数理解析研究所講究録
651巻 1988年 132-143

C^*-環のStone-Weierstrassの定理について

日大文理　境　正一郎　(Shôichirô Sakai)

1. C^*-環の一般論の中で，長い間未解決の問題として残された最も重要な問題の一つとしてStone-Weierstrass予想がある。この予想については，C^*-環の理論の研究の初期の段階から繰返し研究されてき，徐々に精密化された部分解が得られてきたが，まだ完全解決をみるには至っていない。

本文では，この予想に関し得られてきた部分解を紹介すると共に，この予想を研究するのに役立つかも知れない，著者による最近の若干の結果を述べる。

Cを局所コンパクト，ハウスドルフ空間上の無限遠点で，0となる連続関数全体のつくるC^*-環とする。クラシカルなStone-Weierstrassの定理はCの部分C^*-環DがCと一致するための条件を与えている。この定理の，もっともらしい非可換化の予想は次の通りである。

予想。　AをC^*-環，BをAのC^*-部分環，$P(A)$をA上の純粋状態全体の集合，0をA上で恒等的に0となる関数とする。Bが$P(A)\cup(0)$を分離する（即ち，2つの異なる$\varphi_1, \varphi_2 \in P(A)\cup(0)$に対し，$\varphi_1(b) \neq \varphi_2(b)$なる如き$b$が$B$の中に存在する）とする。このとき$A=B$である。

1951年に，Kaplansky [6]は，すべてのGCR環（即ちtype I C^*-環）に対して，この予想が正しいことを示した。1960年に，Glimm [5]は次のような弱い形のStone-Weierstrass theoremが成立することを示した。

Glimmの定理。　$\overline{P(A)}$を$P(A)$の，ステート空間$S(A)$内での閉包とする。もしBが$\overline{P(A)}\cup(0)$を分離するならば$A=B$である。

残念ながら，多くのC^*-環に対して，$\overline{P(A)}=S(A)$となり，これらのC^*-環に対しては，Glimmの定理は自明となる。従って，Glimmの定理は完全解決からは，ほど遠いものである。

1969年に，Akemann [1]は，もう一つの弱い形の定理を示した。1970年に，著者は，von Neumannのreduction theoryを使用して，Aが可分C^*-環で，Bがnuclear又は，すべての状態φに対し，$\pi_\varphi(A)$から$\pi_\varphi(B)''$へのノルム one 線型写像Φが存在して，$\Phi(\pi_\varphi(b)) = \pi_\varphi(b)$ $(b \in B)$ならば，予想は真である([9])

ということを示した。

この結果の後，多くの研究者は予想は，少くとも可分C^*-環については真であると信ずるようになったが，非可分C^*-環については信じていない研究者も多くいるように思われる。

1981年に，Anderson & Bunce は著者の上の結果を使用して多くの興味ある結果を得て居る（[3]）。1984年に，Longo [7] と Popa [8] は上の Anderson & Bunce の結果を用いて，独立に，Stone-Weierstrass 問題についての非常に重要な結果を得た。それについて少し述べてみたい。

1971年に，予想に関連したものとして，著者は2つの問題を上げた（[9]）。一つは factorical Stone-Weierstrass conjecture といわれるもので次の通りである。

予想′．　$F(A)$ を A の factorial 状態全体の集合とする。B が $F(A)\cup\{0\}$ を分離するならば，$A=B$．

この予想′は，本来の予想より弱い形であるが，A が可換又は type I C^*-環ならば，本来の予想と同等である。また，C^*-環が type I でないときは，表現論の Building Block としては，既約表現より Factor 表現の方が適切であるから，予想′が解かれるならば，可成り useful な定理となるものと思われる。

もう一つの問題は次のものである。

問題。 AをC^*-環，BをAの部分C^*-環とする。φをBのfactorial状態とするとき，φはAのfactorial状態に拡大できるであろうか？

LongoとPopaは，それぞれ独立に，可分C^*-環に対し，予想'と問題が肯定的であることを示した。LongoとPopaのfactorial状態の拡大定理はStone-Weierstrass予想とは独立した重要な定理であり，これを非可分に拡大する問題はきわめて興味深いが，予想'に関しては，重要ではあるが我々の究極の目標とは言い難い。少くとも，可分C^*-環に対し，本来の予想を解くことはC^*-環研究者に果せられた急務のように思われる。本文の目的は若い研究者が予想を研究するよう刺激することである。なお，最近の研究論文として，Akemann & Shultz [2] とBatty [4] がある。

2. 若干の結果。 Aを可分C^*-環，BをAの部分C^*-環とする。この節を通じて，Bは$P(A)\cup\{0\}$を分離するものと仮定する。一般性を失わず，Aが単位元1をもち，Bがそれを含んでいると仮定できる（cf. [9]）。

この場合，"Bが$P(A)\cup\{0\}$を分離する"ということと"Bが$P(A)$を分離する"ということとは同等である。まづ，次の2つの補題を述べる。

補題1（[9]）．$\{\pi,\mathcal{H}\}$をAの可分ヒルベルト空間$\mathcal{H}$上の任意の$*$-表現で，$\pi(1)$が$\mathcal{H}$の単位作用素となるものとする。$\pi(A)'$（$\pi(B)'$）をそれぞれ$\pi(A)$（$\pi(B)$）のcommutant，Cを$\pi(A)'$の任意の極大可換C^*-部分環，$(\pi(A),C)''$を$\pi(A)$とCで生成される$B(\mathcal{H})$の部分W^*-環とする。もし，Pが$\pi(A)$のselfadjoint portionから$(\pi(A),C)''$のselfadjoint portionの中へのreal linear mappingで，$P(\pi(b))=\pi(b)$ $(b\in B^s)$，かつ$\|P\|\leqq 1$とすると，$P(\pi(a))=\pi(a)$ $(a\in A^s)$である，ここで$A^s(B^s)$は，それぞれA（B）のselfadjoint portionとする。

補題2（[3]）．φをBのfactorial状態，$\{\pi_\varphi,\mathcal{H}_\varphi\}$を$\varphi$によって作られたBのGNS-表現，Dを$\pi_\varphi(B)$のcommutant $\pi_\varphi(B)'$の任意の極大可換C^*-部分環，$(\pi_\varphi(B),D)''$を$\pi_\varphi(B)$とDによって生成された$B(\mathcal{H}_\varphi)$の部分W^*-環とする。このとき，Aの$*$-表現$\{\pi,\mathcal{H}_\varphi\}$が次の条件をみたすように存在する：(i) $\pi(A)\subset(\pi_\varphi(B),D)''$；(ii) $\pi_\varphi(b)=\pi(b)$ $(b\in B)$．更に，もしAの$*$-表現$\{\pi_1,\mathcal{H}_\varphi\}$が(i)′ $\pi_1(A)\subset(\pi_\varphi(B),D)''$；(ii)′ $\pi_1(b)=\pi_\varphi(b)$ $(b\in B)$をみたすならば$\pi_1(a)=\pi(a)$ $(a\in A)$である。

さて，B が $P(A)\cup(0)$ を分離するが，$B \subsetneqq A$ であると仮定する。このとき，B^0 を，A の双対空間 A^* に於ける B の polar とし，S を B^0 の selfadjoint portion の単位球とし，f を S の一つの端点とすると，$f = f^+ - f^-$ なる直交分解ができる。$\psi = f^+ + f^-$ とすると，ψ は A の状態である。このとき，次の2つの補題を示すことができる。

補題 3. $\{\pi_\psi, \mathcal{H}_\psi\}$ を ψ によって作られた，A の GNS 表現，$\overline{\pi_\psi(A)}$ ($\overline{\pi_\psi(B)}$) を，それぞれ，$\pi_\psi(A)$ ($\pi_\psi(B)$) の弱閉包，$Z(\overline{\pi_\psi(A)})$ ($Z(\overline{\pi_\psi(B)})$) を，それぞれ，$\overline{\pi_\psi(A)}$ ($\overline{\pi_\psi(B)}$) の中心とすると，$Z(\overline{\pi_\psi(B)}) \subset Z(\overline{\pi_\psi(A)})$ である。

補題 4. 補題3に於ける，A の状態 ψ の B に制限したものは，B の factorial 状態である。

補題4から，A の状態 φ で，$[\pi_\varphi(A)1_\varphi] = [\pi_\varphi(A)'1_\varphi]$，$\overline{\pi_\varphi(B)} \subsetneqq \overline{\pi_\varphi(A)}$，かつ $\overline{\pi_\varphi(B)}$ が factor となる，GNS 表現 $\{\pi_\varphi, \mathcal{H}_\varphi\}$ が存在することが判る。$\mathcal{J}$ を π_φ の Kernel とする。一般性を失わずに，$\mathcal{J} = (0)$ と仮定することができる。実際，$B+\mathcal{J}/\mathcal{J}$ は $P(A/\mathcal{J})\cup(0)$ を分離し，π_φ は $A/\mathcal{J}$ の ~~*~~表現を induce するからである。

さて，A と $\pi_\varphi(A)$ を同一視することにする。このとき，次の補題を示すことができる。

補題 5. $\{\pi_\alpha \mid \alpha \in \Pi\}$ を A の $\mathcal{H}_\varphi$ 上での $*$-表現で，$\pi_\alpha(b) = b$ $(b \in B)$ を充たすものの全体とし，$\mathfrak{A}$ を $\{\pi_\alpha(A) \mid \alpha \in \Pi\}$ で生成される $B(\mathcal{H}_\varphi)$ の部分 C^*-環とすると，$\mathfrak{A}$ から A 上への $*$-準同型 ρ で次の条件をみたすものが存在する：(i) $\rho(a) = a$ $(a \in A)$；(ii) $\mathfrak{A} = A + I$，かつ $A \cap I = (0)$；(iii) I は ρ の kernel である。

補題 6. $\mathfrak{D}$ を I の任意の可分部分 C^*-環，C を B' の任意の極大可換部分 C^*-環とする。このとき，C の中にユニタリ元の列 $\{v_n'\}$ が存在して，$\mathfrak{D}$ の任意の元 x に対し，$\{v_n'^* x v_n'\}$ は $*$-強位相に関して 0 に収束する。

$\mathfrak{D}$ を $\mathfrak{A}$ と B' によって生成される $B(\mathcal{H}_\varphi)$ の部分 C^*-環，J を I を含む $\mathfrak{D}$ の最小の両側閉イデアルとする。このとき，補題 6 を使用して次の命題を示すことができる。

命題 1. D を B' の任意の極大可換部分 C^*-環，$(B, D)''$ を B と D によって生成される $B(\mathcal{H}_\varphi)$ の部分 W^*-環とする。このとき，$(B, D)'' \cap J = (0)$ である。

次に，D_1, D_2 を任意の2つの B' の極大可換部分 C^*-環とする。

命題 2. もし，$\{(B,D_1)'' + (B,D_2)''\} \cap I = (0)$ ならば Stone-Weierstrass 予想は真である。

証明。補題2により，A の $*$-表現 π_1, π_2 が存在して，$\pi_i(b) = b$，$\pi_i(A) \subset (B,D_i)''$ $(i=1,2)$。特に，D_1 を A' の極大可換部分 C^*-環とすると，B が $P(A)$ を分離することと，reduction 理論により D_1 は B' の極大可換部分 C^*-環である。従って，補題2により，π_1 は A の恒等表現，即ち $\pi_1(a) = a$ $(a \in A)$ である。補題5により，写像 $a \longmapsto \rho(\pi_2(a))$ $(a \in A)$ は A の $*$-表現で $\rho(\pi_2(b)) = b$ $(b \in B)$ かつ，$\rho(\pi_2(A)) \subset A \subset (B,D_1)''$. 故に，補題2により，$\rho(\pi_2(a)) = a$ $(a \in A)$。従って，$a - \pi_2(a) \in I$. 仮定より $a = \pi_2(a)$. 即ち，任意の D に対し，$A \subset (B,D)''$. よって，$A' \supset (B,D)' = D$. 即ち A' は B' の任意の極大可換部分 C^*-環を含む，よって $A' \supset B'$. これは $A'' \supsetneqq B''$ に矛盾する．(終)．

注意．命題1と命題2の仮定との間には，かなりの開きがある。然しながら matrix method 等の方法によって命題1を命題2の仮定の形に拡大できないだろうか？

補題 7. $\mathcal{D}/J = A \otimes_\beta B'$，ここで β は一つの C^*-クロスノルムである。

この補題の証明は，B が $P(A)$ を分離することと，補題3を

使用して得られる。

B''はfactorであるから，BとB'で生成される$B(\mathcal{H}_\varphi)$の部分C^*環は$B\otimes_\delta B'$（ここで，δは一つのC^*クロスノルム）とかける。もし，$\delta\leqq\beta$が$B\odot B'$で示せればStone-Weierstrass予想は真であることは容易に判る。特に，δがthe least C^* cross normであれば予想は真である。

次にC^*環のテンソル積を使用した方法を考えてみよう。

$A\odot B'$をAとB'の代数的なテンソル積とする。このとき，$B\odot B'$は$A\odot B'$の$*$-部分環と考えられる。B'がfactorであるから，$B\odot B'$は，BとB'で生成される$B(\mathcal{H}_\varphi)$の部分C^*環$\mathcal{E}$の中に，canonicallyにimbedできる。$B\odot B'$の元xに対し，xの$\mathcal{E}$に於けるノルムを$\|x\|$で示すことにする。A^s，B'^sを，それぞれ，A，B'のselfadjoint portionとし，$A^s\odot B'^s$上に新しいノルム$|||\cdot|||$を定義することを考える。$x\in A^s\odot B'^s$に対し，$x=\sum_{i=1}^n f_i$，ここで$f_i\in C_i^s\odot D_i^s$（C_iはAの可換部分C^*環，D_iはB'の可換部分C^*環）と表わし，$|||x|||=\inf\sum_{i=1}^n\|f_i\|$（ここで，inf は上の様な$x$のすべてのexpressionを動くものとし，$\|f_i\|$は$C_i\otimes_\lambda D_i$に於ける$f_i$のノルムを示す，$\lambda$はthe least cross normである）．このとき，明らかに，$\alpha(x)\leqq|||x|||$（$x\in A^s\odot B'^s$）である（ここで，αはthe least C^* cross norm）．

命題 3．もし，$\|x\|\leqq|||x|||$（$x\in B^s\odot B'^s$）ならばStone-Weierstrass予想は真である。

証明。 $x \in B^S \odot B'^S$ に対し，$\tilde{\varphi}(x) = (x 1_\varphi, 1_\varphi)$ とおくと $\tilde{\varphi}$ は $B^S \odot B'^S$ 上の real linear functional である。$|\tilde{\varphi}(x)| \leqq \|x\|$ $(x \in B^S \odot B'^S)$ より，$\tilde{\varphi}$ は $A^S \odot B'^S$ 上の real linear functional f に，$|f(x)| \leqq |||x|||$ $(x \in A^S \odot B'^S)$ をみたし拡大できる。

$a\ (0 \leqq a \leqq 1) \in A$，$b'\ (0 \leqq b' \leqq 1) \in B'$ に対し，$|||1 \times 1 - a \times b'||| = \lambda(1 \times 1 - a \times b') \leqq 1$。従って，$|f(1 \times 1 - a \times b')| \leqq 1$。

故に $f(a \times b') \geqq 0$。 $f_a(b') = f(a \times b')$ $(b' \in B'^S)$ とすると，f_a は B'^S 上の positive, real linear functional である。f_a は B' 上の positive linear functional $\tilde{f}_a$ に一意に拡大できる。

$f((\|a\|1 - a) \otimes b') \geqq 0$ $(b'(\geqq 0) \in B')$ であるから，

$\tilde{f}_a(b') \leqq \|a\| \varphi(b')$ $(b'(\geqq 0) \in B')$。従って，B'' の元 $T(a)$ が存在して，$\tilde{f}_a(b') = (T(a) b' 1_\varphi, 1_\varphi)$ $(b' \in B')$，かつ，$\|T(a)\| \leqq \|a\|$。 $[B' 1_\varphi] = \mathfrak{H}_\varphi$ であるから，このような $T(a)$ は一意である。もし，$b(\geqq 0) \in B$ ならば，$T(b) = b$。線型性により T は A 上に一意に拡大できる。$T(\|a\|1 \pm a) = \|a\|1 \pm T(a)$ であるから，$\|T(a)\| \leqq \|a\|$ $(a \in A^S)$。

故に，補題 1 により，$T(a) = a \in B''$ $(a \in A^S)$。

即ち $A \subset B''$。これは矛盾である。(終)

いま，命題 3 の仮定が成立しないとすると，A の可換部分 C^*-環 C_i $(i=1,2,\cdots,n)$ と B' の可換部分 C^*-環 D_i $(i=1,2,\cdots,n)$，及び $A_i^S \odot C_i^S$ の元 f_i $(i=1,2,\cdots,n)$ が存在して，$f_1 + f_2 + \cdots + f_n$

は $B^S \odot B'^S$ に属し，$\lambda(f_1)+\lambda(f_2)+\cdots+\lambda(f_n) < \|f_1+f_2+\cdots+f_n\|$，ここで，$\lambda(f_i)$ は f_i の $C_i \otimes_\lambda D_i$，即ち C^*テンソル積 $C_i \otimes_\alpha D_i$（可換 C^*環については $\alpha=\lambda$ に注意）に於ける f_i のノルム，$\|f_1+f_2+\cdots+f_n\|$ は，B と B' によって生成される $B(\mathcal{H})$ の部分 C^*環に於ける $f_1+f_2+\cdots+f_n$ $(\in B^S \odot B'^S)$ のノルムである。

従って $(\lambda(f_1)1*1 \pm f_1)+(\lambda(f_2)1\times 1 \pm f_2)+\cdots\cdots(\lambda(f_n)1\times 1 \pm f_n)$

$= (\sum_{i=1}^{n}\lambda(f_i))1 \pm (f_1+f_2+\cdots+f_n)$

故に $C_i \otimes_\lambda D_i$ に positive element h_i が存在して，$h_i \in C_i^S \odot D_i^S$ かつ，$\sum_{i=1}^{n} h_i \in B^S \odot B'^S$，さらに $\sum_{i=1}^{n} h_i$ は B と B' で生成される $B(\mathcal{H})$ の部分 C^*環，即ち，$B \otimes_\delta B'$ で non-positive, self-adjoint element となる。従って次の予想を解けば Stone-Weierstrass 予想は解決する。

予想。上の $\sum_{i=1}^{n} h_i$ は $B \otimes_\delta B'$ で positive element である。

References

1. C. Akemann, The Stone-Weierstrass problem of C^*algebras, J. Functional Analysis 4, 277-294 (1969)

2. C. Akemann and F. Shultz, Perfect C^*algebras,

Mem. Amer. Math. Soc. 55 (1985), no. 326

3. J. Anderson and Bunce, Stone-Weierstrass theorems for separable C^* algebras, J. Operator Theory 6, 363-374 (1981)

4. C. Batty, to appear

5. J. Glimm, A Stone-Weierstrass theorem for C^* algebras, Ann. Math., 72, 216-244 (1960)

6. I. Kaplansky, The structure of certain operator algebras, Trans. Amer. Math. Soc., 70, 219-255 (1951)

7. R. Longo, Solution of the factorial Stone-Weierstrass conjecture, Invent. Math. 76, 145-155 (1984)

8. S. Popa, Semiregular maximal abelian $*$-subalgebras and the solution to the factor state Stone-Weierstrass theorem, Invent. Math., 76, 157-161 (1984)

9. S. Sakai, C^* algebras and W^* algebras, Ergebnisse der Math., 60 (1971), Springer-Verlag, Heidelberg