

## 線形不等式と不動点定理

東工大 理 高橋 渉 (Wataru Takahashi)

Fan は凸不等式のシステムに関するつぎの定理を証明した。

定理 A (Fan のシステム定理)  $X$  を線形位相空間のコンパクトで凸な集合とし,  $f_1, f_2, \dots, f_n$  を  $X$  上で定義され, 値を  $(-\infty, \infty)$  にとる下半連続で凸な関数とする. このとき, つぎの条件 (1) と (2) は同値である.

(1)  $n$  個の不等式のシステム

$$f_i(x) \leq c \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

が解をもつ.

(2)  $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$  となる非負な数  $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$  に対して,

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(y) \leq c$$

となる  $y \in X$  が存在する.

この定理は minimax 定理, または Fan-Browder の集合値写像に対する不動点定理を用いて証明されるが, それはいろいろ

るの存在定理を証明する上で非常に重要な定理である。ここではまずこの定理を2つの方向から拡張することを試みる。1つは定理Aからコンパクト性と凸性をはずすことである。他の1つは、定理Aにおいて、下半連続で凸な関数 $f_\alpha$ を値を $(-\infty, \infty]$ までとるような場合まで拡張することである。実際、 $\{f_\alpha\}$ が連続な凸関数の族で $(-\infty, \infty)$ に値をとるような場合であっても

$$g(x) = \sup_{\alpha} f_{\alpha}(x)$$

で定義される下半連続で凸な関数 $g$ は $(-\infty, \infty]$ に値をとることがあるからである。定理Aからコンパクト性と凸性をはずした定理を用いると、最近Simonsによって証明されたコンパクト性を仮定しないminimax定理を簡単に証明することができる。またMarkov-Kakutaniの不動点定理とFanのシステム定理を用いると、Mazur-Orliczの定理が証明できるが、この定理を用いると、Hahn-Banachの拡張定理とKönigの定理が簡単に証明できる。Königの定理は分離定理と最短距離に関する定理の拡張定理を得るのに便利である。

上述のように、ここではFanのシステム定理を2つの方向から拡張することを1つの目的とするが、Fanの定理がいろいろの分野（特にここでは作用素論の分野）で非常に有効であることを強調するのもここでの目的である。

## §1. Fan のシステム定理の証明

Fan [4] は Fan のシステム定理を minimax 定理から証明したが、ここでは集合値写像の不動点定理から証明することを試みる。まず、Brouwer の不動点定理と 1 の分解定理を用いてつぎの不動点定理を証明することから始めよう。

補助定理 1.  $E$  を線形位相空間 (Hausdorff を仮定する) とする。  $Y$  を  $E$  のコンパクト集合とし、  $X$  を  $E$  の凸部分集合で  $X \subset Y$  となるものとする。  $A$  を  $X$  から  $2^Y$  ( $Y$  の部分集合の全体) への写像で、任意の  $y \in Y$  に対して、  $A^{-1}y$  がつねに凸集合になっているものとする。このとき、  $X$  から  $2^Y$  への写像  $B$  で、つぎの 3 つの条件：

- (1) 任意の  $x \in X$  に対して、  $Bx \subset Ax$  である；
- (2) 任意の  $y \in Y$  に対して、  $B^{-1}y \neq \emptyset$  である；
- (3) 任意の  $x \in X$  に対して、  $Bx$  は開集合である

を満たすものが存在するならば、  $x_0 \in Ax_0$  となる  $x_0 \in X$  が存在する。

証明 すべての  $y \in Y$  に対して、  $B^{-1}y \neq \emptyset$  であるから、

$$Y = \bigcup_{x \in X} Bx$$

である。すなわち、  $\{Bx : x \in X\}$  は  $Y$  の開被覆になっている。ここで  $Y$  はコンパクトであるから、  $Y = \bigcup_{i=1}^m Bx_i$  となるような

$X$  の  $n$  個の元  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  が存在する。いま  $Y$  の開被覆  $\{Bx_1, Bx_2, \dots, Bx_n\}$  に対応する  $\perp$  の分解を  $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$  とし、 $Y$  上に写像  $p$  を

$$p(y) = \sum_{i=1}^n \beta_i(y) x_i \quad (\forall y \in Y)$$

で定義すると、 $p$  は  $Y$  から  $X$  への連続写像となる。またこの  $p$  はすべての  $y \in Y$  に対して、 $p(y) \in A^{-1}y$  でもある。実際、 $y \in Y$  に対して、 $\beta_i(y) \neq 0$  ならば  $y \in Bx_i$  となり、 $B^{-1}y \ni x_i$  である。(1)より  $B^{-1}y \subset A^{-1}y$  であり、 $A^{-1}y$  は凸集合であるから  $p(y) \in A^{-1}y$  である。 $X_0$  を  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  によって張られる凸集合とすると、この  $X_0$  は  $\mathbb{R}^m$  のコンパクト凸集合  $K$  と同相になるから、 $X_0$  から  $K$  への同相写像を  $f$  とすると、 $f \circ p \circ f^{-1}$  は  $K$  から  $K$  への連続写像になる。よって Brouwer の不動点定理を用いると、 $f \circ p \circ f^{-1}(x_0) = x_0$  となるような  $x_0 \in K$  が存在する。これは  $p \circ f^{-1}(x_0) = f^{-1}(x_0)$  を意味するので、 $y_0 = f^{-1}(x_0)$  とおくと、 $y_0 = p(y_0)$  である。 $p(y_0) \in A^{-1}y_0$  であるから  $y_0 \in A^{-1}y_0$  となる。よって、 $y_0 \in Ay_0$  である。

上の補助定理で、 $X = Y$ 、 $A = B$  とすると有名な Fan-Browder の不動点定理が得られる。つぎの存在定理は Fan-Browder の不動点定理から証明できる。

補助定理 2.  $X$  を線形位相空間  $E$  のコンパクトな凸集合と

し、 $F$  をつぎの条件 (1), (2), (3) を満たす  $X \times X$  上の実数値関数とする。

- (1)  $y \in Y$  に対し、 $x$  の関数  $F(x, y)$  は上半連続である；
- (2)  $x \in X$  に対し、 $y$  の関数  $F(x, y)$  は凸関数である；
- (3)  $F(x, x) \geq c$  ( $\forall x \in X$ ) となるような実数  $c$  が存在する。

このとき、 $F(x_0, y) \geq c$  ( $\forall y \in X$ ) となる  $x_0 \in X$  が存在する。

証明 任意の  $x \in X$  に対し、 $F(x, y) < c$  となる  $y \in X$  がつねに存在するとし、 $X$  から  $2^X$  の写像  $A$  を

$$Ay = \{x \in X : F(x, y) < c\} \quad (\forall y \in Y)$$

で定義しよう。すると、 $Ay$  は開集合である。また、

$$A^+x = \{y \in X : F(x, y) < c\}$$

であるから、 $A^+x$  は空でない凸集合である。よって、補助定理 1 から  $x_0 \in A x_0$  となる  $x_0 \in X$  が存在する。これは  $F(x_0, x_0) < c$  を意味するから、 $c \leq F(x_0, x_0)$  に矛盾する。

補助定理 3.  $X$  と  $Y$  を位相空間とする。  $\beta$  を  $X$  から  $[0, \infty)$  への連続関数とし、  $f$  を  $Y$  から  $(-\infty, \infty]$  への下半連続な関数とする。このとき、

$$(\beta \cdot f)(x, y) = \beta(x) f(y) \quad (\forall x \in X, \forall y \in Y)$$

で定義される  $X \times Y$  上の関数  $\beta \cdot f$  は下半連続である。

証明  $a \in \mathbb{R}$  とする。このとき、

$$A = \{(x, y) \in X \times Y : \beta(x) f(y) > a\}$$

が  $X \times Y$  で開集合であることを示せば十分である。  $(x_0, y_0) \in A$  としよ。まず  $\beta(x_0) > 0$  のときは

$$\beta(x_0) > \varepsilon, \quad (\beta(x_0) - \varepsilon) f(y_0) > a, \quad (\beta(x_0) + \varepsilon) f(y_0) > a$$

となるような  $\varepsilon > 0$  がとれる。いま

$$U = \{x \in X : |\beta(x) - \beta(x_0)| < \varepsilon\}$$

$$\times \left\{ y \in Y : f(y) > \max \left[ \frac{a}{\beta(x_0) + \varepsilon}, \frac{a}{\beta(x_0) - \varepsilon} \right] \right\}$$

とおくと、 $U$  は開集合で、しかも  $(x_0, y_0) \in U \subset A$  である。実際、 $(x, y) \in U$  とすると、 $a \geq 0$  のときは

$$\beta(x) f(y) > \beta(x) \frac{a}{\beta(x_0) - \varepsilon} \geq a$$

となり、 $(x, y) \in A$  である。 $a < 0$  のときは

$$\beta(x) f(y) > \beta(x) \frac{a}{\beta(x_0) + \varepsilon} > a$$

となり、 $(x, y) \in A$  である。つぎに  $\beta(x_0) = 0$  としよ。このとき、 $a < 0$  なので  $\delta \cdot f(y_0) > a$  となるような  $\delta > 0$  が存在する。そこで、

$$V = \{x \in X : 0 \leq \beta(x) < \delta\} \times \{y \in Y : f(y) > \frac{a}{\delta}\}$$

とおけば、 $V$  は開集合であり、 $(x_0, y_0) \in V \subset A$  である。実際、もし  $(x, y) \in V$  ならば

$$\beta(x) f(y) > \beta(x) \frac{a}{\delta} > a$$

となり,  $(x, y) \in A$  である. これは証明を完了する.

補助定理 2 と 3 を用いて,  $F_{an}$  のシステム定理を証明する.

定理 A ( $F_{an}$  のシステム定理) の証明 (2) における  $y$  として, (1) の解をとれば (1)  $\Rightarrow$  (2) は明らかである. (2)  $\Rightarrow$  (1) を証明する.  $f_i(x_0) \leq c$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) となる  $x_0 \in X$  が存在しないとする. このとき,

$$G_i = \{x \in X : f_i(x) > c\} \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

とすると,  $\{G_1, G_2, \dots, G_n\}$  は  $X$  の開被覆になる. いまこの開被覆に対応する 1 の分解を  $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$  とし,  $X \times X$  上の関数を

$$F(x, y) = \sum_{i=1}^n \beta_i(x) f_i(y)$$

とすると,  $F$  は補助定理の (1) と (2) を満たしており, さらに,  $g(x) = F(x, x)$  は補助定理 3 より下半連続である. よって, すべての  $x$  に対して,  $F(x, x) \geq c_0 > c$  となるような実数  $c_0$  が存在する. そこで補助定理 2 が使えて, すべての  $y \in X$  に対し

$$F(x_0, y) \geq c_0 > c$$

となるような  $x_0 \in X$  の存在がわかる. すなわち, すべての  $y \in X$  に対して

$$\sum_{i=1}^m \beta_i(x_0) f_i(y) > c$$

であり,  $\sum_{i=1}^m \beta_i(x_0) = 1$  となるような非負な数  $\{\beta_i(x_0)\}$  が存在したことになる. よって (2)  $\Rightarrow$  (1) は証明された.

## §2. $F_{am}$ のシステム定理の拡張

まず  $F_{am}$  のシステム定理からコンパクト性と凸性をはずすことを試みよう. その前に定義を与えておく.

$X, Y$  を空でない集合とし,  $F$  を  $X \times Y$  上の実数値関数とする. このとき,  $F(x, y)$  が第1変数に関して convexlike であるとは, 任意の  $x_1, x_2 \in X$  と  $\alpha (0 \leq \alpha \leq 1)$  に対して, ある  $x_0 \in X$  が存在して, 不等式

$$F(x_0, y) \leq \alpha F(x_1, y) + (1-\alpha)F(x_2, y) \quad (\forall y \in Y)$$

がつねに成立することである. concavelike についても不等式

$$F(x_0, y) \geq \alpha F(x_1, y) + (1-\alpha)F(x_2, y) \quad (\forall y \in Y)$$

と同様に定義できる.

定理1.  $X$  をある集合,  $f_1, f_2, \dots, f_m$  を  $X$  上の実数値関数とする.  $I = \{1, 2, \dots, m\}$  とし,  $X \times I$  上の関数  $F$  を

$$F(x, i) = f_i(x) \quad (\forall i \in I, \forall x \in X)$$

とする. また,  $F$  を第1変数に関して convexlike であるとし,  $c \in \mathbb{R}$  とする. このとき,  $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$  となる  $m$  個の非負な数  $\{\alpha_i\}_{i=1}^m$  に対して,



$$\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(x_0) \leq c$$

となる  $x_0 \in X$  が存在するなら,

$$\inf_{x \in X} \max_i f_i(x) \leq c.$$

定理 1 を証明する前につぎのような minimax 定理を証明しておく.

補助定理 4.  $X$  を線形位相空間のコンパクトで凸な集合とし,  $Y$  を単なる集合とする.  $F$  を  $X \times Y$  上の実数値関数でつぎの (1) と (2) の条件を満たすものとする.

(1)  $y \in Y$  を固定したとき,  $x$  の関数  $F(x, y)$  は下半連続な凸関数である;

(2)  $F(x, y)$  は第 2 変数に関して concavelike である.

このとき,

$$\sup_{y \in Y} \min_{x \in X} F(x, y) = \min_{x \in X} \sup_{y \in Y} F(x, y).$$

証明  $c = \sup_{y \in Y} \min_{x \in X} F(x, y)$  とし,  $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  を  $Y$  の任意の有限集合とする. いま  $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$  となる  $n$  個の非負な数  $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$  をとると, (2) より  $y_0 \in Y$  が存在して

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i F(x, y_i) \leq F(x, y_0) \quad (\forall x \in X)$$

となる。この  $y_0$  に対して、 $c = \sup_{y \in Y} \min_{x \in X} F(x, y)$  より  $F(x_0, y_0) \leq c$  となる  $x_0 \in X$  が存在する。すなわち、 $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$  となる非負な数  $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$  に対して

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i F(x_0, y_i) \leq F(x_0, y_0) \leq c$$

となる  $x_0 \in X$  が存在する。ここで定理 A (Fam のシステム定理) を用いると

$$\bigcap_{i=1}^n \{x : F(x, y_i) \leq c\} \neq \emptyset$$

がいえたとことになる。  $X$  がコンパクトなので

$$\bigcap_{y \in Y} \{x : F(x, y) \leq c\} \neq \emptyset$$

となる。これは  $\min_{x \in X} \sup_{y \in Y} F(x, y) \leq c$  を意味するので

$$c = \sup_{y \in Y} \min_{x \in X} F(x, y) \geq \min_{x \in X} \sup_{y \in Y} F(x, y)$$

である。逆の不等式は明らかであるから

$$\sup_{y \in Y} \min_{x \in X} F(x, y) = \min_{x \in X} \sup_{y \in Y} F(x, y).$$

定理 1 の証明

$$Y = \left\{ \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) : \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1 \right\}$$

とし

$$f(x, \alpha) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(x) \quad (\forall x \in X, \forall \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in Y)$$

とする。すると、 $f$  は第 1 変数に関して convexlike である。  
 実際  $F(x, \alpha) = f_\alpha(x)$  は第 1 変数に関して convexlike であるから  
 $a+b=1$  となるような  $a, b \geq 0$  と  $x, y \in X$  に対して

$$\begin{aligned} a f(x, \alpha) + b f(y, \alpha) &= \sum_{i=1}^m \alpha_i \{ a f_i(x) + b f_i(y) \} \\ &\geq \sum_{i=1}^m \alpha_i f_i(z) = f(z, \alpha) \quad (\forall \alpha \in Y) \end{aligned}$$

となるような  $z \in X$  が存在する。だから補助定理 4 の変形によつて

$$\inf_{x \in X} \max_{\alpha \in Y} f(x, \alpha) = \max_{\alpha \in Y} \inf_{x \in X} f(x, \alpha) \leq c$$

となる。  $f(x, \alpha) = \sum_{i=1}^m \alpha_i f_i(x)$  であるから

$$\inf_{x \in X} \max_i f_i(x) \leq c.$$

定理 1 の直接的な結果として、つぎの系を得る。

系 1.  $X$  を線形空間の凸集合とし、 $f_1, f_2, \dots, f_m$  を  $X$  上の実数値凸関数とする。もし、 $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$  となる  $m$  個の非負な数  $\{\alpha_i\}_{i=1}^m$  に対して

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i f_i(x_0) \leq c$$

となる  $x_0 \in X$  が存在するならば、このとき、

$$\inf_{x \in X} \max_i f_i(x) \leq c.$$

つぎに,  $F_m$  のシステム定理を, 関数  $f_i$  の値が  $(-\infty, \infty]$  までとるような場合まで拡張することを試みる.

定理 2.  $X$  を線形位相空間  $E$  のコンパクトで凸な集合とする.  $f_1, f_2, \dots, f_m$  を  $X$  から  $(-\infty, \infty]$  に値をとる下半連続で凸な関数とする. このとき, つぎの命題は同値である.

(1) 凸不等式のシステム

$$f_i(x) \leq 0 \quad (i=1, 2, \dots, m)$$

が  $X$  上で解をもつ;

(2)  $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$  となる非負な数  $\{\alpha_i\}_{i=1}^m$  に対して

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i f_i(y) \leq 0$$

となる  $y \in X$  が存在する.

証明 (1) が (2) を意味することは明らかである. (2)  $\Rightarrow$  (1) を証明しよう.

$$A = \bigcap_{i=1}^m \{x \in X : f_i(x) < \infty\}$$

とする.  $\alpha_i = \frac{1}{m}$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ) とすると, (2) から  $\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m f_i(x) \leq 0$

となる  $x \in X$  が存在する. これは  $x \in A$  を意味する. だから

$A$  は空でない. まず  $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$  となる非負な数  $\{\alpha_i\}_{i=1}^m$  に対して

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i f_i(x) \leq 0$$

となる  $x \in A$  が存在することを示す. ここで,  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m > 0$

で、 $\alpha_{m+1} = \dots = \alpha_n = 0$  を仮定しても一般性を失わない。実際  $m = n$  ならば、(2) から  $\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(x) \leq 0$  となる  $x \in A$  がとれるので、上のことは証明されたことになる。そこで  $1 \leq m < n$  としよう。  $0 < t < 1$  となる  $t$  に対して、(2) から

$$\sum_{i=1}^m t \alpha_i f_i(x_t) + \sum_{i=m+1}^n \frac{1-t}{n-m} f_i(x_t) \leq 0 \quad \dots (*)$$

となるような  $x_t \in A$  がとれる。  $0 < t < 1$  となるある  $t$  に対し

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i f_i(x_t) \leq 0$$

ならば、上のことは証明されたことになるので、すべての  $t$  ( $0 < t < 1$ ) に対して

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i f_i(x_t) > 0$$

と仮定できる。  $\alpha_{m+1} = \dots = \alpha_n = 0$  であるので

$$\sum_{i=1}^m t \alpha_i f_i(x_t) > 0 \quad \dots (**)$$

である。よって (\*), (\*\*) から

$$\sum_{i=m+1}^n f_i(x_t) \leq 0 \quad \dots (***)$$

を得る。  $X$  はコンパクトだから、 $\{x_t\}$  の部分ネット  $\{x_{t_r}\}$  で、  $t_r \rightarrow 1$ ,  $x_{t_r} \rightarrow x_0 \in X$  となるものが存在する。 (\*), (\*\*\*) と補助定理 3 を用いると

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i f_i(x_0) \leq \liminf_r \left( \sum_{i=1}^m t_r \alpha_i f_i(x_{t_r}) + \sum_{i=m+1}^n \frac{1-t_r}{n-m} f_i(x_{t_r}) \right) \leq 0,$$

$$\sum_{i=m+1}^n f_i(x_0) \leq \liminf_r \sum_{i=m+1}^n f_i(x_{t_r}) \leq 0$$

を得る。上の2つの式から  $x_0 \in A$  であり

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i f_i(x_0) \leq 0$$

である。ここで定理1を用いると、

$$\inf_{x \in X} \max_i f_i(x) \leq \inf_{x \in A} \max_i f_i(x) \leq 0$$

を得る。Xはコンパクトであり、 $\max_i f_i(x)$ は下半連続であるから  $\max_i f_i(x_0) \leq 0$  となる  $x_0 \in X$  が存在する。ゆえに

$$f_i(x_0) \leq 0 \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

となる。

この定理を用いて、つぎの定理も得られる。

定理3. Xを線形位相空間Eの空でないコンパクトな凸集合とする。 $\{f_\nu: \nu \in I\}$ をXから $(-\infty, \infty)$ に値をとる下半連続な凸な関数の族とする。このとき、つぎの命題は同値である。

(1) 凸不等式のシステム

$$f_\nu(x) \leq 0 \quad (\forall \nu \in I)$$

がX上で解をもつ。

(2)  $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$  となるn個の非負な数  $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$  と  $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n \in I$

に対して

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i f_{v_i}(x) \leq 0$$

となる  $x \in X$  が存在する.

証明  $X$  がコンパクトであることと定理 2 を用いれば明らかである.

### §3. システム定理の応用

この節ではまず初めに定理 1 を用いて最近 Simons によって証明された minimax 定理を簡単に証明する. そのあと Fan のシステム定理 (または定理 2) を用いて, Hardy-Littlewood-Pólya の定理を簡単に証明する (これは [4] による). 同様の手法で無限次元の Hardy-Littlewood-Pólya の定理が証明できるが, ここではその結果だけを述べることにする. また, Fan のシステム定理は Markov-Kakutani の不動点定理を介在にすると, Mazur-Orlicz の定理や König の定理の証明にも有効であるがここでは紙面の都合上省略する.

$X$  を空でない集合とし,

$$F(X) = \{X_0 : \emptyset \neq X_0 \subset X, X_0 \text{ は有限集合}\}$$

とする.

定理 4 (Simons).  $X, Y$  を任意の集合とし,  $f, g$  を  $X \times Y$  上の実数値関数で, つぎの (1), (2), (3) の条件を満たすものとする.

- (1)  $f(x, y) \leq g(x, y)$  ( $\forall (x, y) \in X \times Y$ );  
 (2)  $f$  は第 2 変数に関して convexlike である;  
 (3)  $g$  は第 1 変数に関して concavelike である.

このとき, つぎの (i), (ii), (iii) が成立する.

- (i)  $X_0 \in F(X)$ ,  $Y_0 \in F(Y)$  に対して

$$\inf_{y \in Y} \max_{x \in X_0} f(x, y) \leq \sup_{x \in X} \min_{y \in Y_0} g(x, y).$$

- (ii)  $\sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} g(x, y) > -\infty$  ならば,  $X_0 \in F(X)$  に対して

$$\inf_{y \in Y} \max_{x \in X_0} f(x, y) \leq \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} g(x, y).$$

- (iii)  $Y$  がコンパクト集合で,  $f$  が第 2 変数に関して下半連続ならば

$$\min_{y \in Y} \sup_{x \in X} f(x, y) \leq \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} g(x, y).$$

証明 (i)  $\sup_{x \in X} \min_{y \in Y_0} g(x, y) = c$  とし,  $X_0 = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$  と

する. 可なり,  $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$  とする非負な数  $\{\alpha_i\}_{i=1}^m$  に対して

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i f(x_i, y) \leq \sum_{i=1}^m \alpha_i g(x_i, y) \leq g(x_0, y) \quad (\forall y \in Y)$$

となる  $x_0 \in X$  が存在する.  $g(x_0, y_1) \leq c$  である  $y_1 \in Y_0$  が存在するので

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i f(x_i, y_1) \leq c$$



である。定理1より

$$\inf_{y \in Y} \max_{x \in X_0} f(x, y) \leq c = \sup_{x \in X} \min_{y \in Y_0} g(x, y).$$

(ii)  $\sup_{x \in X} \min_{y \in Y} g(x, y) = c$  とし,  $\varepsilon > 0$  とする.  $X_0 = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  と  $n$  個の非負な数  $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$  で  $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$  となるものに対して, (i) の場合と同様にして

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i, y_1) \leq c + \varepsilon$$

となるような  $y_1 \in Y$  が存在する. ここで定理1を使って

$$\inf_{y \in Y} \max_{x \in X_0} f(x, y) \leq c = \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} g(x, y).$$

(iii) 任意の有限集合  $X_0$  に対して,  $\max_{x \in X_0} f(x, y)$  は下半連続である. また  $Y$  はコンパクトなので  $\sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} g(x, y) = c$  とすると,  $\max_{x \in X_0} f(x, y_0) \leq c$  となる  $y_0 \in Y$  が存在する. そこで

$$\bigcap_{x \in X} \{y \in Y; f(x, y) \leq c\} \neq \emptyset.$$

よって,

$$\min_{y \in Y} \sup_{x \in X} f(x, y) \leq c = \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} g(x, y).$$

つぎに Hardy-Littlewood-Pólya の定理を Fan のシステム定理を使って証明してみよう.

$n \times n$  行列  $\{p_{ij}\}$  が doubly stochastic であるとは,  $p_{ij} \geq 0$

であり,かつ

$$\sum_{i=1}^m p_{ij} = 1 \quad (\forall j), \quad \sum_{j=1}^m p_{ij} = 1 \quad (\forall i)$$

を満たすときをいう.

定理5 (Hardy-Littlewood-Pólya). 実数  $a_i, b_i$  ( $1 \leq i \leq n$ )  
が下記の条件を満たすものとする:

$$a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq 0, \quad b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n \geq 0,$$

$$\sum_{i=1}^k a_i \leq \sum_{i=1}^k b_i \quad (1 \leq k \leq n), \quad \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n b_i.$$

このとき,

$$a_i = \sum_{j=1}^m p_{ij} b_j \quad (1 \leq i \leq n)$$

となるような  $m \times n$  の doubly stochastic 行列  $\{p_{ij}\}$  が存在する.

証明  $K$  を  $m \times n$  の doubly stochastic 行列の全体とする. このとき,  $K$  は  $n^2$ -次元ユークリッド空間のコンパクト凸集合とみなされる. 任意の  $m \times n$  doubly stochastic 行列  $P = \{p_{ij}\}$  に対して,

$$f_i(P) = a_i - \sum_{j=1}^m p_{ij} b_j \quad (1 \leq i \leq n)$$

を定義しよう. このとき, 定理の結論は  $2n$  個の不等式のシステム

$$f_i(P) \leq 0, \quad -f_i(P) \leq 0 \quad (1 \leq i \leq n)$$

が解をもつことと同値である. Fan のシステム定理にしたが

つて、これはつぎの命題を証明すれば十分である：

任意の実数  $c_i$  に対して、

$$\sum_{i=1}^n c_i f_i(P) \leq 0 \quad \dots (*)$$

となるような  $n \times n$  doubly stochastic 行列  $P = \{p_{ij}\}$  が存在する。

(\*) 式は

$$\sum_{i=1}^n c_i a_i \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_i p_{ij} b_j \quad \dots (**)$$

と同じであるから、 $c_i \geq 0$  の場合に (\*\*) を考えればよい。実際、 $c'_i = c_i + d \geq 0$  ( $1 \leq i \leq n$ ) となるように  $d \geq 0$  をとることができ、 $n \times n$  の doubly stochastic 行列  $P = \{p_{ij}\}$  が

$$\sum_{i=1}^n c'_i a_i \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c'_i p_{ij} b_j$$

を満たすならば、 $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n b_i$  と  $\sum_{i=1}^n p_{ij} = 1$  によって、

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d p_{ij} b_j = d \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n p_{ij} b_j = d \sum_{j=1}^n b_j = d \sum_{i=1}^n a_i$$

となるから、同じ行列  $P = \{p_{ij}\}$  が (\*\*) を満たす。

いまや  $c_i \geq 0$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) の場合を考えよう。 $\pi$  を  $1, 2, \dots, n$  の置換で  $c_{\pi(1)} \geq c_{\pi(2)} \geq \dots \geq c_{\pi(n)}$  なるものとしよう。このとき、 $P' = \{p'_{ij}\}$  を

$$p'_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = \pi(j) \text{ のとき}) \\ 0 & (i \neq \pi(j) \text{ のとき}) \end{cases}$$

とすると,  $P' = \{p_{ij}\}$  は (\*\*\*) を満たす. 実際,

$$a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq 0, \quad b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n \geq 0,$$

$$\sum_{i=1}^k a_i \leq \sum_{i=1}^k b_i \quad (1 \leq k \leq n)$$

から,

$$\sum_{i=1}^n c_i a_i \leq \sum_{i=1}^n c_{\pi(i)} a_i \leq \sum_{i=1}^n c_{\pi(i)} b_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_i p_{ij} b_j$$

となるからである. よって定理は証明できた.

$(X, \Sigma, \mu)$  を  $\sigma$ -finite measure space とし,  $\mu$  を  $\Sigma$  上の  $\sigma$ -finite measure とする.  $[L^1(X)]$  で  $L^1(X)$  上の有界線形作用素の全体を,  $[L^\infty(X)]$  で  $L^\infty(X)$  上の有界線形作用素の全体を表すものとする. このとき,  $S \in [L^\infty(X)]$  が下記の3つの条件を満たすならば doubly-substochastic 作用素であるといわれる.

$$(1) \quad 0 \leq f \in L^\infty(X) \Rightarrow Sf \geq 0;$$

$$(2) \quad S1 \leq 1;$$

$$(3) \quad 0 \leq f \in L^1(X) \cap L^\infty(X) \Rightarrow \int Sf d\mu \leq \int f d\mu.$$

$\mathcal{S}$  で doubly-substochastic 作用素の全体を表し,  $\mathcal{S}^*$  で  $S1=1$  となるような  $S \in \mathcal{S}$  の全体を表すことにする.

定理6.  $x = (x_1, x_2, \dots)$  と  $y = (y_1, y_2, \dots)$  を  $l^1$  の元とし,

$$x \geq 0, \quad y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_n \geq \dots \geq 0,$$

$$\sum_{i=1}^n y_i \leq \sum_{i=1}^n x_i \quad (n=1, 2, \dots), \quad \sum_{i=1}^{\infty} y_i = \sum_{i=1}^{\infty} x_i$$

を満たすものとする。

このとき,  $y = Tx$  となるような  $T \in \mathcal{S}^*$  が存在する。

$L^1[0, \infty)$  のとき, Hardy-Littlewood-Pólya の定理はつぎのようになる。

定理7.  $f, g$  を  $L^1[0, \infty)$  の元とする。  $g$  を  $(0, \infty)$  上で monotonically decreasing であるとし,

$$\int_0^s g \, d\mu \leq \int_0^s f \, d\mu \quad (\forall s \in [0, \infty)), \quad \int_0^\infty g \, d\mu = \int_0^\infty f \, d\mu$$

と満たすとする。このとき,  $g = Tf$  となるような  $T \in \mathcal{S}$  が存在する。

特に  $f$  が有界なら,  $T \in \mathcal{S}$  は  $\mathcal{S}^*$  の中にとることができる。

### 参考文献

[1] Browder, F. E., The fixed point theory of multi-valued mappings in topological vector spaces, Math. Ann., 177 (1968), 283-301.

[2] Fan, K., Minimax theorems, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 39 (1953), 42-47.

[3] Fan, K., On systems of linear inequalities, in Linear Inequalities and Related Systems, Ann. of Math. Stud., 38, 99-156, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J. (1956).

[4] Fan, K., Existence theorems and extreme solutions for inequalities concerning convex functions or linear transformations, *Math. Z.*, 68 (1957), 205-217.

[5] Fan, K., Extensions of two fixed point theorems of F. E. Browder, *Math. Z.*, 112 (1969), 234-240.

[6] Hardy, G. H., Littlewood, J. E., and G. Pólya, *Inequalities*, Cambridge Univ. Press, London/New York (1934).

[7] Hirano, N., Komiya, H., and W. Takahashi, A generalization of the Hahn-Banach theorem, *J. Math. Anal. Appl.*, 88 (1982), 333-340.

[8] Kelly, J. L., Namioka, I. et al., *Linear topological spaces*, Van Nostrand, Princeton, N. J. (1963).

[9] Komiya, H. and W. Takahashi, Systems of linear inequalities on normed linear spaces, *Linear & Multilinear Algebra*, 13 (1983), 267-279.

[10] König, H., On certain applications of the Hahn-Banach and minimax theorem, *Arch. Math.*, 21 (1970), 583-591.

[11] Mazur, S. and W. Orlicz, Sur les espaces métriques linéaires (II), *Studia Math.*, 13 (1953), 137-179.

[12] Ryff, J. V., Orbits of  $L^1$ -functions under doubly stochastic transformations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 117 (1965), 92-100.

[13] Sakamaki, K. and W. Takahashi, Systems of convex

inequalities and their applications, *J. Math. Anal. Appl.*, 70 (1979), 445-459.

[14] Shioji, N. and W. Takahashi, Fan's theorem concerning systems of convex inequalities and its applications, to appear in *J. Math. Anal. Appl.*.

[15] Simons, S., Minimax and variational inequalities. Are they of fixed point or Hahn-Banach type?, *Game theory and Mathematical Economics*, North Holland Publishing Company (1981), 379-387.

[16] Takahashi, W., Nonlinear variational inequalities and fixed point theorems, *J. Math. Soc. Japan*, 28 (1976), 168-181.

[17] Takahashi, W., Nonlinear complementarity problem and systems of convex inequalities, *J. Optimization Theory & Applications*, 24 (1980), 493-508.

[18] 高橋 渉, 不動点定理とその周辺, 三田学会雑誌, 73 (1980), 32-68.

[19] Takahashi, W., Recent results in fixed point theory, *SEA Bull. Math.*, 4 (1981), 59-85.

[20] Takahashi, W., Fixed point, Minimax and Hahn-Banach theorems, *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, Amer. Math. Soc., 45 (1986), 417-427.