Title	1次元ハバード模型の可積分性(戸田格子とその周辺)
Author(s)	和達, 三樹
Citation	数理解析研究所講究録 (1988), 650: 148-160
Issue Date	1988-04
URL	http://hdl.handle.net/2433/100321
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
650巻 1988年 148-160

1次元ハバード模型の可積分性
Integrability of the one-dimensional Hubbard model

東大教養物理　和達三樹（Miki Wadati）

1. はじめに

戸田格子の発見から20年の月日がすぎた。「十年一昔」というが、20年にわたり、戸田格子の研究、そして、ソリトンの研究が続き、新しい局面が今なお生まれてくるのは、まことに驚異的であると感じている。

簡単に、ソリトンを中心とする非線形力学のこの20年の進展をふりかえってみよう。60年代には、現在のソリトン、カオス、といった術語はまだ普及しておらず、regular（non-ergodic）、irregular（ergodic）と分類することが多かったと記憶している。70年前半には、ソリトン方程式の提出（KdV, Toda, Sine-Gordon, reductive perturbation）、ソリトン方程式の解法（逆散乱法、広田の方法、Bäcklund変換）、そして、プラズマや流体での実験的験証が出そろい、ソリトン概念が確立された。ソリトンという命名は、

もちろんKruskalとZabuskyによるものであるが、Seeger等(1953)、Skyrme(1962)等の先駆的な仕事も忘れてはいけない。

70年代後半は、ソリトン概念の各物理分野への波及と特徴づけられる。素粒子論におけるモノポール、インスタントン、そして、トポロジー的ソリトンの分類、ソリトンの半古典論(Dashen, Hasslacher, Neveu)、ソリトンの統計力学(Krumhansl, Schrieffer)等の研究により、物理学におけるソリトンの役割が明確になった。80年代に入り、数学化(Sato, Jimbo, Miwa, Date, Kashiwara)とともに、ソリトンの量子論や厳密に解ける模型との関係が議論されるようになり、ソリトン理論はさらに活発に研究されている。

この講演では、量子論的研究の一端を紹介する。その前に古典論としての残された問題を簡単にまとめる。外力や散逸下でのソリトン運動、多次元空間での非線形波動、はまだ未解決の問題である。また、プラズマや量子力学系で実験可能な不安定系のソリトンの研究も、非線形物理学の確立にとって重要な問題である。その観点から、Stochastic KdV方程式[1)]、外力による共鳴的Break-up[2)]、Unstable Sine-Gordon方程式[3)]を文献としてあげておこう。

2. ハバード模型

1次元ハバード模型の可積分性について述べていく。その動機は

(1) ハバード模型は、物性物理学において、最も興味深い模型の1つである。

(2) 量子逆散乱法の一般性を主張するうえで、この模型が含まれていることを確認することは意義深い。

(3) 2次元古典統計力学模型、1次元量子スピン系、1次元フェルミオン系の相互関係をより明確にする。

1次元ハバード模型(Hubbard, 1963)を紹介する。1次元格子を考え、フェルミオン演算子

a_{ms}^{+} ; creation operator with spin s ($s=\uparrow$ or $\downarrow$) at site m,

a_{ms} ; annihilation operator with spin s ($s=\uparrow$ or $\downarrow$) at site m,

を定義する。これらの演算子は、反交換関係

$$\{a_{ms}, a_{m's'}\} = \{a_{ms}^{+}, a_{m's'}^{+}\} = 0 , \qquad (1)$$
$$\{a_{ms}, a^{+}_{m's'}\} = \delta_{mm'}\delta_{ss'} ,$$

をみたす。ハミルトニアン H は、

$$H = -\sum_{ms}(a_{m+1s}^{+}a_{m} + a_{ms}^{+}a_{m+1s})$$
$$+ U\sum_{m}(n_{m\uparrow}-\tfrac{1}{2})(n_{m\downarrow}-\tfrac{1}{2}) , \qquad (2)$$

$$n_{ms} \equiv a^{+}_{ms} a_{ms} \quad , \text{ number density operator } , \quad (3)$$

で定義される。ハミルトニアンの第1項は運動エネルギー（hopping）、第2項は斥力のクーロン相互作用を表わす。

ハバード模型がベーテ仮説法で解けることは Lieb-Wu[4)]によって既に示されている。これから述べることは、量子逆散乱法による可積分性の証明である[5)~7)]。等価なスピン系における証明は、Shastry[8)~9)]によって研究された。

3. Lax pair の発見[5)]

まず、次のようなJordin-Wigner変換を導入する。

$$\begin{aligned} a_{m\uparrow} &= \exp\left[i\frac{\pi}{2}\sum_{\ell=1}^{m-1}(\sigma_\ell^z - 1)\right]\cdot \sigma_m^- \quad , \\ a_{m\downarrow} &= \exp\left[i\frac{\pi}{2}\sum_{\ell=1}^{N}(\sigma_\ell^z - 1)\right]\cdot \exp\left[i\frac{\pi}{2}\sum_{\ell=1}^{m-1}\tau_\ell^z\right]\cdot \tau_m^- \quad , \end{aligned} \qquad (4)$$

$$\sigma_m^{\pm} = \frac{1}{2}(\sigma_m^x \pm i\sigma_m^y) , \quad \tau_m^{\pm} = \frac{1}{2}(\tau_m^x \pm i\tau_m^y) \quad , \qquad (5)$$

ここで、σ_m^i, τ_m^i ($i=1,2,3$ または x,y,z) は、

$$\begin{aligned} \sigma_m^i \sigma_m^j &= \delta_{ij} + \varepsilon^{ijk}\sigma_m^k \quad , \\ \tau_m^i \tau_m^j &= \delta_{ij} + \varepsilon^{ijk}\tau_m^k \quad , \end{aligned} \qquad (6)$$

$$[\sigma_m^i, \tau_m^j] = 0 \quad ,$$

をみたす Pauli operator である。変換(4)は、フェルミ演算子 $\{a_{m\uparrow}, a_{m\downarrow}\}$ を2種類のスピン $\{\sigma_m, \tau_m\}$ で表現する(または逆)を可能にする。よって、ハバード模型に等価なスピン系の Hamiltonian は

$$H = \sum_{m=1}^{N} (\sigma_{m+1}^{+}\sigma_m^{-} + \sigma_m^{+}\sigma_{m+1}^{-})$$
$$+ \sum_{m=1}^{N} (\tau_{m+1}^{+}\tau_m^{-} + \tau_m^{+}\tau_{m+1}^{-}) + \frac{1}{2}U\sum_{m=1}^{N}\sigma_m^{z}\tau_m^{z} \quad , \qquad (7)$$

で与えられる。このハミルトニアンの最初の2項は、2つの XY model であることに注意しよう。

量子逆散乱法の定式化は次のように行なわれる。線形方程式

$$\Psi_{m+1} = L_m(\lambda)\,\Psi_m \quad , \qquad (8)$$

$$\frac{d\Psi_m}{dt} = M_m\,\Psi_m \quad , \qquad (9)$$

を考える。演算子 L_m, M_m を Lax pair とよぶ。条件 $\lambda_t = 0$ と、(8),(9)の両立条件は

$$\frac{dL_m}{dt} = M_{m+1}L_m - L_m M_m \qquad (10)$$

を与える。(10)式が、考えている系の運動方程式と等価ならば、その系は完全積分可能系である。なぜならば、転送

行列 (transfer matrix)

$$T_N(\lambda) = \mathrm{Tr}\left(L_N(\lambda) L_{N-1}(\lambda) \cdots L_1(\lambda)\right) \qquad , \quad (11)$$

は時間に依存せず、$T_N(\lambda)$ の λ ベキ展開は、無限個の保存量を与えるからである。

X Y 模型に対する Lax pair は既に知られている[10]。σ スピンに対する Lax pair を $L_m^{(\sigma)}$, $M_m^{(\sigma)}$, τ スピンに対する Lax pair を $L_m^{(\tau)}$, $M_m^{(\tau)}$ と書く。

$$L_m^{(\sigma)} = w_4(\lambda) + w_3(\lambda)\sigma_m^z\sigma_0^z + 2w_1(\lambda)(\sigma_m^+\sigma_0^- + \sigma_0^+\sigma_m^-),$$

$$L_m^{(\tau)} = w_4(\lambda) + w_3(\lambda)\tau_m^z\tau_0^z + 2w_1(\lambda)(\tau_m^+\tau_0^- + \tau_0^+\tau_m^-), \qquad (12)$$

$$w_1(\lambda) = 1/2 \; , \quad w_3(\lambda) + w_4(\lambda) = \sin(\lambda + \pi/4),$$

$$w_4(\lambda) - w_3(\lambda) = \sin(\lambda - \pi/4) \qquad , \qquad (13)$$

$$M_m^{(\sigma)} = i(\sigma_m^+\sigma_{m-1}^- + \sigma_{m-1}^+\sigma_m^-) + \alpha\{(\sigma_m^+ + \sigma_{m-1}^+)\sigma_0^-$$
$$+ \sigma_0^+(\sigma_m^- + \sigma_{m-1}^-)\} + i\beta(\sigma_m^+\sigma_{m-1}^- - \sigma_{m+1}^+\sigma_m^-)\sigma_0^z \; ,$$

$$M_m^{(\tau)} = i(\tau_m^+\tau_{m-1}^- + \tau_{m-1}^+\tau_m^-) + \alpha\{(\tau_m^+ + \tau_{m-1}^+)\tau_0^-$$
$$+ \tau_0^+(\tau_m^- + \tau_{m-1}^-)\} + i\beta(\tau_m^+\tau_{m-1}^- - \tau_{m+1}^+\tau_m^-)\tau_0^z ,$$

σ_0, τ_0 は Pauli 行列 (14)

$$\alpha = -i/\cos(\lambda - \tfrac{\pi}{4}) \; , \quad \beta = \cos 2\lambda / (1 + \sin 2\lambda) \; . \qquad (15)$$

計算は少しめんどうだが、[5] 等価なスピン系(7)に対するLax pairは、

$$\frac{dL_m}{dt} = B_{m+1} L_m - L_m B_m \quad , \tag{16}$$

$$L_m = I_0 L_m^{(\sigma)} L_m^{(\tau)} I_0 \quad , \tag{17}$$

$$\begin{aligned} B_m = {} & I_0^{-1}(H_m^{(\sigma)} - H_m^{(\tau)}) I_0 - 2\alpha \sinh h \cdot \\ & \times \{ (\sigma_m^+ \sigma_0^- - \sigma_0^+ \sigma_m^-) \tau_0^z + \sigma_0^z (\tau_m^+ \tau_0^- - \tau_0^+ \tau_m^-) \} \\ & + \{ \alpha \sinh 2h \cdot \frac{1}{w_3} \left(-\frac{1}{2} + w_3 (w_4 - w_3) \right) \\ & \quad - \frac{i}{4} U \cdot \frac{w_4}{w_3} \} \sigma_0^z \tau_0^z \quad , \end{aligned} \tag{18}$$

$$I_0 = \cosh \frac{h}{2} + \sigma_0^z \tau_0^z \sinh \frac{h}{2} \quad , \tag{19}$$

$$U = 4 \sinh 2h / \cos 2\lambda \quad (\ h\text{の定義}) \tag{20}$$

であることがわかる。

最終目的であるところの、ハバード模型に対するLax pairは、Jordin-Wigner 変換

$$\begin{aligned} \sigma_m^- &= \exp\left[-i\pi \sum_{l=1}^{m-1} (n_{l\uparrow} - 1) \right] \cdot a_{m\uparrow} \ , \\ \sigma_m^z &= 2 n_{m\uparrow} - 1 \quad , \end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned} \tau_m^- &= \exp\left[-i\pi \sum_{l=1}^{m-1} (n_{l\downarrow} - 1) \right] \exp\left[-i\pi \sum_{l=1}^{N} (n_{l\uparrow} - 1) \right] a_{m\downarrow} \ , \\ \tau_m^z &= 2 n_{m\downarrow} - 1 \quad , \end{aligned} \tag{22}$$

によって、フェルミオン系に戻ればよいのであるが、単に代入しただけでは、Lax pair は非局所的（non-local）になる。ゲージ変換

$$\Phi_m = V_m \Psi_m \tag{23}$$

を導入して、

$$\mathcal{L}_m = V_{m+1} L_m V_m^{-1} \ , \quad \mathcal{B}_m = V_m B_m V_m^{-1} \ , \tag{24}$$

とすれば、$\mathcal{L}_m$ と $\mathcal{B}_m$ は局所的な演算子となり、これが1次元ハバード模型に対する Lax pair である。[5)]

4. Yang-Baxter 関係式[6)]

次に、1次元ハバード模型に対して、Yang-Baxter 関係式が成り立つことを述べよう。具体的な表式は紙面を使いすぎるので、結果だけを書くことにする。

1次元ハバード模型に対して、Yang-Baxter 関係式

$$\mathcal{R}(u,v)\,[\,\mathcal{L}_m(u) \underset{s}{\otimes} \mathcal{L}_m(v)\,]$$
$$= [\,\mathcal{L}_m(v) \underset{s}{\otimes} \mathcal{L}_m(u)\,]\,\mathcal{R}(u,v) \quad , \tag{25}$$

が成り立つ。ここで、$\underset{s}{\otimes}$ は Grassmann direct product

$$[A \underset{S}{\otimes} B]_{\alpha\gamma,\beta\delta} = (-1)^{[P(\alpha)+P(\beta)]P(\gamma)} \times A_{\alpha\beta} B_{\gamma\delta} , \qquad (26)$$

$$P(1) = P(4) = 0 , \quad P(2) = P(3) = 1 .$$

である。2つほど注意をしておこう；

1) $\mathcal{L}_m(u)$ は 4×4 行列、$\mathcal{R}(u,v)$ は 16×16 行列、であり、多くの trivial な方程式はあるものの、256 個の連立方程式を解かなければならない。しかし、Jordin－Wigner 変換で結ばれた積分可能なスピン系とフェルミオン系があるという情報により、256個から36個にへり、さらに、行列 $\mathcal{R}(u,v)$ の対称性により、結局は10個の連立方程式に帰着される。

2) $\mathcal{R}(u,v)$ は、$u-v$ の関数ではない。この結果は、Yang－Baxter 関係式をさらに一般化する際に重要な事実である。

保存量の計算は、通常よく用いられる spectral parameter による展開から求められる。すなわち、保存量は、モノドロミー行列

$$\mathcal{T}(\theta) = \overleftarrow{\prod} \mathcal{L}_m(\theta) \quad , \quad \theta = \lambda - \pi/4 \quad , \qquad (27)$$

から、転送行列 $T(\theta)$ をつくり、θのベキに展開すれば、その係数から求められる。

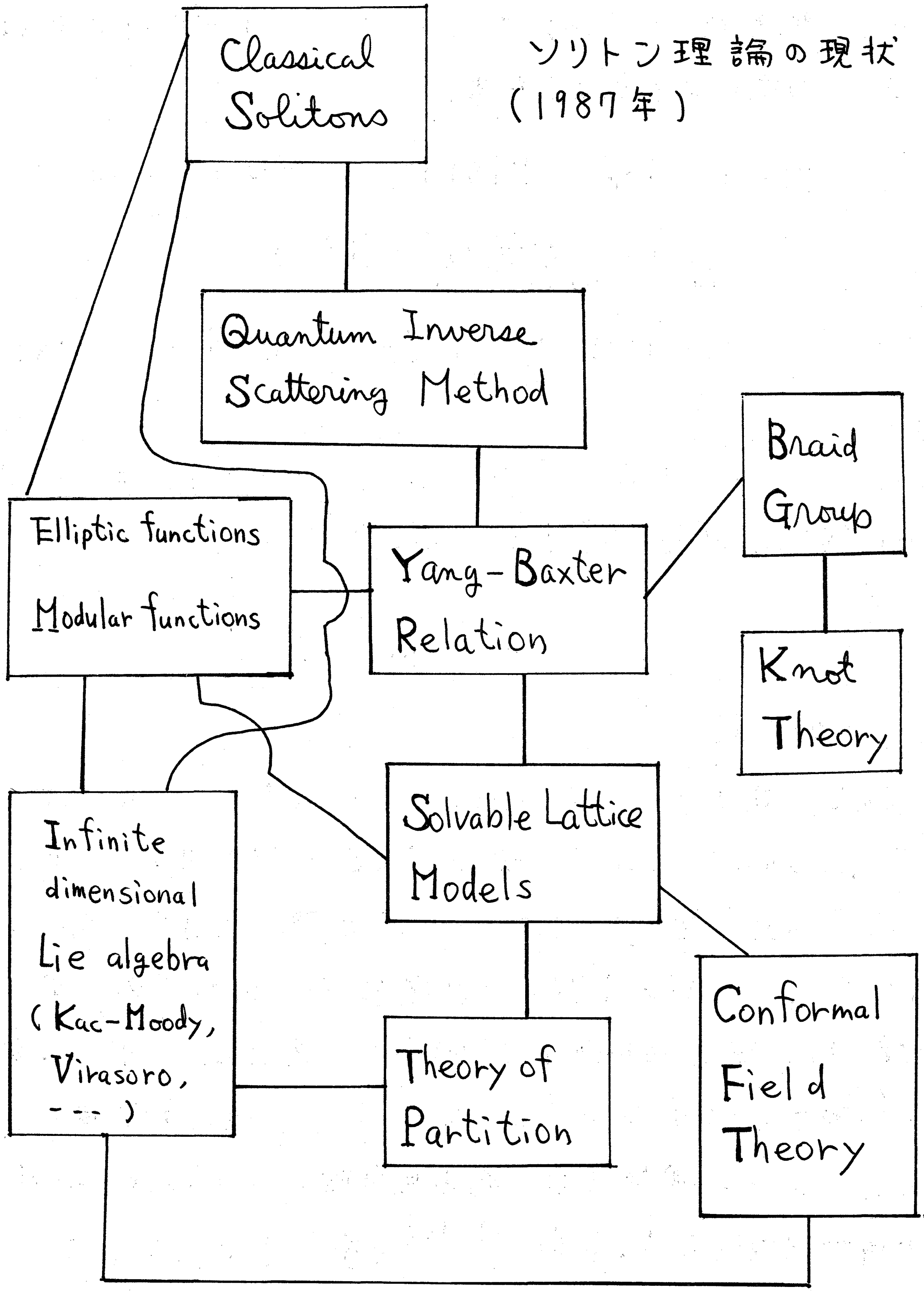
$$T(\theta) = \mathrm{str}\,(\ \mathcal{T}(\theta)\ )\quad , \quad \text{super-trace}$$
$$= \mathrm{tr}\,(\ \sigma^z \otimes \sigma^z \cdot \mathcal{T}(\theta)\ )$$
$$\simeq T(0)\cdot \left[\ 1 + \sum_{n=1}^{N-1} C_n\,\theta^n \right]\ . \qquad (28)$$

こうして求められた、$T(0), C_1, C_2, \cdots, C_{N-1}$ は、ハバード模型のN個の保存量である。[7)]

5. おわりに

以上に述べたことは、Eugenio Olmedilla (Univ. of Complutense, Madrid)、阿久津泰弘 (神奈川大工) 両氏との共同研究に基づく。また、これらの研究に直接、間接に加わってくれた大熊建司、国場敦夫、小西哲郎、矢嶋徹、出口哲生の諸氏に感謝する。最後に、ソリトン理論の現状を図にまとめる (次ページ)。最近の発展である、ソリトン理論による絡み目多項式 (link polynomial) の導出については、文献[11)~16)]を掲げるにとどめる。

ソリトン理論の現状
(1987年)



参考文献

1) M. Wadati : J. Phys. Soc. Japan 52 (1983) 2642.

M. Wadati and Y. Akutsu : J. Phys. Soc. Japan 53 (1984) 3342.

2) T. Konishi and M. Wadati : J. Phys. Soc. Japan 55 (1986) 1075.

3) T. Yajima and M. Wadati : J. Phys. Soc. Japan 56 (1987) 3069.

4) E. Lieb and F. Y. Wu : Phys. Rev. Lett. 20 (1968) 1445.

5) M. Wadati, E. Olmedilla and Y. Akutsu : J. Phys. Soc. Japan 56 (1987) 1340.

6) E. Olmedilla, M. Wadati and Y. Akutsu : J. Phys. Soc. Japan 56 (1987) 2298.

7) E. Olmedilla and M. Wadati : J. Phys. Soc. Japan 56 (1987) No.12.

8) B. S. Shastry : Phys. Rev. Lett. 56 (1986) 1529.

9) B. S. Shastry : Phys. Rev. Lett. 56 (1986) 2453.

10) K. Sogo and M. Wadati : Prog. Theor. Phys. 68 (1982) 85, 69 (1983) 431.

11) Y. Akutsu and M. Wadati : J. Phys. Soc. Japan 56 (1987) 839.

12) Y. Akutsu and M. Wadati : J. Phys. Soc. Japan 56 (1987) 3039.

13) Y. Akutsu, T. Deguchi and M. Wadati ; J. Phys. Soc. Japan 56 (1987) 3464.

14) Y. Akutsu and M. Wadati : Knots, Links, Braids and Exactly Solvable Models in Statistical Mechanics,

preprint, 1987.

15) T. Deguchi, Y. Akutsu and M. Wadati : J. Phys. Soc. Japan (to appear).

16) Y. Akutsu, T. Deguchi and M. Wadati : Exactly Solvable Models and New Link Polynomials IV. IRF Models, preprint, 1987.