

一様軸対称乱流の等方化

東邦大医物理 中内紀彦 (Norihiko Nakauchi)

大嶋 洋 (Hiroshi Oshima)

1. はじめに

Closure model の一つである eddy-damped quasi-normal Markovian (EDQNM) 近似を用い、一様軸対称性乱流の等方化の様子を調べる。

ここでは、非等方性の強さの異なるいくつかの初期条件の下に energy spectrum 方程式を解き、その spectrum から energy, enstrophy, skewness 等の統計量を計算する。それらの量の2つの座標成分、すなわち対称軸方向 (X_3 方向) およびそれに垂直な方向 (X_1 方向) の2つの成分を比較することにより乱流の等方化の様子を調べる。また、Schumann and Herring¹⁾ にならい Rotta の等方化定数を計算し、それを彼らの計算結果と比較する。

2. Energy spectrum 方程式

速度場の Fourier 成分,

$$\underline{v}_i(\underline{k}, t) = \int \underline{v}_i(\underline{x}, t) \exp(-i\underline{k} \cdot \underline{x}) d\underline{x} \quad (1)$$

を用いて energy spectrum tensor $S_{ij}(\underline{k}, t)$ は次の様に書ける:

$$S_{ij}(\underline{k}, t) = \langle \underline{v}_i(\underline{k}, t) \underline{v}_j(-\underline{k}, t) \rangle. \quad (2)$$

$S_{ij}(\underline{k}, t)$ に対する運動方程式は非圧縮性流体の Navier-Stokes 方程式から,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + 2\nu k^2\right) \hat{S}_{ij}(\underline{k}, t) = \hat{\Phi}_{ij}(\underline{k}, t) + \hat{P}_{ij}(\underline{k}, t), \quad (3)$$

の様に得られる。ここで、 ν は流体の動粘性係数、 $\hat{\Phi}_{ij}(\underline{k}, t)$ は pressure-strain correlation, $\hat{P}_{ij}(\underline{k}, t)$ は inertial transfer である。一様軸対称乱流に対して $\hat{S}_{ij}(\underline{k}, t)$ は 2 つのスカラー関数 E と F を用いて,

$$\hat{S}_{ij}(\underline{k}, t) = \frac{1}{4\pi k^2} (\Delta_{ij3}(\underline{k}) E(k, \mu, t) + \Delta_{i3}(\underline{k}) \Delta_{j3}(\underline{k}) F(k, \mu, t)), \quad (4)$$

の様に表わせる。添字 3 は対称軸方向の座標成分を意味し、 μ は波数ベクトル \underline{k} と対称軸方向との間の角度の cosine である。

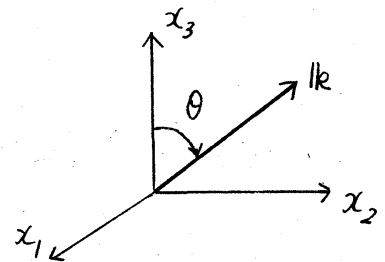


Fig. 1 $\mu = \cos \theta$

ここで、

$$\Delta_{ij}(\underline{k}) = \delta_{ij} - k_i k_j / k^2 \quad (5)$$

である。

ここで、流体の統計量に対する定義式をいくつかを掲げておくことにしよう。 $E_{ij}(k, t)$ は角度積分を施された energy spectrum tensor、

$$E_{ij}(k, t) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} S_{ij}(k, t) k^2 d\mu d\phi \quad (6)$$

であり、その X_1 方向および X_3 方向（対称軸方向）の一次元スペクトルは $E(k, \mu, t)$ と $F(k, \mu, t)$ を用いて、

$$E_{11}(k, t) = \frac{1}{4} \int_0^1 d\mu \{ E(k, \mu, t) + \mu^2 (E(k, \mu, t) + (1 - \mu^2) F(k, \mu, t)) \} \quad (7)$$

$$E_{33}(k, t) = \frac{1}{2} \int_0^1 d\mu (1 - \mu^2) (E(k, \mu, t) + (1 - \mu^2) F(k, \mu, t)) \quad (8)$$

のように書ける。実空間における energy tensor $E_{ij}(t)$ は $E_{ij}(k, t)$ を k で積分することにより、

$$E_{ij}(t) = \int_0^\infty dk E_{ij}(k, t) = (1/2) \langle v_i(\underline{x}, t) v_j(\underline{x}, t) \rangle, \quad (9)$$

のように得られる。それに対応する energy dissipation tensor, pressure strain tensor および inertial transfer tensor を我々は次の様を書くことにする:

$$\epsilon_{ij}(t) = (2\nu) \int_0^\infty k^2 E_{ij}(k, t) dk; \quad \Phi_{ij}(t); \quad \mathcal{P}_{ij}(t). \quad (10)$$

Run	$E(k, u, t=0)$	$F(k, u, t=0)$	$E_{33}(0)/E_{11}(0)$
0	$\frac{4}{5} \Phi(k)$	0	1
1	$\frac{38}{35} \Phi(k)$	$-\frac{6}{7} \Phi(k)$	$\frac{2}{5}$
2	$\frac{189}{85} (1-\mu^2) \Phi(k)$	$-\frac{174}{85} \Phi(k)$	$\frac{1}{8}$
3	$\delta(\mu)\Phi(k)$	$-\delta(\mu)\Phi(k)$	0
4	0	$2\delta(\mu)\Phi(k)$	∞
5	$\frac{88}{210} \Phi(k)$	$\frac{8}{7} \Phi(k)$	$\frac{5}{2}$
6	0	$\frac{5}{2} \Phi(k)$	8

Table

Total energy とそれに対応する energy dissipation は、

$$E(t) = E_{ii}(t), \quad \epsilon(t) = \epsilon_{ii}(t), \quad (11)$$

である。ただし、同じ添字について和をとるものとする。

$E(k, \mu, t)$ と $F(k, \mu, t)$ に対する運動方程式は (4) 式に (3) 式を代入し、EDQNM 近似を用いてえられる。その詳細は Nakauchi and Oshima²⁾ に見られる。ここでは EDQNM 近似における eddy damping factor として、

$$\mu_e(k, t) = \alpha \sqrt{\int_0^k dk k^2 \int_0^1 d\mu (E(k, \mu, t) + \frac{1}{2}(1-\mu^2)F(k, \mu, t))}, \quad (12)$$

を用いたことだけを記しておく ($\alpha = 0.35$)。

数値計算は表にあるような $E(k, \mu, t)$ と $F(k, \mu, t)$ に対する初期条件のもとに行なった。ここで、 $\bar{\Phi}(k)$ は、

$$\bar{\Phi}(k) = 16(2/\pi)^{1/2} v_0^2 (k^4/k_0^5) \exp(-(k/k_0)^2), \quad (13)$$

である。

$\mu=0$ は波数ベクトル \underline{k} が対称軸に垂直な面内にあることを意味している。非圧縮性流体の速度の Fourier 成分は常に \underline{k} に垂直である。 $\mu=0$ である様な \underline{k} に垂直な速度成分のうち、対称軸に垂直な面内にある速度成分からなるエネルギースペクトルは $E(k, \mu=0, t)$ で表わされ、対称軸に平行な速度成分からなるエネルギースペクトルは $E(k, \mu, t) + (1-\mu^2) \cdot F(k, \mu, t) \Big|_{\mu=0}$ で表わされる。すなわち、Run 3 の初期値は 2次元乱流的であり、Run 4 のそれは一方向流乱流の場合になっている。また等方性乱流は μ によらない $E(k, \mu, t)$ で表わされ、 $F(k, \mu, t)=0$ である。すなわち Run 0 は等方性乱流の場合である。

ここで、Schumann and Herring¹⁾ にならい乱流の性質を見る上で重要ないくつかの統計量、integral length scale $L_r(t)$; Taylor microscale $\lambda(t)$; それらに対応する2つの Reynolds numbers $ReL(t)$, $Re\lambda(t)$; skewness coefficient tensor $S_{ij}(t)$ そして Rotta の return-to-isotropy coefficient $C'(t)$ を示しておく：

$$L_f(t) = (\pi/2 v^2(t)) \int_0^\infty (1/k) E(k, t) dk, \quad (14)$$

$$\lambda^2(t) = 15 \nu v^2(t) / \epsilon(t), \quad (15)$$

$$\text{Re } L(t) = v(t) L_f(t) / \nu, \quad \text{Re } \lambda(t) = v(t) \lambda(t) / \nu, \quad (16)$$

$$S_{ij}(t) = (1/35) (15 \nu / \epsilon(t))^{3/2} \int_0^\infty \int_0^1 \int_0^{2\pi} \Gamma_{ij}(k, \mu, t) k^2 dk d\mu d\phi, \quad (17)$$

$$C'(t) = - \Phi_{33}(t) L_f(t) / (\epsilon^{1/2}(t) \Delta E(t)). \quad (18)$$

ここで、

$$v^2(t) = (2/3) E(t), \quad (19)$$

$$\Delta E(t) = (2/3) E_{33}(t) - (1/3) (E_{11}(t) + E_{22}(t)) \quad (20)$$

である。

3. 結果

始めに2つのレイノルズ数 $\text{Re } L(t)$ および $\text{Re } \lambda(t)$ の計算結果を Fig. 2 に示す。Figures 3-5 には Runs 2 と 6 の energy, enstrophy およびそれらの量の成分比を、そして Figs. 6-8 に Runs 3 と 4 の energy, enstrophy およびそれらの量の成分比を示す。Figure 9 には skewness coefficient を、そして Fig. 10 にその x_1 および x_3 成分を示す。Rotta の等方化定数は Fig. 11 に示してある。最後に1次元エネルギースペクトルの成分間の比を Fig. 12 に示した。

初期エネルギー $E(t)$ の大きさは Runs 1, 2, 5, 6 に対

して同じである。したがってこれらの場合の初期レイノルズ数 $Re_L(t)$ と $Re_\lambda(t)$ の大きさも同じである。Case 2 の初期エネルギースペクトルの比 $E_{33}(k, t)/E_{11}(k, t)$ は case 6 の初期エネルギースペクトルの比 $E_{11}(k, t)/E_{33}(k, t)$ と同じ大きさ 0.125 であるが、物理的に対称ではないからそれらの時間発展の仕方はもちろん異なる。エネルギーを含む低波数領域における乱流の等方化は高波数領域の等方化に比べ非常に遅い。そのため初期の非等方性が強い乱流程エネルギーの成分比が 1 に近づく速さが遅くなる。Enstrophy の成分比が energy の成分比より大きいということは高波数領域の等方化が低波数領域の等方化より速い事を意味している。対称軸方向 (x_3 方向) のエネルギー成分がそれに垂直な方向 (x_1 方向) のエネルギー成分より大きい場合 (Runs 5 and 6) の等方化は、その逆の場合 (Runs 1 and 2) の等方化の速さよりいく分遅いように見える。しかしながら、どちらの場合も比較的はやい時間のうちに等方化が進み、エネルギー等の減衰率は等方性乱流 (Run 0) の減衰率とほぼ同じになることが図から見てとれる。

Cases 1, 2, 5, 6 の様にエネルギー分布が 3 次元の広がりを持つ乱流に比べ、cases 3, 4 の様にエネルギー分布が 2 次元あるいは 1 次元の広がりしか持たない乱流の等方化は

かなり遅い。注目すべきことは、cases 3 と 4 においてはエネルギーを含む波数領域でエネルギースペクトルの成分比が極小になっていることである (Figs. 12 (e) and (f))。特に case 3 においてはこのことが顕著である。これは case 3 の場合 2 次元等方性乱流の特徴の一つであるエネルギー流の逆カスケードが生じていることを意味している。このことは case 3 の skewness coefficient の x_1 成分が一時減少すると言うことのうちにも見ることができる。

Skewness coefficient $S(t) (=2S_{11}(t)+S_{33}(t))$ の値は時間の経過と共に等方性乱流にみられる値 0.4 に近づくことがわかる。これは Herring³⁾ らの TFM による等方性乱流の skewness coefficient の計算結果とも一致している。

Rotta の return-to-isotropy coefficient はほぼ 1 に近づく。これは Schumann and Herring¹⁾ の計算結果とほぼ等しい。ただし、彼らの値が 1 を少し下まわるのに対し我々の値は 1.1 に近い。

非等方性乱流における興味深いことの一つは等方化に関するエネルギーの over relaxation である。Fig. 12 に見られる様に非等方度が強くなるにしたがいエネルギーの overshooting も強くなり、Run 3 ではエネルギースペクトルの成分比が 10 近くにもなる。しかしながら、これは実際に運

ばれるエネルギーの絶対量が必ずしも多いというわけではなく、元になるエネルギー量が非常に少ないということにも依る、という事実注意到しておく必要がある。また Run 4 において一度 overshoot したエネルギースペクトル比が急速に減少し、いったん 1 より小さくなった後再び緩やかではあるが 1 に近づいて行くという、減衰振動的等方化現象が見られることも興味深い。

4. おわりに

等方性乱流の計算結果 (Case 0) は他の cases と同じ一様軸対称乱流に対する計算コードを用いて得られたものである。この結果は等方性乱流の計算コードを用いた場合の結果と完全に一致する。すなわち、等方性乱流において零であるべき $E(k, \mu, t)$ の μ 依存性および $F(k, \mu, t)$ の値は計算の間 (倍精度計算) 10^{-10} を越えることがなかった。また、inertial transfer の total も等方性乱流に対する計算コードを用いた場合と同様 10^{-10} 以下であった。

エネルギー分布が 3 次元の広がりを持つ cases 1, 2, 5, 6 の inertial transfer の保存性は良いが, cases 3 および 4 に対するそれは悪くなる。特に case 4 では悪く energy dissipation $\epsilon(t)$ に対する $\overline{P}_{ii}(t)$ の値は始めの間 10^{-1}

程度である。(Case 3 では 10^{-3} 程度である。) しかしながら、時間の経過とともにエネルギー分布が 3 次元的広がりを持つようになると $\Gamma_{ij}(t)$ の保存性も良くなってくる。このことは乱流の非等方性が強くなると energy transfer の local 性が成り立たなくなることに関係していると考えられる。

この興味ある 2 次元乱流のさらに詳しい研究のためには角度方向 μ の mesh の数を増すことも必要であろうがそればかりではなく、波数についての $p-q$ 積分に対しても 2 次元等方性乱流に見られるような工夫が必要であると考えられる。

References

- 1) U.Schumann and J.R.Herring; J.Fluid Mech. 76 (1976) 755.
- 2) N.Nakauchi and H.Oshima; (submitted in Phys. Fluids) 1987.
- 3) J.R.Herring and R.M.Kerr; J.Fluid Mech. 118 (1982) 205.

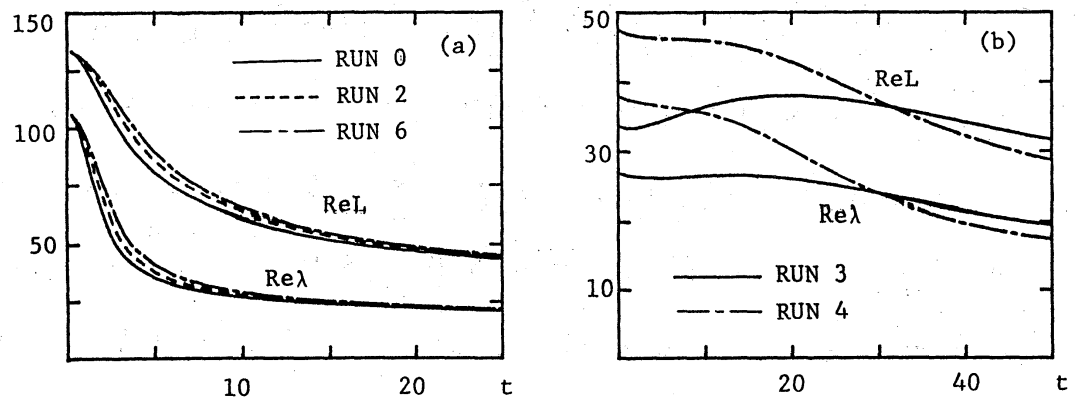


FIG. 2 $ReL(t)$ and $Re\lambda(t)$

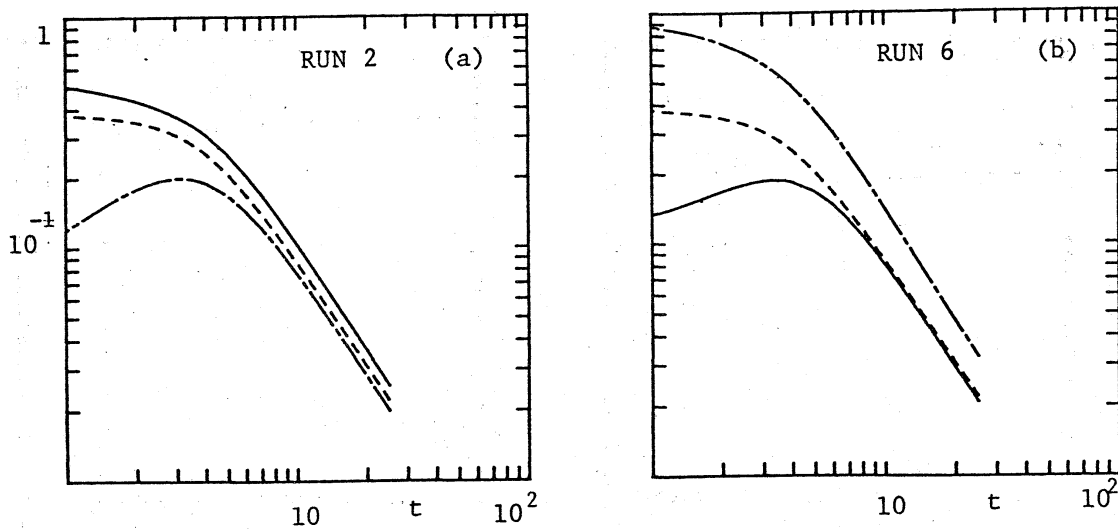


FIG. 3 ———; $E_{11}(t)$, - - - -; $E_{33}(t)$, - · - ·; $1/3 E(t)$ for RUN 0.

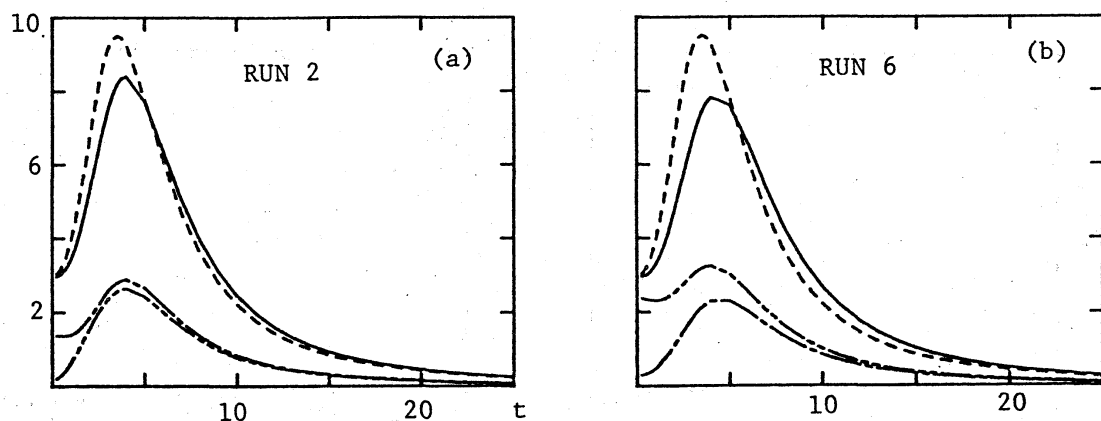


FIG. 4 ———; $\mathcal{E}(t)/\nu$, - - - -; $\mathcal{E}_{11}(t)/\nu$, - · - ·; $\mathcal{E}_{33}(t)/\nu$, · · · ·; $\mathcal{E}(t)/\nu$ for RUN 0.

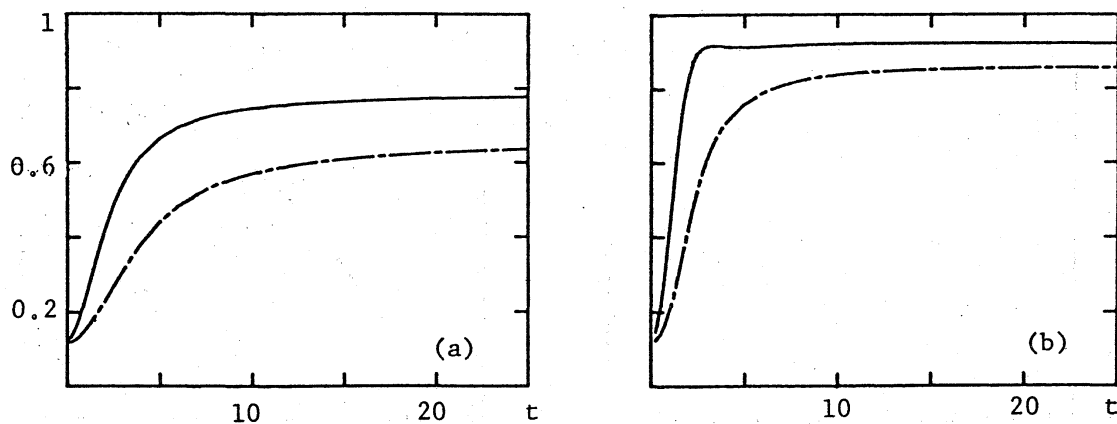


FIG. 5 (a). ———; $E_{33}(t)/E_{11}(t)$ for RUN 2, - - - -; $E_{11}(t)/E_{33}(t)$ for RUN 6.
 (b). ———; $\mathcal{E}_{33}(t)/\mathcal{E}_{11}(t)$ for RUN 2, - - - -; $\mathcal{E}_{11}(t)/\mathcal{E}_{33}(t)$ for RUN 6.

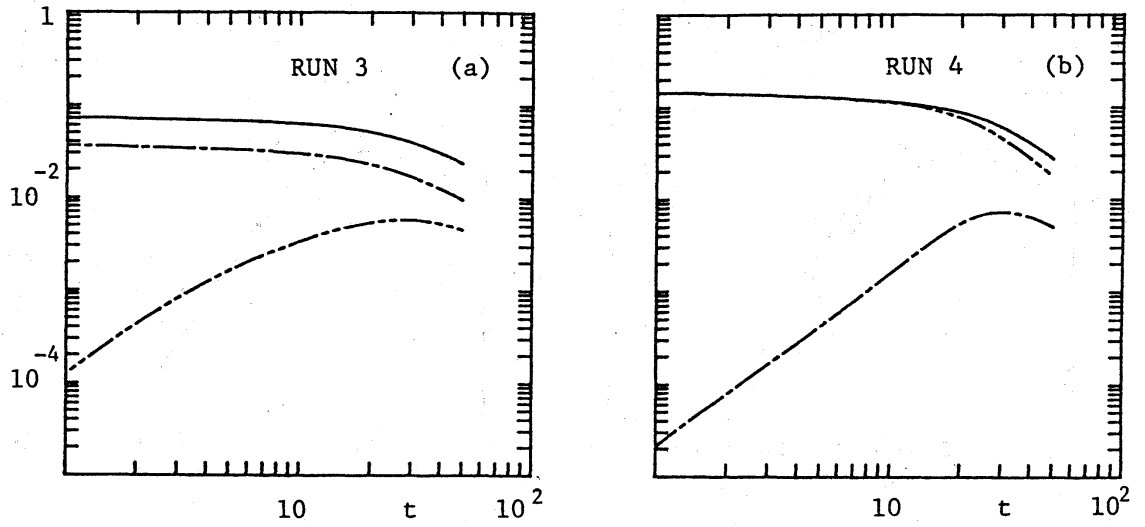


FIG. 6 ——— ; $E(t)$, - - - ; $E_{11}(t)$, - · - · ; $E_{33}(t)$.

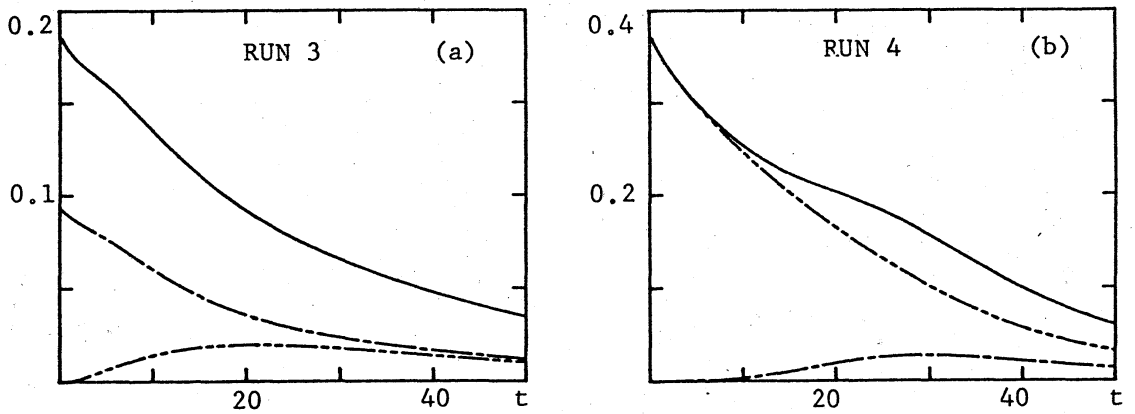


FIG. 7 ——— ; $\mathcal{E}(t)/\nu$, - - - ; $\mathcal{E}_{11}(t)/\nu$, - · - · ; $\mathcal{E}_{33}(t)/\nu$.

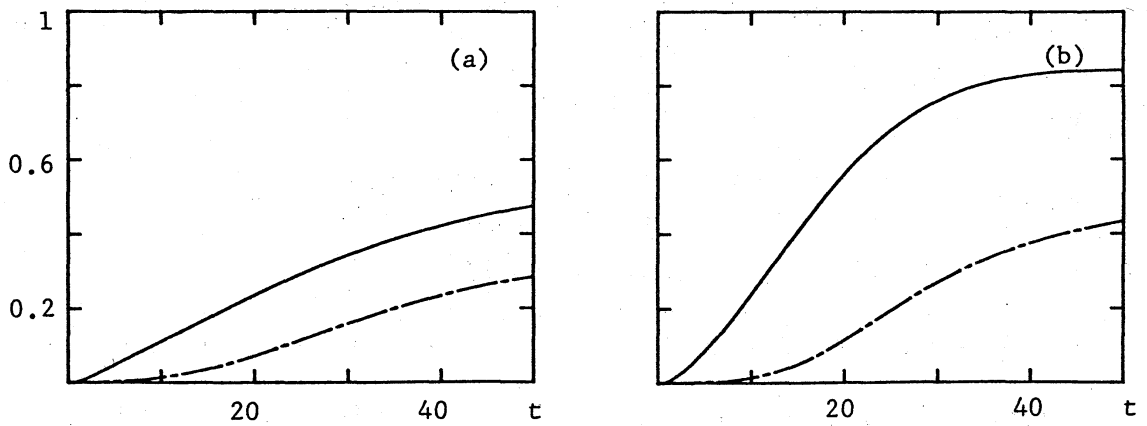


FIG. 8(a). ——— ; $E_{11}(t)/E_{33}(t)$ for RUN 3, - - - ; $E_{33}(t)/E_{11}(t)$ for RUN 4.
 (b). ——— ; $E_{11}(t)/E_{33}(t)$ for RUN 3, - - - ; $E_{33}(t)/E_{11}(t)$ for RUN 4.

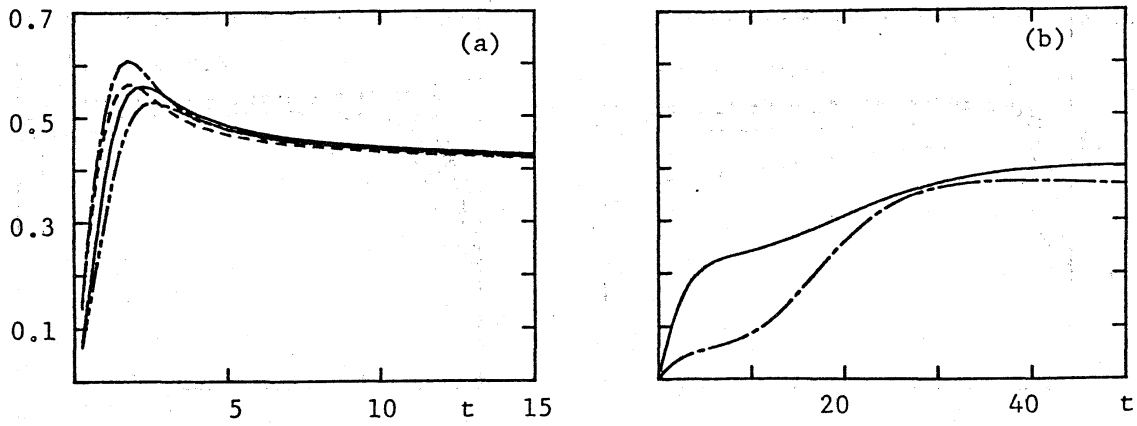


FIG. 9 Skewness coefficient $S(t)$ (a) ---; RUN 1, —; RUN 2, - - - -; RUN 5, - · - ·; RUN 6. (b). —; RUN 3, - - - -; RUN 4.

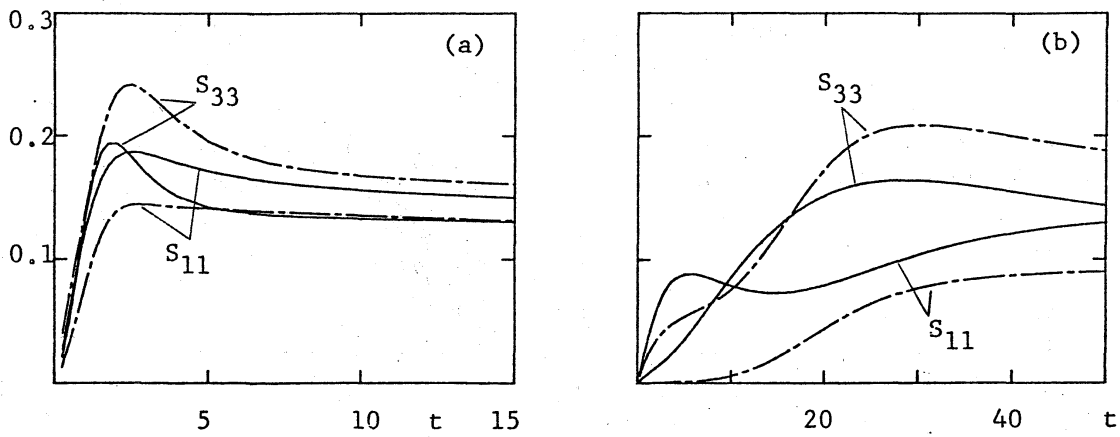


FIG. 10 $S_{11}(t), S_{33}(t)$ (a) —; RUN 2, - - - -; RUN 6. (b) —; RUN 3, - - - -; RUN 4.

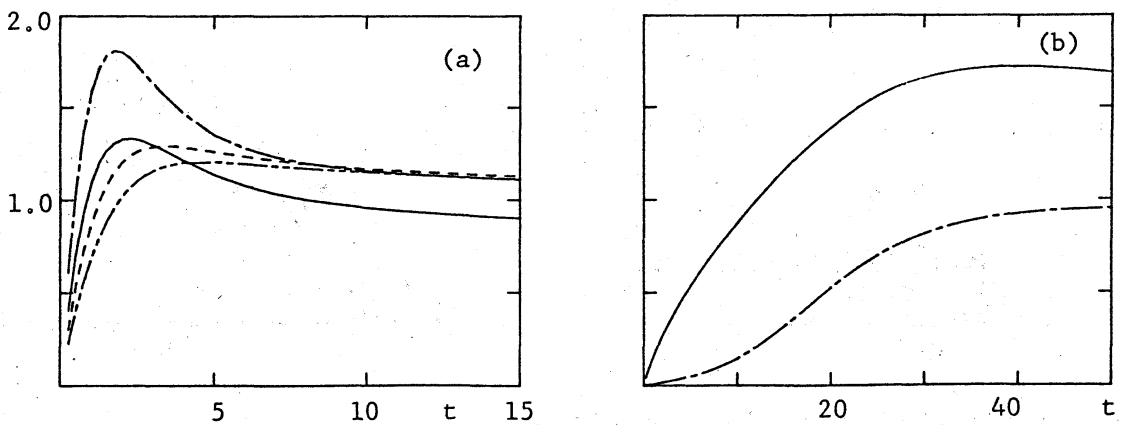


FIG. 11 Rottaの等方化定数 (a) —; RUN 1, - - - -; RUN 2, - · - ·; RUN 5, - · - ·; RUN 6. (b) —; RUN 3, - - - -; RUN 4.

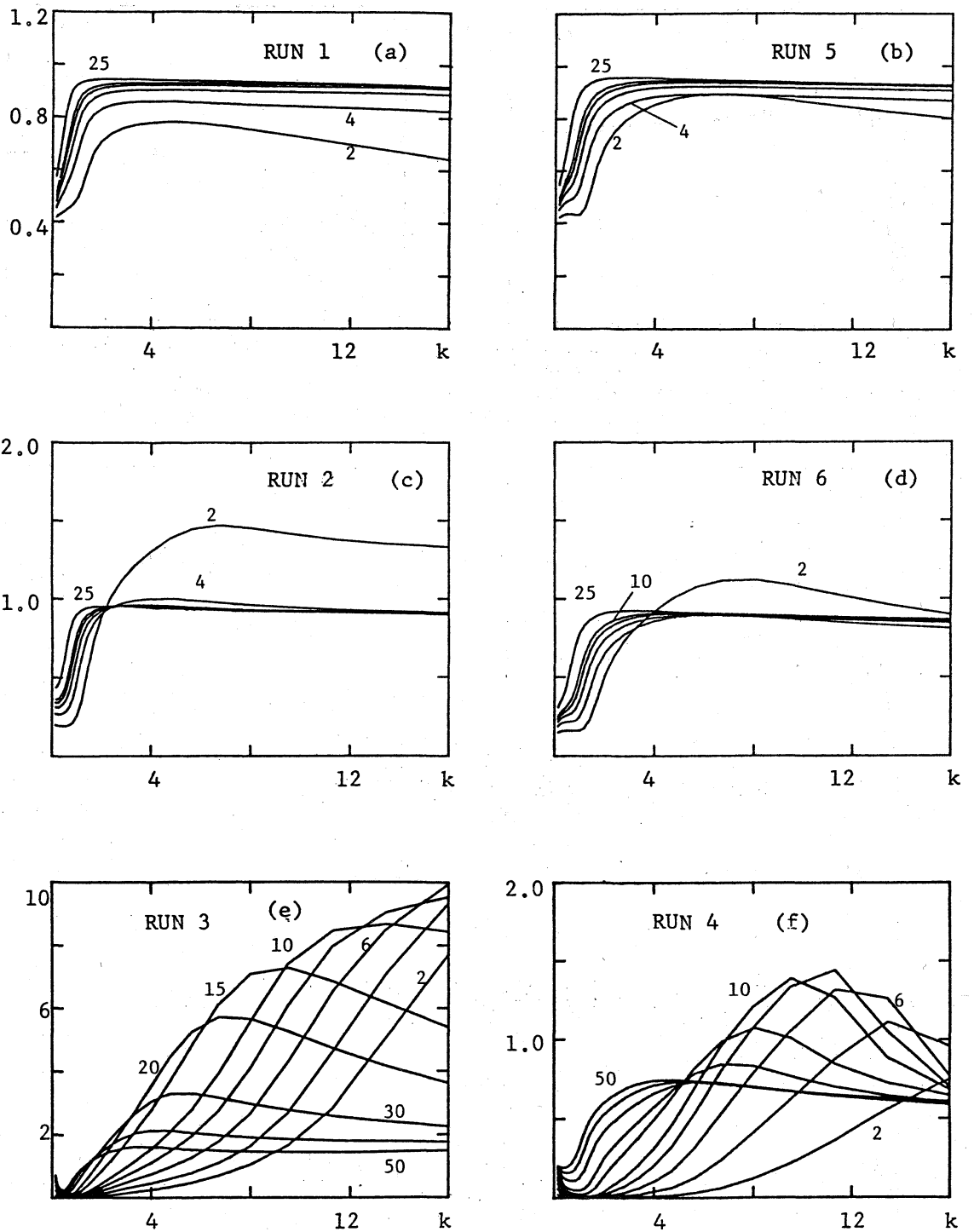


FIG. 12 $E_{33}(k, t)/E_{11}(k, t)$ for RUNS 1, 2, 3 ,
 $E_{11}(k, t)/E_{33}(k, t)$ for RUNS 4, 5, 6 .

(図内の数字は時刻 t)