

Title	The 3+1 Dimensional Toda Equation and its Exact Solutions(Toda Lattice and the Related Topics)
Author(s)	中村, 明
Citation	数理解析研究所講究録 (1988), 650: 87-92
Issue Date	1988-04
URL	http://hdl.handle.net/2433/100326
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

The 3+1 Dimensional Toda Equation and its Exact Solutions

Akira NAKAMURA (中村 明)

Physics Lab., Osaka University of Foreign Studies

We consider the 3+1 dimensional Toda equation of the following form, $\Delta \log V_n - V_{n+1} + 2V_n - V_{n-1} = 0$, where $\Delta \equiv \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2 + \partial^2 / \partial z^2 = \partial^2 / \partial r^2 + (2/r)(\partial / \partial r) + r^{-2}(\partial^2 / \partial \theta^2 + \cot \theta (\partial / \partial \theta) + (1/\sin^2 \theta) \partial^2 / \partial \phi^2)$. It is shown that if we confine the form of V_n to the special form $V_n = V_n(r, \theta, \phi) = r^{-2} V_n(\theta)$ then the system reduces to the integrable one and exact solutions can be obtained explicitly.

ソリトン方程式とか, integrableな方程式とか, いわれているものは, 非線形にもかかわらず, たいへんよい性質をもっていて, あつかいよい。しかしたかい次元になるとはなしたが, そうきれいにゆくとは, かぎらない。いっぽう物理的現実からは, 時間1次元 t と, 空間3次元 x, y, z の $3+1$ 次元でじゅうぶんに, かんたんかつ応用性のひろい非線形システムが integrable になれば, ひじょうに, やくにたつ。

そのような見方から, $1+1$ 次元で有名なソリトン方程式 KdV , Toda, Boussinesq, sine-Gordon, Nonlinear Schroedinger 方程式(以下 eq. とかく) について, その高次元化について, みてみよう。 KdV eq. は, それを $2+1$ 次元化した有名な KP eq. が integrable である。Toda eq. も $2+1$ 次元化したものが integrable であることが, しられている。Boussinesq eq. については, $3+1$ 次元化したものが similarity variable reduction によって1変数の式に reduce して, こたえをもち, それはもとの $3+1$ 次元の方程式での spherical soliton に対応する。sine-Gordon や Nonlinear Schroedinger eqs. については, きれいなかたちの高次元化 (x, y symmetric や x, y, z symmetric なかたちでの高次元化) をして, うまくいくという, はなしは

きかない。

さてここでは, Toda eq. の3次元化したものを, かんがえた。

$$\Delta u_n - \exp(-u_n + u_{n-1}) + \exp(-u_{n+1} + u_n) = 0, \quad (1)$$

$$\Delta \equiv \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2, \quad (2)$$

$$= \partial^2/\partial r^2 + (2/r)\partial/\partial r + r^{-2} \{ \partial^2/\partial \theta^2 + \cot \theta \partial/\partial \theta + (1/\sin^2 \theta) \partial^2/\partial \phi^2 \}. \quad (3)$$

式(1)は, 変数をかきなおして $\exp(-u_n + u_{n-1}) \equiv v_n$ とおくと, つぎになる。

$$\Delta \log v_n - v_{n+1} + 2v_n - v_{n-1} = 0. \quad (4)$$

式(1) or (4)は, いままで Toda eq. の Laplacian operator を 1次元 \rightarrow 2次元 \rightarrow 3次元と, すなおに, ひろげたもので, 方程式のかたち自身は, じょうぶには, かんたんで, きれいである。さてこの式(4)のこたえ $v_n = v_n(x, y, z)$ を x, y, z に full に

depend するような, もっとも一般的なかたちで, もとめることは, いまは, むずかしすぎる. それでもうすし, かんたんな, わくぐみで物理的に, おもしろい ことえをさがしたい. (3)のように, ふつうのいみの球座標をかんがえて V_n と θ のかたちに制限する.

$$V_n = V_n(x, y, z) = V_n(r, \theta, \varphi) = r^{-2} V_n(\theta). \quad (5)$$

そうすると式(4)は, つぎになる.

$$(\partial^2/\partial\theta^2 + \cot\theta \partial/\partial\theta) \log V_n(\theta) - V_{n+1}(\theta) + 2V_n(\theta) - V_{n-1}(\theta) - 2 = 0. \quad (6)$$

今回わかったことは, まとめると, つぎのようなことである.

(i) 3+1次元 Toda eq. を reduce した式(6)は, 球関数 = ルジャンドル関数 = $P_N^n(\cos\theta)$ でかかれり一連のこたえをもつ.

(ii) これらのこたえが, みんち boundary condition は "molecule" boundary condition ($V_N = V_{-N} = 0$ or

$\bar{v}_N = \bar{v}_{-N-1} = 0$) である。

(iii) これらの \bar{v} のあいだに Bäcklund transformation が存在して, これから (6) にたいする Lax Pair をつくれる。このようにおいて, (6) 式は integrable である。

(iv) $N \rightarrow \infty, \theta \rightarrow 0, N\theta = \text{constant}$ という limit で, \bar{v} の \bar{v} は, 2+1次元 Toda eq. の cylindrical soliton に reduce する。

(v) 与えられた 1-soliton solution は, $0 \leq \theta \leq \pi$ のすべてで regular である。また \bar{v}_n は (5) から, わかるように x, y, z, n のすべての方向について localize した波 (solitary wave) といえる。

1+1次元で, よくつかわれるソリトン方程式の, まれいながら 3+1次元化で, 全方向に localize している solitary wave を見つけた例としては, Boussinesq eq. について, 2番めである。よく知られた 1+1次元のほかは, 2+1次元の cylindrical soliton と 3+1次元の "deformed" (pure な spherical symmetry を持つ $\bar{v}_n = \bar{v}_n(r)$ ではないから) spherical soliton と各次元すべてにわたって solitary wave solution が, わかった例としては, この Toda eq. が, はじめの例であろう。

くわしくは、7頁の reference をみていただきたい。

Ref. Akira NAKAMURA, J. Phys. Soc. Jpn. 56 (1987)
pp. 3491.