

Title	戸田分子方程式(戸田格子とその周辺)
Author(s)	広田, 良吾
Citation	数理解析研究所講究録 (1988), 650: 93-99
Issue Date	1988-04
URL	http://hdl.handle.net/2433/100325
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

戸田分子方程式

広大工 広田良吾 (Ryogo Hirota)

現在ソリト方程式として知られて「非線形偏微分(差分)方程式は無数にあるが、それらの方程式の間、関係は必ずしも明確なっていない。我々はソリト方程式を変換して2次形式に表現し、2次形式によるソリト方程式の統一化を目指している。KP方程式系がソリト方程式の一つの基本的な方程式であり、KP方程式系の2次形式が Plücker relation に「等しい」と見出した佐藤スケールの成果は、この方向への偉大な一歩であるが、KP方程式系だけでは記述できないソリト方程式も数多く残されている。その一つとして戸田分子方程式がある。この論文では第一に、戸田分子方程式の解が任意関数を含む Wronskian で表現され、戸田分子方程式が行列式における Jacobi の公式に等しいことを示す。第二に戸田分子方程式の Bäcklund 変換の存在を示し、この Bäcklund 変換の式が、2-wave interaction の

拡張した $2N$ -wave interaction を記述する方程式は f_n であることは示す。

次の二次元戸田分子方程式を考慮する

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \log V_n = V_{n+1} - 2V_n + V_{n-1}, \quad n=1, 2, \dots, N, \quad (1)$$

境界条件は $V_0 = V_{N+1} = 0$ である。

変換 $V_n = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \log f_n$ を用いて (1) 式は次の二次形式で表す

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f_n \right] f_n - \left[\frac{\partial f_n}{\partial x} \right] \left[\frac{\partial f_n}{\partial y} \right] = f_{n+1} f_{n-1}. \quad (2)$$

(2) 式の解として任意関数 $W(x, y)$ の Wronskian を考慮する

$$f_n = \det \left| \frac{\partial^{i+j-2}}{\partial x^{i-1} \partial y^{j-1}} W(x, y) \right|_{1 \leq i, j \leq n}, \quad (3)$$

$$f_0 = 1.$$

(2) 式が (3) 式の表現に於て, Jacobi の公式

$$D \binom{n}{n} D \binom{n+1}{n+1} - D \binom{n}{n+1} D \binom{n+1}{n} = D \cdot D \binom{n, n+1}{n, n+1}. \quad (4)$$

Jacobi: Journ. f. Math 12, 1833, Werke 3, p. 191-268
に等しい事を示す。

次の記号を導入する。

$$D \equiv \det \left| \frac{\partial^{i+j-2}}{\partial x^{i-1} \partial y^{j-1}} \right|_{1 \leq i, j \leq n+1}$$

$$= f_{n+1}.$$

$D \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}$ = 行列式 D の中から i 行 j 列を消去した $n \times n$ 行列式,

$D \begin{pmatrix} i, k \\ j, \ell \end{pmatrix}$ = 行列式 D の中から i, k 行と j, ℓ 列を消去した $(n-1) \times (n-1)$ 行列式.

この記号によつて f_n と f_{n-1} はそれぞれ

$$f_n = D \begin{pmatrix} n+1 \\ n+1 \end{pmatrix}, \quad f_{n-1} = D \begin{pmatrix} n, n+1 \\ n, n+1 \end{pmatrix}$$

と表現される。一方 Wronskian の微分が持つ簡潔な性質によ

つて、 f_n の微分は次のように存する

$$\frac{\partial f_n}{\partial x} = D \begin{pmatrix} n \\ n+1 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial f_n}{\partial y} = D \begin{pmatrix} n+1 \\ n \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial^2 f_n}{\partial x \partial y} = D \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix}.$$

これらの関係式を 2 次形式 (2) に代入すると、(2) 式は次の形式

$$D \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} D \begin{pmatrix} n+1 \\ n+1 \end{pmatrix} - D \begin{pmatrix} n \\ n+1 \end{pmatrix} D \begin{pmatrix} n+1 \\ n \end{pmatrix} = D \cdot D \begin{pmatrix} n, n+1 \\ n, n+1 \end{pmatrix}$$

と表す。Jacobi の公式に存する。

次に二次元戸田分子方程式の Bäcklund 変換を考へる。
二次形式 (2) 式は 微分演算子

$$D_x^n D_y^m f(x, y) \cdot g(x, y) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'} \right)^n \left(\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y'} \right)^m f(x, y) g(x', y') \Big|_{\substack{x'=x \\ y'=y}}$$

と導くことができる

$$D_x D_y f_n \cdot f_n = 2 f_{n+1} f_{n-1} \quad (5)$$

と表現される。二次形式の Bäcklund 変換の式は

$$\begin{cases} D_x f_n' \cdot f_n = f_{n+1} f_{n-1}' & (6) \\ D_y f_{n+1} \cdot f_n' = f_{n+1}' f_n & (7) \end{cases}$$

と示すことができる

$$D_x D_y f_n' \cdot f_n' = 2 f_{n+1}' f_{n-1}' \quad (8)$$

が成立する。

(6), (7) 式の両立条件が戸田分子方程式を与えることを示す。

今

$$f_n' = \psi_n f_n, \quad V_n = \frac{d^2}{dt^2} \log f_n = \frac{f_{n+1} f_{n-1}}{f_n^2}$$

$$I_n = \frac{\partial}{\partial y} \log(f_{n+1}/f_n) = \frac{D_x f_{n+1} \cdot f_n}{f_{n+1} f_n}$$

とおくと、式(6),(7)は次の逆散乱形式と与えらる

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \psi_n}{\partial x} &= V_n \psi_{n-1}, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \psi_n}{\partial y} &= -\psi_{n+1} - I_n \psi_n. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

(9), (10)式に對する両立条件 $\frac{\partial^2 \psi_n}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial y \partial x}$ より、次式

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \log V_n &= I_{n-1} - I_n, \\ \frac{\partial}{\partial y} I_n &= V_n - V_{n+1}. \end{aligned} \right.$$

が得られる。この式より I_n を消去すると、戸田分子方程式

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \log V_n = V_{n+1} - 2V_n + V_{n-1}$$

と与えらる。

2次形式による Bäcklund 変換の式は新しいソリト方程式と与えらるゝことが知られてゐる。このために次の新しい従属変数 u_n, v_n を導入する。

$$U_n = -\frac{\partial}{\partial y} \log(f_n/f_{n-1}') \quad (11)$$

$$= -\frac{D_y f_n \cdot f_{n-1}'}{f_n f_{n-1}'} \quad (\text{定義 } 1 = f_{2,2}) \quad (12)$$

$$= -\frac{f_n' f_{n-1}}{f_n f_{n-1}'} \quad ((17) \text{式 } f_1) \quad (13)$$

$$V_n = -\frac{\partial}{\partial x} \log(f_n'/f_n) \quad (14)$$

$$= -\frac{D_x f_n' \cdot f_n}{f_n' f_n} \quad (\text{定義 } 1 = f_{2,2}) \quad (15)$$

$$= -\frac{f_{n+1} f_{n-1}'}{f_n' f_n} \quad ((16) \text{式 } f_1) \quad (16)$$

と定義する。このとき

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \log U_n &= \frac{\partial}{\partial x} [\log(f_n'/f_n) - \log(f_{n-1}'/f_n)] \quad ((13) \text{式 } f_1) \\ &= -V_n + V_{n-1} \quad ((14) \text{式 } f_1) \quad (17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \log V_n &= \frac{\partial}{\partial y} [\log(f_{n+1}/f_n') - \log(f_n/f_{n-1}')] \quad ((16) \text{式 } f_1) \\ &= -U_{n+1} + U_n \quad ((11) \text{式 } f_1) \quad (18) \end{aligned}$$

(17) (18) 式は次の形に等しい

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_n}{\partial x} &= u_n (v_{n-1} - v_n), \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v_n}{\partial y} &= v_n (u_n - u_{n+1}), \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

$n = 1, 2, \dots, N$. 境界条件は $v_0 = 0, u_{N+1} = 0$ である。

この式は $N=1$ のとき、よく知られてゐる "2-wave interaction" の式

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= -uv, \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= vu, \end{aligned} \right\}$$

に一致する。(19), (20)式を "2N-wave interaction"

の式と呼ぶ。 ("Exact Solution to 2N-Wave Interaction"

by Ryogo Hirota, J. Phy. Soc. Jpn. #2. Vol.57 (1988)).

戸田分子方程式の Bäcklund 変換によつて 2N-Wave interaction の式が得られたが、2N-Wave interaction の Bäcklund 変換によつて新しい方程式が得られる。戸田分子方程式の解のもつ自由度 (任意関数で表わされてゐる) を利用すると、これらの方程式と KP 方程式の Coupled した方程式が考えられる。この立場からソリトン方程式の統一化を進めよう。