

# 戸田格子を実現する電気回路

長島 弘幸 (静岡大学教養部)

渡辺 慎介 (横浜国立大学工学部)

石渡 信吾 (横浜国立大学工学部)

[まえがき] 戸田格子と等価な非線形電気回路を実現する方法を述べ、格子ソリトンの基本的性質を示す。

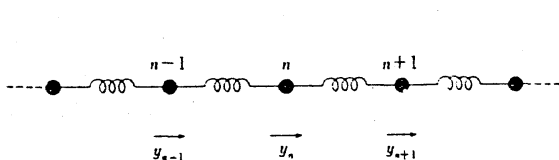


図1 線形格子

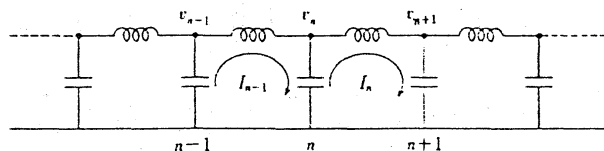


図2 LC回路

[線形の場合] 力学系はしばしば電気回路に対応させて論じられる<sup>1)</sup>。たとえば、図1の1次元線形格子は図2のLC回路と等価であることがよく知られている。格子の運動方程式は

$$m\ddot{u}_n = K(u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n) \quad (1)$$

で与えられる。ここで、 $m$ は質量、 $K$ はばね定数である。 $u_n$ は $n$ 番目の質点の変位 $y_n$ 、あるいは、相対変位 $r_n = y_n - y_{n-1}$ 、又は $n$ 番目と $n-1$ 番目のばねの力 $f_n$ を表す。一方、図2の回路方程式は

$$L\dot{I}_n = v_n - v_{n+1}$$

$$\dot{Q}_n = I_{n-1} - I_n$$

によって表される。ここで、 $Q_n$ は $n$ 番目のキャパシターに蓄えられる電荷である。電流 $I_n$ を消去すると

$$L\ddot{Q}_n = v_{n+1} + v_{n-1} - 2v_n \quad (2)$$

となる。線形のキャパシターでは  $Q_n = Cv_n$  が成立するから

$$L\ddot{v}_n = (1/C)(v_{n+1} + v_{n-1} - 2v_n) \quad (3)$$

を得る。 $I_n, Q_n$  も同じ方程式を満たす。(1)と(3)を比較すると、1次元線形格子とLC回路は等価であり、格子と回路のあいだには次の対応が成り立つことがわかる。

質量  $m \leftrightarrow$  インダクタンス  $L$

ばね定数  $K \leftrightarrow$  容量の逆数  $1/C$

この回路を伝播する波動の分散式は、周波数を  $\omega$ 、波数を  $k$  とする、

$$\omega^2 = \omega_c^2 \sin^2(k/2), \quad \omega_c^2 = (2/LC)$$

で与えられる。 $\omega_c$  は遮断周波数を表す。

[戸田格子と等価な電気回路] 相互作用ポテンシャル  $U(r)$  が

$$U(r) = (a/b)\exp(-br) + ar - a/b$$

であたえられる戸田格子<sup>2)</sup>の運動方程式を力  $f_n$  で書くと

$$(m/b)d^2\{\ln(1+f_n/a)\}/dt^2 = f_{n+1} + f_{n-1} - 2f_n \quad (4)$$

を得る。HirotaとSuzuki<sup>3)</sup>によって示されたように非線形格子は図2の回路に非線形キャパシターを用いることにより実現される。回路方程式(2)が上式(4)と同じ形になるには

$$Q_n = (1/b)\ln(1+v_n/a) \quad (5)$$

であればよい。電荷  $Q$  がこの形になるには容量  $C(v)$  は電圧  $v$  の

どのような関数でなければならぬだろうか？まず、注意しなければならないのは、非線形のキャパシターでは  $Q_n = C v_n$  が成立しないことである。キャパシターの容量は測定器から出る交流電圧に対する応答によって決められる微分容量である<sup>4)</sup>。微分容量であることを明示するため容量を  $C_d(v)$  と書くことにしよう。この場合、電荷  $Q_n$  は

$$Q_n = \int_0^{v_n} C_d(v) dv \quad (6)$$

から求めなければならない。次に、電圧  $v_n$  はバイアス電圧を表す直流成分  $V_0$  と信号電圧を表す交流成分  $V_n$  の和であることに注意しよう。

最も簡単な  $V_0 = 0$  の場合をまず考えよう。微分容量が

$$C_d(v) = 1/\{b(a+v)\}$$

であれば、電荷  $Q_n$  が (5) の形に書けることは上式を (6) に代入することにより容易に確かめられる。しばしば、 $a$  を  $F$ 、 $1/b$  を  $Q$  で表す。 $F$  は電圧、 $Q$  は電荷の次元を持つ。次に、 $V_0 \neq 0$  の場合を考える。このときには、微分容量を

$$C_d(v) = Q(V_0)/\{F(V_0)+v-V_0\} \quad (7)$$

と書き (6) に代入すれば

$$Q_n = q(V_0) + Q(V_0) \ln(1 + V_n/F(V_0)) \quad (8)$$

を得る<sup>4)</sup>。ここで、右辺第1項は電圧  $v$  の0から  $V_0$  までの積分で得られる電荷を表し、第2項は  $V_0$  から  $V_0 + V_n$  までの積分で得られる電荷を表す。 $q(V_0)$  は時間によらない定数である。

(8)を(2)に代入すると

$$LQ(V_0)d^2\{\ln(1+V_n/F(V_0))\}/dt^2 = V_{n+1}+V_{n-1}-2V_n \quad (9)$$

を得る。これは戸田格子の運動方程式と同じ形である。以上

から、戸田格子と非線形LC回路には

$$\begin{aligned} f_n &\leftrightarrow V_n, & m &\leftrightarrow L \\ a &\leftrightarrow F(V_0), & b &\leftrightarrow 1/Q(V_0) \end{aligned}$$

の対応が成り立つ。(9)の1ソリトン解は

$$V_n = F(V_0)\sinh^2 k \operatorname{sech}^2(kn-wt) \quad (10)$$

である。ここで、 $w$ は

$$w^2 = F(V_0)/(LQ(V_0))\sinh^2 k$$

または

$$w^2 = 1/(LC_d(V_0))\sinh^2 k$$

によって与えられる。最後の式を導くのに、(7)で $v$ を $V_0$ と置

いて得られる関係式

$$Q(V_0) = C_d(V_0)F(V_0) \quad (11)$$

を用いた。

[キャパシタ－の特性] さて、問題は非線形キャパシタ－の容量の電圧特性 $C_d(v)$ をもとに $Q(V_0)$ 、 $F(V_0)$ を決定する方法である。それには(7)の逆数

$$1/C_d(v) = \{F(V_0)-V_0+v\}/Q(V_0)$$

が電圧 $v$ に比例することを利用する。たとえば、図3のグラフで直線の傾きを $A$ 、直線と $v=0$ の交点を $B$ とすると、 $Q(V_0)=1/A$ 、

$F(V_0) = B/A + V_0$  と決まり、これを (11) に代入して  $C_d(V_0)$  も決定出来る。回路が戸田格子と等価であるのは  $1/C_d(v)$  が電圧  $v$  に比例している範囲内で非線形キャパシターを動作させるときである。図3では、その範囲は0.5Vから6.0Vまでである。従って、バイアス電圧を1Vに選ぶと、振幅が5Vのソリトンまで戸田格子のソリトンと等価である。

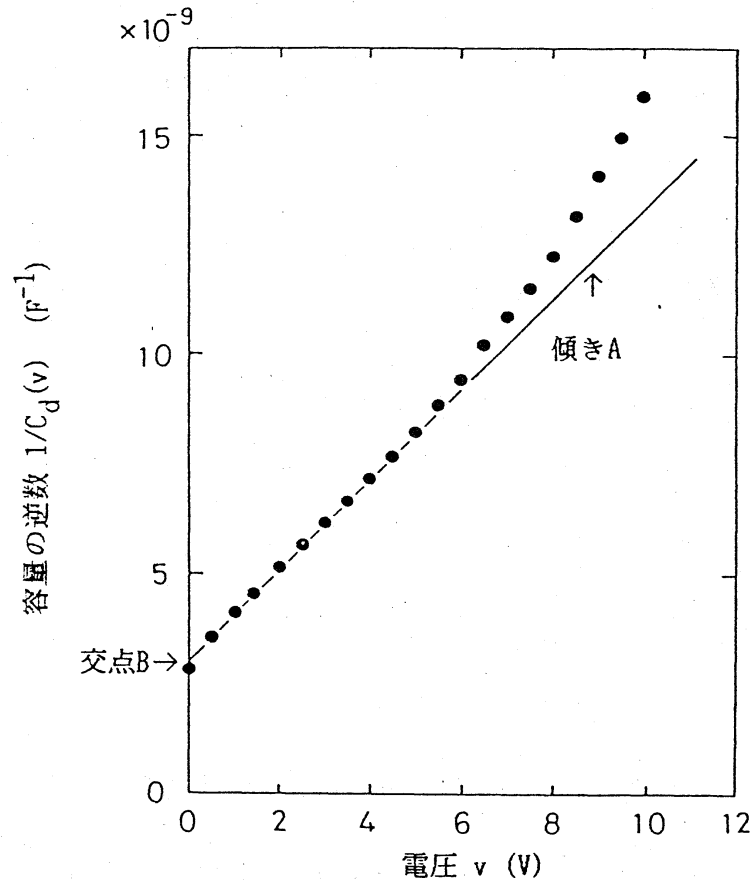


図3 容量の逆数  $1/C_d(v)$  と電圧  $v$  の関係

[線形分散式] 以下に、戸田格子と等価な非線形LC回路を用いた実験について述べる。はじめに、小振幅波(線形波)の分散式を図4に示す。分散式は  $F(V_0)$  より十分小さい電圧の正

弦波を回路の一端に加え、伝播する波の波長を測定して求める。実線は上述の理論式、黒丸は実測値を示す。遮断周波数の近傍を除くと、両者の一致は良い。

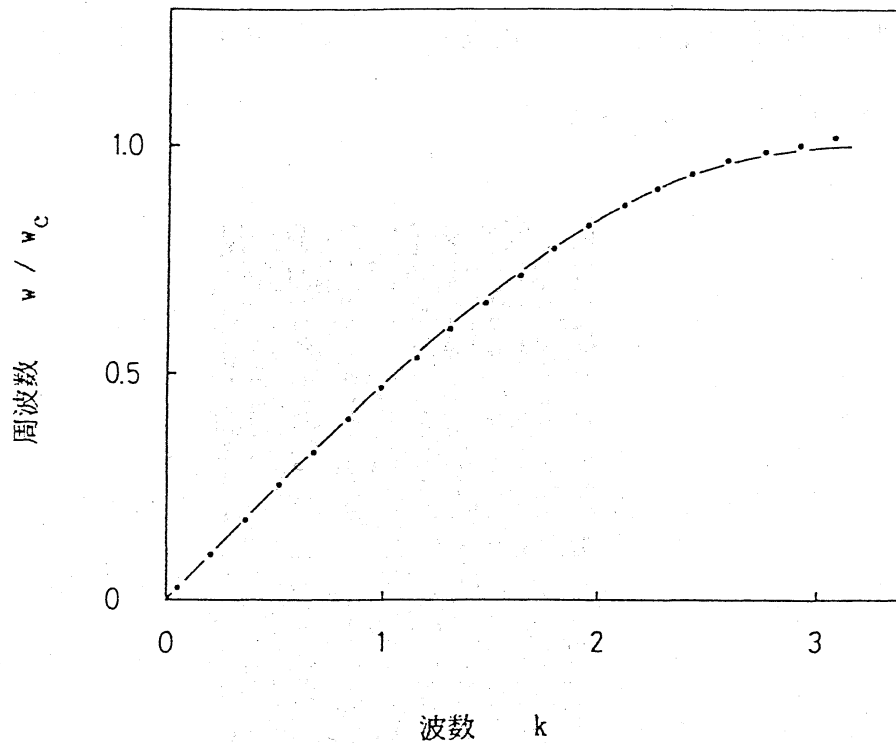


図4 線形分散式

[ソリトン] 振幅の大きい単一パルスを回路に加えるとソリトンを励起することができる。パルスの幅を一定にして、振幅を増したとき、回路のある1点で観測した電圧波形を図5に示す。振幅の小さい(a)では、まず、ソリトンが現れ、小さな振動で構成されるリップルがそれに続く。パルスの振幅を少しあげると(b)、リップルは消え一つのソリトンのみが観測される。さらに大きなパルスを印加すると、リップルが再

び現れ、それと同時に2番目のソリトンが出現する(c)。ただし、入力端からの距離が短かいため、第1の大きなソリトンと新しい小さなソリトンがまだ分離していない。振幅を更に増すと同様な現象が繰返され、生成されるソリトンの数が1つずつ増える(d), (e)。この様子はK-dV方程式の初期値問題の結果に酷似している。

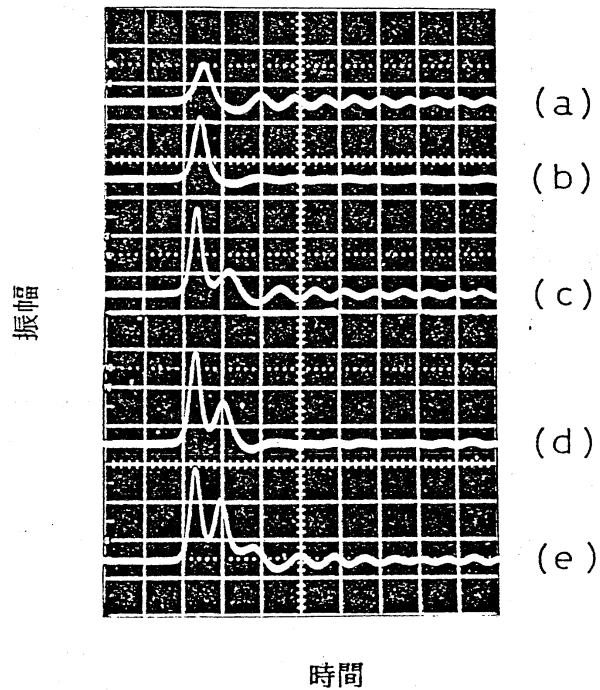
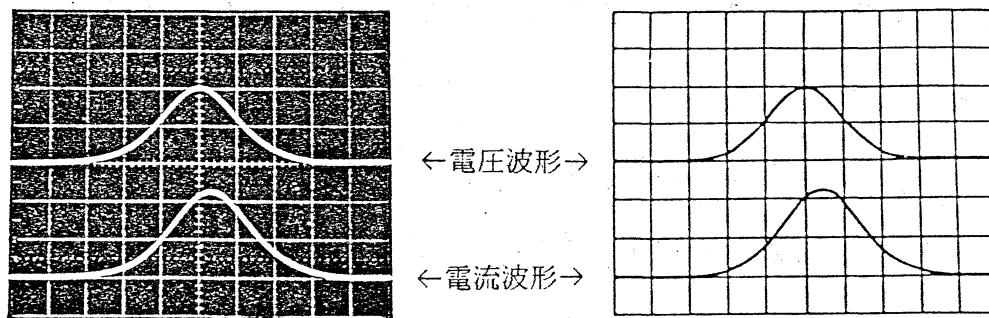


図5 印加パルスの振幅と励起されるソリトン

入力パルスの幅と振幅を適当に調整すると、回路に1つのソリトンを励起することができる。ソリトンの電圧波形・電流波形の実測値と理論値を図6に示す。実測値は理論値によく一致していることがわかる。



実験結果

理論波形

図6 ソリトンの電圧波形と電流波形

図7には、ソリトンの幅と速度を振幅の関数として表した。振幅を増すと幅(a)は減少し、速度(b)は増加する。測定値は実線で表した理論値(10)によく一致している。

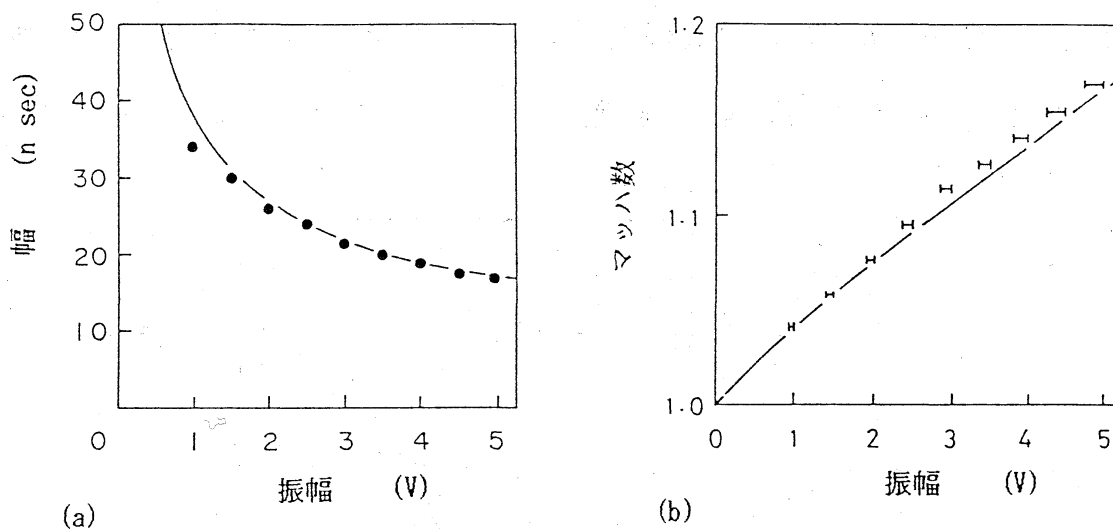


図7 ソリトンの幅(a)と速度(b)

[ソリトンのエネルギー] ソリトンが回路を伝わるとエネルギーが運ばれる。電気回路では、エネルギーはキャパシターに蓄えられる静電エネルギーとインダクターに蓄えられる磁気エネルギーに分けられる。小振幅のソリトンが運ぶ



静電エネルギー $E_e$ と磁気エネルギー $E_m$ は近似的に次式で与えられる<sup>5,6)</sup>。

$$E_e = (2/3)Q(V_0)F(V_0)(k^3 + 2k^5/15)$$

$$E_m = (2/3)Q(V_0)F(V_0)(k^3 + 3k^5/15)$$

静電エネルギー $E_e$ は磁気エネルギー $E_m$ より小さいことがわかる。図8には1つのソリトンの持つ静電エネルギー(●と実線)と磁気エネルギー(○と点線)の実測値、および理論値をソリトンの振幅の関数として示した。上式で $k^5$ が無視できる程度の小振幅のソリトンのエネルギーは $k^3$ に比例する。そのようなソリトンの振幅は(10)から $k^2$ に比例する。従って、エネルギーは振幅の3/2乗に比例する。エネルギーが振幅の平方に比例する通常の波動と異なることに注意しよう。

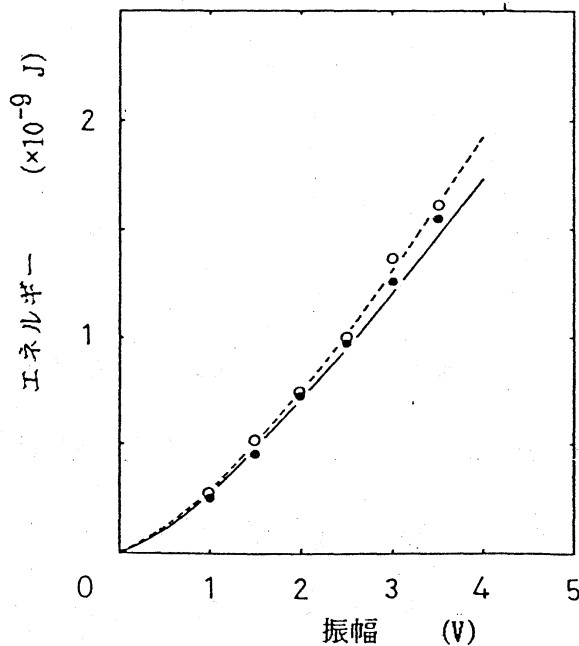


図8 ソリトンのエネルギー

[ソリトンの正面衝突] ソリトンは衝突に対して安定であり、衝突の前後で振幅や速度を変えないことはよく知られている。その性質を実験で確認することは大変むずかしい。回路にはわずかながら損失が存在するし、予期せぬ不均一も存在するであろう。このような効果のためソリトンの衝突に対する安定性を実験によって厳密に検証することは不可能である。しかし、定性的に安定性を調べることは以下に示すように可能である。図9はソリトンの正面衝突の実験結果である。回路の両端で励起された同じ振幅のソリトンが $n=32$ で正面衝突し、すり抜ける様子を、 $n=28$ から $n=36$ まで1段おきに電圧波形を測定して示した。回路の左端で励起され右に進むソリトンに右向きの矢印をつけて左に進むソリトンと区別した。正面衝突によってソリトンは壊れず安定であることがわかる。しかし、細かい点で実験と理論の間に不一致が見られる。現象は $n=32$ に関して対称であり、たとえば、 $n=28$ と $n=36$ の波形は同一でなければならない。しかしながら、実験で得られる波形ではわずかにこのような空間対称性がくずれていることが、 $n=31$ と $n=33$ 、あるいは、 $n=30$ と $n=34$ の波形の比較から認められる。また、1枚の写真で中央の縦軸に関しても左右対称でなければならないが、実験結果ではわずかに左右非対称である。これらの非対称性は、実は、上述の損失や不均一のみによるのではなく、初期波形が完全にソリトンでない

ことに起因する。初期波は回路を伝播する間にソリトンと小さなリップルに分かれるが、両者が十分に離れていないため一方のソリトンに他方のソリトンの後を走るリップルが重なり、実験で得られた波形が理論で予想される波形からずれることになる。こうした理由に基づく細かい不一致を除けば、図9はソリトンの正面衝突に対する安定性を実験的に示したといえる。

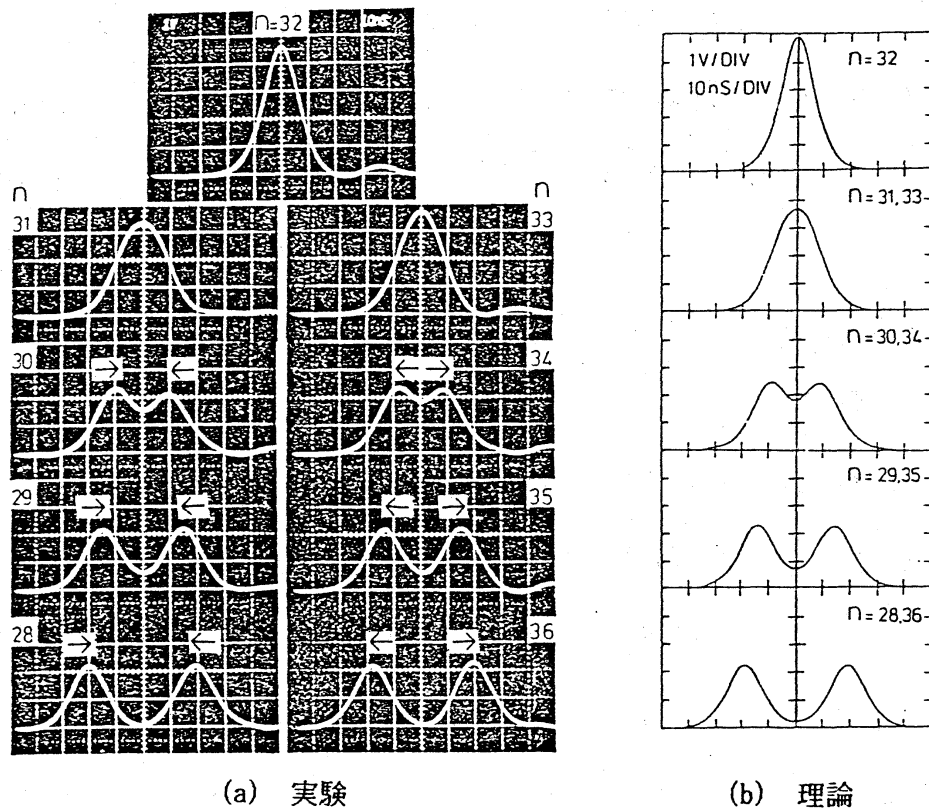


図9 ソリトンの正面衝突

[追い越し衝突] 同一方向に進む2つのソリトンの追い越し衝突に対する安定性を調べようとする、回路の損失や不均一の影響を更に強く受ける。多くの場合ソリトンの速度差

が小さいため、相互作用に長い時間を要するからである。しかし、Hirota と Suzuki<sup>3)</sup> が採用した方法を用いると損失や不均一の影響を受けずに追い越し衝突を観測することができる。彼らの方法では、回路の一端に最初に小さなパルスを加えて小さなソリトンを励起し、次に適当な時間間隔を置いて第2の大きなパルスを加えて大きなソリトンを励起する。入力端から十分離れた位置でソリトンを観測すると、図10(a)のように小さいソリトンに続いて大きいソリトンが観測される。次に、第1パルスと第2パルスの時間間隔を短縮すると、2つのソリトンはちょうど観測点で衝突する(b)。更に間隔を短かくすると、観測点の手前で大きいソリトンは小さいソリトンを追い越し、観測点には初めに大きなソリトンが到達する(c)。ここで、(a)と(c)の波形で小さいソリトンが観測点に到着する時間を比べてみよう。第1パルスを印加する時間は同一であるにもかかわらず、(c)では(a)より遅れて到着している。これは、追い越し衝突によって小さいソリトンの位相が遅れたことを示している。大きいソリトンの位相変化を見るには、(c)で小さいソリトンを励起するためのパルスを取り除けばよい。この時、大きいソリトンは相互作用せずに観測点まで伝播する。(d)にその波形を示す。(d)に比べ(c)では大きいソリトンの到着時間が早い。つまり、追い越し衝突によって大きいソリトンの位相は進む。図から、大

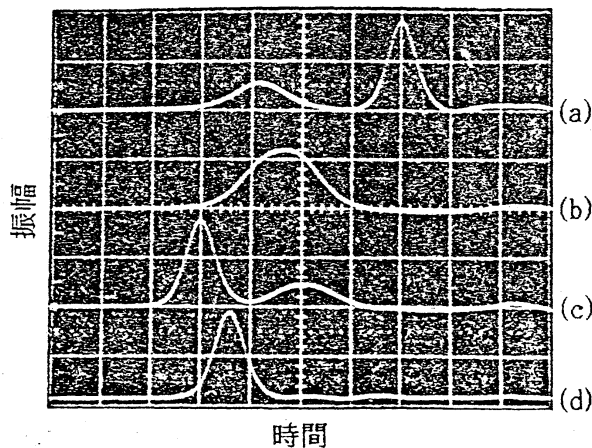


図10 ソリトンの追い越し衝突  
振幅の差が大きい場合

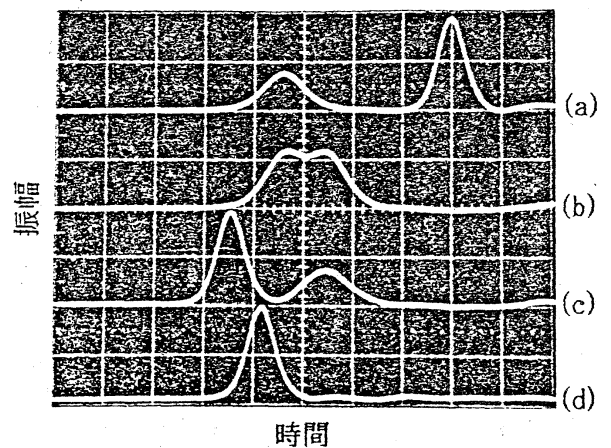


図11 ソリトンの追い越し衝突  
振幅の差が小さい場合

大きいソリトンの位相変化は小さいソリトンのそれより少ないこともわかる。これらの実験結果は戸田格子の2ソリトン解の性質と良く一致している。図11の(a)~(d)も追い越し衝突を示す。ただし、この場合2つのソリトンの振幅の差が図10に比べて小さい。その結果衝突時の波形(b)は前の場合と異なり、1つのピークを持った釣鐘形にならず、「ゾウをこなしているウバミ」のような形になっている。このように、2つのソリトンの振幅差の大小によって衝突時の波形が異なることは2ソリトン解ではよく知られていることである。

[包絡ソリトン] 波長の短い有限振幅波の包絡線  $u$  は近似的に次の非線形 Schrödinger 方程式

$$iu_t + pu_{xx} + q|u|^2u = 0$$

によって記述される。ここで、 $p$  と  $q$  は分散係数、非線形係数である。戸田格子と等価な非線形 LC 回路の場合、2つの

係数は

$$p = -w/8, \quad q = w_c^2 / (4wF(V_0)^2)$$

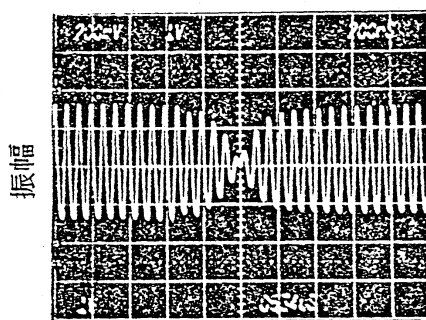
で与えられる。 $w$  と  $w_c$  はキャリアの周波数および遮断周波数を表す。積  $pq$  の符号は負であるから、戸田格子を伝播する正弦波は変調に対して安定である。この場合、包絡ソリトンとして暗いソリトンまたは包絡衝撃波が可能である。特に、包絡衝撃波解は

$$u = A \tanh\{(-q/2p)^{1/2} Ax\} \exp(iqA^2 t)$$

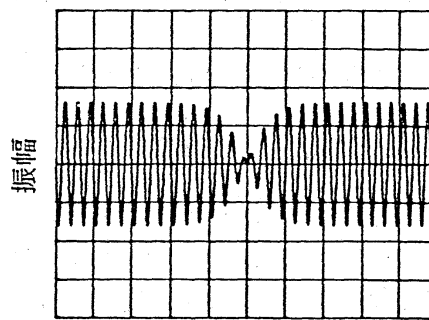
である。ここで、 $A$  は包絡線の振幅を表す。キャリアを含めた解を実験室系で書くと、電圧  $V$  は

$$V = A \tanh\{(-q/2p)^{1/2} A(x - V_g t)\} \exp\{i(kx - wt + qA^2 t)\}$$

となる。図12(a)に回路を伝播する包絡衝撃波を示す。(b)には上述の解を示した。両者は良く一致していることがわかる。



(a) 実験結果



(b) 理論波形

図12 包絡衝撃波

[まとめ] 戸田格子と等価な非線形 LC 回路を実現する方法および、それを伝わるソリトンの基本的性質を検証する実験について述べた。ここで述べた実験の他にも、次のような実験がなされている。初期波形への回帰、散逸の影響、不均一系での振舞、不純物と局在振動、相互インダクタンスを取り入れた回路、2原子格子と等価な回路等である。

今後は、このような回路を伝わるソリトンの実用面への応用を考えなければならないであろう。

[文献]

- 1) L. Brillouin: Wave Propagation in Periodic Structure. Dover Publications, Inc. (1953).
- 2) M. Toda: J. Phys. Soc. Jpn. 22 (1967) 431; 23 (1967) 501.
- 3) R. Hirota and K. Suzuki: Proc. IEEE 61 (1973) 1483.
- 4) H. Nagashima and Y. Amagishi: J. Phys. Soc. Jpn. 45 (1978) 680.
- 5) 戸田盛和: 非線形格子力学 (岩波書店) 1978.
- 6) K. Muroya and S. Watanabe: J. Phys. Soc. Jpn. 50 (1981) 2762.