数理解析研究所講究録
653巻 1988年 169-177

回路結合と作用素不等式

北大応用電気研　安藤　毅 (Tsuyoshi Ando)

1. 正値作用素の間の演算

（有界線形）正値作用素の対A, B から新しい正値作用素を作り出す演算の中で、最も基本的なものは代数和 $A+B$ と, その双対と考えられる $(A^{-1}+B^{-1})^{-1}$ であろう。A, B をそれぞれ（無限）線形抵抗回路網の（作用素）抵抗と考えると、$A+B$ はそれ等の回路網を直列 (*series*) に結合してできる回路網の抵抗に対応し、$(A^{-1}+B^{-1})^{-1}$ は並列 (*parallel*) に結合したものの抵抗と考えられる。この観点から $(A^{-1}+B^{-1})^{-1}$ を A, B の並和 (*parallel sum*) と呼び $A:B$ とかく、すなわち

$$A:B = (A^{-1}+B^{-1})^{-1}.$$

正値作用素の対を、何等かの意味で、均等にまぜて平均化したものを作り出すという立場からすれば、$(A+B)/2$ は算術平均 (*arithmetic mean*) と考えられ、$2(A^{-1}+B^{-1})^{-1}$ は調和平均 (*harmonic mean*) と考えられる。

平均という概念を一般化して、二項演算 $(A,B)\mapsto A\sigma B$ を平均（mean）と呼ぶためには次の性質を要求しよう。

(i)（単調性）

$$A_1 \geqq A_2,\ B_1 \geqq B_2 \implies A_1\sigma B_1 \geqq A_2\sigma B_2。$$

(ii)（トランス不等式）

$$T^*\cdot(A\sigma B)\cdot T \leqq (T^*AT)\sigma(T^*BT)。$$

(iii)（上からの連続性）

$$A_n\downarrow A,\ B_n\downarrow B \implies A_n\sigma B_n\downarrow A\sigma B。$$

(iv)（正規性）　$A\sigma A = A$。

(v)（対称性）　$A\sigma B = B\sigma A$.

算術平均，調和平均がこれ等の性質を持つことは直ちに判る。

(iii)は演算 σ を半正値作用素対までに拡張するためのものである。(ii)の性質は非常に強く，スカラー作用素 1，t を考えると、$1\sigma t$ はまたスカラー作用素となるのでこれを $f(t)$ と書くと

$$A\sigma B = A^{1/2}\cdot f(A^{-1/2}BA^{-1/2})\cdot A^{1/2}$$

となる。また(i)より、$f(t)$ は $[0,\infty)$ 上の（非負な）作用素単調関数（operator monotone function）となる。すなわち

$$0 \leqq C_1 \leqq C_2 \implies 0 \leqq f(C_1) \leqq f(C_2)。$$

（久保氏の講演にもあるように）古典的な Löwner の理論によると，$[0,\infty)$ 上の（非負な）作用素単調関数 $f(t)$ に対

しては、定数 $\alpha, \beta \geqq 0$ と測度 $\mu(\cdot)$ が一意的に定まり

$$f(t) = \alpha + \beta t + \int_0^\infty \frac{st}{s+t} d\mu(s)$$

となる。したがって演算 $A \sigma B$ は

$$A \sigma B = \alpha A + \beta B + \int_0^\infty sA : B d\mu(s)$$

と書ける。逆に右辺の形で定義される演算は(i)〜(iii)を満す。この積分表示は，(i)〜(iii)の性質をもつ演算は，回路網との対応で，(重み付き)並列結合の(重み付き連続)直列結合で実現できることを示している。

積分表示から，演算 σ の凹性(*concavity*)が出る，

$$(A_1 + A_2)\sigma(B_1 + B_2) \geqq A_1 \sigma B_1 + A_2 \sigma B_2.$$

また，(iv)と(v)の条件の下では，算術平均が最大で調和平均が最小なことは直ちに判る。

$$2(A:B) \leqq A \sigma B \leqq (A+B)/2.$$

2. 幾何平均

算術平均，調和平均と並んで最も身近な概念は幾何平均(*geometric mean*)であろう。吾々の立場では、これは $f(t) = \sqrt{t}$ なる作用素単調関数に対応すべきである。この幾何平均を $A \# B$ であらわすと

$$A \# B := A^{1/2}\cdot(A^{-1/2}BA^{-1/2})^{1/2}\cdot A^{1/2} = B^{1/2}\cdot(B^{-1/2}AB^{-1/2})^{1/2}\cdot B^{1/2}$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}(sA:B)\frac{ds}{\sqrt{s}} = \frac{1}{\pi}\int_{s_1+s_2=1,\, s_i\geq 0}\left(\frac{A_1}{s_1}:\frac{A_2}{s_2}\right)\frac{ds_1 ds_2}{\sqrt{s_1 s_2}}\text{。}$$

連続な直列結合というものは，実際には実現できないもので、より有効な近似が要求される。これに答えるのが次のladder型の近似である。

A, Bから(X_n, Y_n) $n=1,2\cdots$を

$$\begin{cases} X_1 := (A+B)/2, \\ Y_1 := 2(A:B) \end{cases} \cdots \begin{cases} X_{n+1} := (X_n+Y_n)/2, \\ Y_{n+1} := 2(X_n:Y_n) \end{cases}$$

に作ると，$X_n \downarrow A\#B$ でまた $Y_n \uparrow A\#B$。

幾何平均なる概念が作用素の不等式を取扱うのに有用な一例を示そう（これは古田氏の講演とも関連する)。$f(t)=t^p$なる関数は $0<p\leqq 1$ では作用素単調であるが，$1<p<\infty$ ではそうではない。したがって $p>1$ のとき，$A\geqq B\geqq 0$ から $A^p\geqq B^p$ はでない。しかし（$A^p\geqq B^p$ の系である）$A^{-p}\# B^p\leqq 1$ は導かれる．もう少し一般に $A\geqq B\geqq 0$ なら $\exp(-tA)\#\exp(tB)$ は t の単調減少関数であることが示される。

3. n個の組の平均

n個の正値作用素の組 $\vec{A}=(A_1,\cdots,A_n)$ の平均はどのように定義すべきであろうか。算術平均，調和平均は当然

算術平均 $:= \{\sum_{j=1}^{n} A_j\}/n$，調和平均 $:= n \prod_{j=1}^{n} : A_j$

と定義すべきであるが，幾何平均が先づ問題である。

Arazy，幸崎等は積分表示をもって定義とするのが適当であるという。

$$\mathbb{G}(\vec{A}) = \text{幾何平均} := \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{n})^n} \int_{\substack{\Sigma t_j = 1 \\ t_j \geqq 0}} \left\{ \prod_{j=1}^{n} : \frac{A_j}{t_j} \right\} \frac{dt_1 \cdots dt_n}{(\prod_{j=1}^{n} t_j)^{1-1/n}}。$$

これを定義とすれば，幾何平均の各変数に関しての単調性，凹性またトランス不等式などは直ちに導かれる。また算術・幾何・調和平均不等式も明らかである。

$$n \prod_{j=1}^{n} : A_j \leqq \mathbb{G}(\vec{A}) \leqq \{\sum_{j=1}^{n} A_j\}/n.$$

しかし，$\mathbb{G}(\vec{A})$ とその双対 $\mathbb{G}(\vec{A}^{-1})^{-1}$ の間の(不)等式関係も判らない。また、$n = 2$ のときに示した，ladder型の近似も得られない。

一度スカラーの n 個の組 $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ に立ち戻って考察しよう。

$e_{k,n}(\vec{\alpha}) :=$ (正規化された) k－次の基本対称関数

を基にして，Marcus－Lopes 平均 $E_{k,n}(\vec{\alpha})$ を

$$E_{k,n}(\vec{\alpha}) := \frac{e_{k,n}(\vec{\alpha})}{e_{k-1,n}(\vec{\alpha})} \qquad (\text{但し } e_{0,n}(\vec{\alpha}) \equiv 1)$$

で定義すると，明らかに

$$E_{1,n}(\vec{\alpha}) = \text{算術平均},\ E_{n,n}(\vec{\alpha}) = \text{調和平均},\ \prod_{k=1}^{n} E_{k,n}(\vec{\alpha}) = \prod_{j=1}^{n} \alpha_j .$$

Anderson, Morley, Trapp 〔1〕は，Marcus-Lopes 平均を正値作用素の n 個の組 $\vec{A} = (A_1, \cdots, A_n)$ に拡張することからはじめた。定義は組 (k, n) に関する induction による。

$$\mathcal{S}_{1,n}(\vec{A}) := \Big\{\sum_{j=1}^{n} A_j\Big\}/n$$

$$\mathcal{S}_{k,n}(\vec{A}) := \sum_{j=1}^{n} \Big\{ \frac{A_j}{n-k+1} : \frac{\mathcal{S}_{k-1,n-1}(\vec{A}_{(j)})}{k-1} \Big\},$$

但し $\vec{A}_{(j)} := (A_1, \cdots, A_{j-1}, A_{j+1}, \cdots, A_n)$,

$$s_{k,n}(\vec{A}) := \mathcal{S}_{n-k+1,n}(\vec{A}^{-1})^{-1},$$

但し $\vec{A}^{-1} := (A_1^{-1}, \cdots, A_n^{-1})$.

容易に判ることは

$$\mathcal{S}_{1,n}(\vec{A}) = s_{1,n}(\vec{A}),\quad \mathcal{S}_{n,n}(\vec{A}) = s_{n,n}(\vec{A}).$$

スカラーの組 $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ に対しては

$$\mathcal{S}_{k,n}(\vec{\alpha}) = s_{k,n}(\vec{\alpha}) = E_{k,n}(\vec{\alpha}) \qquad (k=1, 2, \cdots n)$$

となる。

$\vec{A} = (A_1, \cdots, A_n)$ から，ladder 型近似を一般化して，

$$\vec{A}^{(1)} := (\mathcal{S}_{1,n}(\vec{A}), \cdots, \mathcal{S}_{n,n}(\vec{A}))$$

$$\vec{A}^{(N+1)} := (\mathcal{S}_{1,n}(\vec{A}^{(N)}), \cdots, \mathcal{S}_{n,n}(\vec{A}^{(N)}))\quad N = 1, 2, \cdots$$

とすると

$$\vec{A}^{(N)} \xrightarrow{N\to\infty} (\mathfrak{G}, \mathfrak{G}, \cdots, \mathfrak{G}).$$

この $\mathfrak{G} := \mathfrak{G}_{\mathcal{S}}(\vec{A})$ は $\vec{A}$ の幾何平均の候補と考えられる。
上で $\mathcal{S}$ を s に代えて同じ操作をすると極限は、$\mathfrak{G}_s(\vec{A}^{-1})^{-1}$ となる．当然問題となるのは，$\mathfrak{G}_{\mathcal{S}}(\vec{A})$ と $\mathfrak{G}_{\mathcal{S}}(\vec{A}^{-1})^{-1}$ の(不)等式関係また，$\mathfrak{G}_{\mathcal{S}}(\vec{A})$と Arazy，幸崎等の $\mathfrak{G}(\vec{A})$ との関係である。

4. 不等式

上記の幾何平均の間の関係として，吾々は次の予想を提出する。

（予想）　$\mathfrak{G}_{\mathcal{S}}(\vec{A}) \geqq \mathfrak{G}_{\mathcal{S}}(\vec{A}^{-1})^{-1}$

その定義から、この予想を証明するには、より強い次を示せばよい。

（予想）　$\mathcal{S}_{k,n}(\vec{A}) \geqq s_{k,n}(\vec{A}) \qquad (k = 2, 3, \cdots, n-1)$。

この不等式の完全な証明に成功したわけではなく，現在のところ

$$\mathcal{S}_{2,n}(\vec{A}) \geqq s_{2,n}(\vec{A}),\ \text{従って}\ \mathcal{S}_{n-1,n}(\vec{A}) \geqq s_{n-1,n}(\vec{A})$$

だけである。しかし、その証明の戦略は一般の k にも遂行できるはずであるが、combinatorial に困難な点が残っている。

以下は

$$\mathcal{S}_{k,n}(\vec{A}) \geqq s_{k,n}(\vec{A}) \tag{1}$$

の証明への戦略である。　(cf. [2]).

（第1段）：(1)は次の不等式と等価である.

$$\langle x|\mathcal{S}_{k,n}(\vec{A})x\rangle + \langle y|\mathcal{S}_{n-k+1,n}(\vec{A})y\rangle \geqq 2|\langle x|y\rangle| \quad ({}^{\forall}x, y). \tag{2}$$

（第2段）：並和に対する公式

$$\langle x|(S:T)x\rangle = \inf_z \{\langle x-z|S(x-z)\rangle + \langle z|Tz\rangle\}$$

を使って、$\mathcal{S}_{k,n}(\vec{A})$ が和と並和で定義されているので、(2)の左辺を quasi-linearize すると、次と等価になる。

$$\inf \sum_j \{\Sigma\langle x_j\cdots|A_j x_j\cdots\rangle + \sum\langle y_j\cdots|A_j^{-1} y_j\cdots\rangle \geqq 2|\langle x|y\rangle. \tag{3}$$

（第3段）：(3)の左辺で $\vec{A}=(A_1,\cdots A_n)$ に関しての inf をとり、次の公式を使え。

（Flanders の公式 [3]）

$$\inf_{S>0}\{\sum_i\langle u_i|Su_i\rangle + \sum_j\langle v_j|S^{-1}v_j\rangle\} = 2\|[\langle u_i|v_j\rangle]_{i,j=1}\|_1$$

但し　$\|\cdot\|_1$ は trace norm である.

従って、次と等価となる。

$$\inf \sum_j \|[\langle x_j\cdots|y_j\cdots\rangle]\|_1 \geqq |\langle x|y\rangle|. \tag{4}$$

（第4段）：同じサイズの（矩形）行列 X, Y に対しては,

不等式

$$\|X\|_1 \cdot \|Y\|_\infty \geq |tr(X \cdot Y^*)|$$

但し $\|\cdot\|_\infty$ は *operator norm*,

が成り立つから，(4)を示すには，どの様に $\{x_j \cdots\}, \{y_j \cdots\}$を固定しても、それに従って $\nabla_n \neq 0$ を見つけて

$$\sum_{j=1}^{n} tr([\langle x_j \cdots | y_j \cdots \rangle] \cdot \nabla_n^*) = \langle x | y \rangle \cdot \|\nabla\|_\infty \tag{5}$$

とできればよい。

(5)を満たす ∇_n を構成するアルゴリズムを見出すのが、*combinatorial* にかなり複雑で、一般の k にはまだ成功してない。

5. 文献

[1] W. N. Anderson, Jr. T. D. Morley, G. E. Trapp, Symmetric function means of positive operators, Linear Alg. Appl. 60(1984), 129-143.

[2] T. Ando, An inequality between symmetric function means of positive operators, Acta Sci. Math. 45(1983), 19-22.

[3] H. Flanders, An extremal problem in the space of positive definite matrices, Linear Multilinear Alg. 3(1975), 33-39.