1} f'^2\right) \\ &+ \frac{2}{p-1}[n(3p+1)y - 2(n-1)p] ff' \\ &- \frac{n(p+1)}{p-1} f^2 - \frac{p-1}{2} = 0 \end{aligned} \qquad (4.3)$$

方程式(4.3)の厳密解f、および対応するϕとして次の形のものが得られた。

$$f = \pm i(p-1)/\sqrt{2n(p+1)} \qquad (4.4a)$$

$$\phi = \left[\pm i(p-1)\left\{\frac{\lambda}{2n(p+1)}\right\}^{1/2}\left(\sum_{\mu=1}^{n} x_\mu\right)\right]^{-2/(p-1)} \tag{4.4b}$$

$$f = \frac{p-1}{(2n)^{1/2}\left[(p-1)n-3p+1\right]^{1/2}}(-2ny+n-1)^{1/2}, \tag{4.5a}$$

$$((p-1)n \neq 3p-1)$$

$$\phi = \left[\pm \frac{\sqrt{\lambda}(p-1)}{(2n)^{1/2}\{(p-1)n-3p+1\}^{1/2}}\left\{\sum_{\substack{\mu,\nu=1\\(\mu<\nu)}}^{n}(x_\mu - x_\nu)^2\right\}^{1/2}\right]^{-2/(p-1)} \tag{4.5b}$$

$$f = \frac{p-1}{2^{1/2}\left[(p-1)n-2p\right]^{1/2}}(2y-1)^{1/2}, \quad ((p-1)n \neq 2p) \tag{4.6a}$$

$$\phi = \left[\pm \frac{\sqrt{\lambda}(p-1)}{2^{1/2}\{(p-1)n-2p\}^{1/2}}\left(\sum_{\mu=1}^{n} x_\mu^2\right)^{1/2}\right]^{-2/(p-1)} \tag{4.6b}$$

以上の解の内で、$p=(n+2)/(n-2)$ の場合は、方程式(4.1)が次の共形不変なスカラー場の方程式となるため特に興味深い。

$$\Box_n \phi + \lambda \phi^{(n+2)/(n-2)} = 0 \tag{4.7}$$

方程式(1.1)で $p=3$ の場合は、(4.7)で $n=4$ とした方程式に相当する。このとき解(4.4b)、(4.5b)、および(4.6b)はそれぞれ次のようになる。

$$\phi = \left[\pm i\frac{2}{n}\sqrt{\frac{\lambda}{n-2}}\left(\sum_{\mu=1}^{n} x_\mu\right)\right]^{-(n-2)/2}, \quad (n \neq 2) \tag{4.8}$$

$$\phi = \left[\pm \frac{2\sqrt{\lambda}}{\{n(n-2)(n-4)\}^{1/2}}\left\{\sum_{\substack{\mu,\nu=1\\(\mu<\nu)}}^{n}(x_\mu - x_\nu)^2\right\}^{1/2}\right]^{-(n-2)/2} \tag{4.9}$$

$$\phi = \left[\pm \frac{2\sqrt{\lambda}}{n-2}\left(\sum_{\mu=1}^{n} x_\mu^2\right)^{1/2}\right]^{-(n-2)/2} \tag{4.10}$$

最後に(2.9b)、あるいは(2.12)の形の解は、$n=4$ においてのみ存在することに注意する。これは4次元Euclid空間の特異な面のひとつであるかもしれない。

B. Liouville 方程式

$$\Box_n \phi + e^{\lambda\phi} = 0 \tag{4.11}$$

ϕ に対して次の形の解を求める。

$$\phi = -\frac{1}{\lambda} \ln[\lambda s_1^2 f(y)], \quad y = s_2/s_1^2 \tag{4.12}$$

このとき (4.11) は

$$[4ny^2 - 2(2n-1)y + n-1](ff'' - f'^2)$$
$$+ [6ny - 4(n-1)]ff' - 2nf^2 - f = 0 \tag{4.13}$$

となる。方程式(4.13)の厳密解 f、および対応する ϕ は次のとおりである。

$$f = -\frac{1}{2n} \tag{4.14a}$$

$$\phi = -\frac{1}{\lambda} \ln\left[-\frac{\lambda}{2n}\left(\sum_{\mu=1}^{n} x_\mu\right)^2\right] \tag{4.14b}$$

$$f = \left(-y + \frac{n-1}{2n}\right)/(n-3), \quad (n \neq 3) \tag{4.15a}$$

$$\phi = -\frac{1}{\lambda} \ln\left[\frac{\lambda}{2n(n-3)} \sum_{\substack{\mu,\nu=1 \\ (\mu<\nu)}}^{n} (x_\mu - x_\nu)^2\right] \tag{4.15b}$$

$$f = (-2y+1)/2(n-2), \quad (n \neq 2) \tag{4.16a}$$

$$\phi = -\frac{1}{\lambda} \ln\left[\frac{\lambda}{2(n-2)} \sum_{\mu=1}^{n} x_\mu^2\right] \tag{4.16b}$$

V．議論

多次元空間における非線形 Klein-Gordon 方程式、および Liouville 方程式の厳密解法に関してここで議論した方法はさらに一般化できる。 ここではそれの要約を行う。

1．独立変数の Reduction

変数 $y_1 = s_2/s_1^2$, $y_2 = s_3/s_1^3$, ..., $y_{n-1} = s_n/s_1^n$ を導入することにより、独立変数の数を n 個から $n-1$ 個に減らすことができ、より取り扱い易い方程式となる。

2．解の代数的構成

これを方程式(1.1)の場合に説明する。$\phi = g/f$ とおくと(1.1)は

$$f\left[f\Box_4 g - g\Box_4 f - 2\sum_{\mu=1}^{4}\frac{\partial g}{\partial x_\mu}\frac{\partial f}{\partial x_\mu}\right] + g\left[2\sum_{\mu=1}^{4}\left(\frac{\partial f}{\partial x_\mu}\right)^2 + \lambda g^2\right] = 0 \qquad (5.1')$$

となるが、これを次の2組のBilinearな方程式に分離する。

$$f\Box_4 g - g\Box_4 f - 2\sum_{\mu=1}^{4}\frac{\partial g}{\partial x_\mu}\frac{\partial f}{\partial x_\mu} = \alpha g\Box_4 f \qquad (5.2a)$$

$$2\sum_{\mu=1}^{4}\left(\frac{\partial f}{\partial x_\mu}\right)^2 + \lambda g^2 = -\alpha f\Box_4 f \qquad (5.2b)$$

ここで、αは任意定数である。f、およびgに対して

f：x_μに関するm次同次対称式

g：　〃　$m-1$　〃

を仮定すると、f、およびgは、基本対称式S_μによって一意的に次の形に書くことができる。

$$f = \sum_{a_1,\cdots,a_4} f_{a_1a_2a_3a_4} S_1^{a_1}S_2^{a_2}S_3^{a_3}S_4^{a_4} \qquad (5.3a)$$

$$g = \sum_{b_1,\cdots,b_4} f_{b_1b_2b_3b_4} S_1^{b_1}S_2^{b_2}S_3^{b_3}S_4^{b_4} \qquad (5.3b)$$

ここで、$a_j\,(j=1\sim4)$に関する和は、$\sum_{j=1}^{4} j a_j = m$ を満足するすべてのa_jの組合せについて、$b_j\,(j=1\sim4)$に関する和は$\sum_{j=1}^{4} j b_j = m-1$を満足するすべての$b_j$の組合せについて行うものとする。

(5.3a)、(5.3b)を方程式(5.2a)、および(5.2b)に代入して方程式の両辺の $S_1^{\alpha_1}S_2^{\alpha_2}S_3^{\alpha_3}S_4^{\alpha_4}$ $(\sum_{j=1}^{4} j\alpha_j = 2m-3)$、および$S_1^{\beta_1}S_2^{\beta_2}S_3^{\beta_3}S_4^{\beta_4}$ $(\sum_{j=1}^{4} j\beta_j = 2m-2)$の係数を比較すると未知数$f_{a_1a_2a_3a_4}$、および

$g_{b_1 b_2 b_3 b_4}$ に関する2次の同次代数方程式系が得られる。この系は一般には Overdetermined system（方程式の個数が未知数の個数より多い系）となるが、解の存在は純粋に代数的な手続きにより調べることができる。

3. Minkowski 空間における厳密解

$n+1$ 次元 Minkowski 空間での非線形 Klein-Gordon 方程式

$$\left(\sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_\mu^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi + \lambda \phi^p = 0 \qquad (5.4)$$

を考える。ここで $x_\mu\ (\mu=1\sim n)$ の基本対称式 $S_\mu\ (\mu=1\sim n)$

$$S_1 = \sum_{\mu=1}^{n} x_\mu,\quad S_2 = \sum_{\mu<\nu} x_\mu x_\nu,\ \ldots,\ S_n = \prod_{\mu=1}^{n} x_\mu \qquad (5.5)$$

を導入して演算子 $\sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_\mu^2}$ を S_μ で書きかえると、前章で行ったのと同様の議論が展開できる。

VI. 文献

1. Y. Matsuno, J. Math. Phys. 28 (1987) 2317.
2. Y. Matsuno, Lett. in Math. Phys. (印刷中)