数理解析研究所講究録
653巻 1988年 66-86

作用素論の情報理論への応用

山口大・理　柳　研二郎 (Kenjiro Yanagi)

はじめに

確率変数の系 $\{X(t);t\in T\}$ は パラメーターの集合 T が時間パラメーターの空間のとき確率過程という。 T が整数全体またはその部分集合のとき離散時間確率過程、T が実数全体またはその部分区間のとき連続時間確率過程という。確率過程 $\{X(t);t\in T\}$ で任意の有限個の $t_1,t_2,...,t_n\in T$ に対し $(X(t_1),...,X(t_n))$ がガウス分布に従うときガウス過程という。 このガウス過程は多方面に用いられているがその重要性はここでは改めて述べるまでもないであろう。特に C.E.Shannon によって 1948 年に始められた通信における数学的理論はガウス過程の重要な一つの応用であることは周知の事実であろう。 ここではガウス型通信路の研究を中心に最近までに得られている結果を述べる。
理論的にも応用上からも重要な通信路の一つに

（出力信号）=（入力信号）+（雑音）

という型の通信路がある。 ここで特に雑音がガウス型（ガウス過程またはガウス測度で表される）のときこれをガウス型通信路という。 さらに雑音がホワイトノイズならばホワイトガウス型通信路という。 ガウス型通信路の研究は上述の Shannon とともに始まり、この通信路により送られる相互エントロピー（相互情報量ともいう）の計算、通信路容量の計算、最適符号化を求めることなどが重要な問題である。 1950 年代には kolmogorov を中心とするソ連の数学者達によりガウス過程を独立なガウス型確率変数により展開する、いわゆる函数解析的な手法によりいくつかのきれいな結果が得られた。 その後 1960 年代後半の Wiener 測度との絶対連続性に関する研究結果を用いて Kadota-Zakai-Ziv（1971 年）はホワイトガウス型通信路を通して送られる相互エントロピーの新しい公式を得た。 この公式を使うことにより 1970 年代にはガウ

ス型通信路の理論は大きな進展を見せた。 現在ガウス型通信路の研究には Kadota-Zakai-Ziv の公式を使う方向：即ち確率過程論における手法を使う方向と、以下で詳述する函数解析的手法（即ち線形作用素を用いて解析する）を用いる方向の２通りの行き方があるがいずれにしても両方とも密接なつながりがあることは否定できない。 前者は通信路にフィードバックがある場合、つまり入力信号が伝達したいメッセージのみでなく出力信号の函数でもある場合も取り扱える所に利点がある。 後者は雑音がホワイトノイズの場合もそうでない場合も統一的に取り扱えるがフィードバックのない場合、つまり入力信号と雑音が独立の場合でないときれいな結果を得ることが難しい。 ところが Ihara（1980 年）はガウス型通信路の入力信号に対する制限が共分散函数の言葉で与えられている場合、通信路容量はガウス系の中で到達されることを示した。 これによりフィードバックがある場合にも函数解析的手法を用いることが可能になりこの方向での今後の発展が期待されるところである。

I. 無限次元空間上の測度

H を実可分ヒルベルト空間、$\mathcal{B}$ をHのボレル集合体とする。 μ を $\int_H \|x\|^2 d\mu(x) < +\infty$ を満たす（H，$\mathcal{B}$）上の確率測度とする。
このとき次の様な $m \in H$ と H 上の線型作用素 R が一意に存在する。
任意の $x, y \in H$ に対して

$$\langle m,x\rangle = \int_H \langle y,x\rangle d\mu(y)$$

$$\langle Rx,y\rangle = \int_H \langle z-m,x\rangle\langle z-m,y\rangle d\mu(z)$$

これは Riesz の定理から明らかである。
この m は μ の平均ベクトル(mean vector)、R は μ の共分散作用素(covariance operator)と呼ばれる。
函数解析的見地から見ると、この R は非常に興味ある作用素である。 つまり R は有界非負、対称、トレース・クラスの線型作用素である。

以降、上の様な線型作用素を共分散作用素ということにする。
また平均ベクトル 0 のとき次が成り立つ。

$$\mathrm{Tr}(R) = \int_H \|x\|^2 d\mu(x)$$

$$\mathrm{Tr}(AR) = \int_H \langle Ax, x\rangle d\mu(x)$$

ただし、A は H 上の有界線形作用素である。
ところで、情報理論的な興味は次のガウス測度にある。
μ がガウス測度(Gaussian measure)であるとは、任意の $x \in H$ に対してある実数 m_x と $\sigma_x(>0)$ が存在して次を満たす確率測度のことである。

$$\mu\{y \in H;\ \langle x, y\rangle \leqq a\} = \int_{-\infty}^{a} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x}} \exp\{-\frac{(t-m_x)^2}{2\sigma_x}\} dt$$

ガウス測度 μ の特性函数を $\hat{\mu}$ とおくと

$$\hat{\mu}(x) = \exp\{i\langle m, x\rangle - \langle Rx, x\rangle/2\},$$

ただし m は μ の平均ベクトル、 R は μ の共分散作用素である。
逆に $m \in H$ と共分散作用素 R を任意に与えると特性函数として

$$\exp\{i\langle m, x\rangle - \langle Rx, x\rangle/2\}$$

をもつ確率測度 μ はガウスであり、m は μ の平均ベクトル、R は μ の共分散作用素となる。
したがって、任意のガウス測度 μ はその平均ベクトル m と共分散作用素 R によって特徴付けられることがわかる。
以降、$\mu=[m,R]$ と書いて μ は平均ベクトル m と共分散作用素 R をもつガウス測度であることを表す。

ガウス測度の性質

① Dichotomy

２つのガウス測度 μ_1,μ_2 を与えれば、$\mu_1 \sim \mu_2$ または $\mu_1 \perp \mu_2$ のどちらかである。

$\mu_1 = [m_1, R_1]$, $\mu_2 = [m_2, R_2]$ とすれば $\mu_1 \sim \mu_2$ であるための必要十分条件は次の条件を満たすことである。

(1) $m_1 - m_2 \in \mathrm{range}(R_1^{1/2}) = \mathrm{range}(R_2^{1/2})$,

(2) $R_1 = R_2^{1/2}(I+T)R_2^{1/2}$,

ただし T はヒルベルト・シュミット作用素で null(R_2) 上で 0 をとるものとする。

② Support

μ は平均ベクトル 0, 共分散作用素 R をもつ確率測度とする。 このとき

linear support(μ)(＝ topological linear support といい

total measure 1 の最小の closed linear subspace)

$= \overline{\mathrm{range}(R)}$

特に μ がガウスのとき

support(μ)(＝ topological support といい

total measure 1 の最小の closed subset)

$= \overline{\mathrm{range}(R)}$

である。

③ Radon-Nikodym derivative

$$\frac{d\mu_1}{d\mu_2}(x) = \exp\{ \frac{1}{2} \sum_{k,j} (\lambda_k \lambda_j)^{-1/2} \langle T(I+T)^{-1} e_k, e_j \rangle \langle x-m_1, e_k \rangle \langle x-m_1, e_j \rangle$$

$$- \frac{1}{2} \sum_k \log(1+t_k) + \sum_k \lambda_k^{-1} \langle x-m_2, e_k \rangle \langle m_1-m_2, e_k \rangle - \frac{1}{2} \sum_k \lambda_k^{-1} \langle m_1-m_2, e_k \rangle^2 \}$$

ただし $\{\lambda_k\}$ は R_2 の 0 でない固有値、 $\{e_k\}$ は対応する R_2 の固有ベクトルからなる正規直交基底、$\{t_k\}$ は T の 0 でない固有値である。

④ Relative entropy （相対エントロピー） $S(\mu_1 | \mu_2)$

$\mu_1 \sim \mu_2$ のとき

$$S(\mu_1|\mu_2) = \int_H \log \frac{d\mu_1}{d\mu_2}(x)d\mu_1(x)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_n \{t_n - \log(1+t_n)\} + \frac{1}{2}\sum_n \lambda_n^{-1}\langle m_1-m_2, e_n\rangle^2$$

である。

⑤ Zero-one law （０－１法則）

μ がガウス測度であれば、任意の measurable subgroup E に対して $\mu(E) = 0$ or 1 が成り立つ。
また、 $\mu=[m,R]$ で T が H 上の有界線型作用素であれば $\mu(\mathrm{range}(T)) = 0$ or 1が成り立つ。
さらに $\mu(\mathrm{range}(T)) = 1$ であるための必要十分条件は $m \in \mathrm{range}(T)$ かつ $R = TST^*$ である。 ただし S は共分散作用素で null(T) 上で 0 をとるものとする。

H_1, H_2 をそれぞれ実可分ヒルベルト空間、$\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ をそれぞれ H_1, H_2 のボレル集合体とする。 μ_1, μ_2 をそれぞれ $(H_1, \mathcal{B}_1)$, $(H_2, \mathcal{B}_2)$ 上の確率測度とする。 $H_1 \times H_2$ を内積 $[(u,v),(x,y)] = \langle u,x\rangle_1 + \langle v,y\rangle_2$ で定義される直積ヒルベルト空間、$\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$ を $H_1 \times H_2$ のボレル集合体とする。
μ_{12} を $(H_1 \times H_2, \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2)$ 上の結合確率測度とする。 即ち
$\mu_1(A) = \mu_{12}(A \times H_2)$, $\mu_2(B) = \mu_{12}(H_1 \times B)$ である。

$\int_H \|x\|_1{}^2 d\mu_1(x) < +\infty$, $\int_H \|x\|_2{}^2 d\mu_2(x) < +\infty$ のとき
次の様な交差共分散作用素（cross-covariance operator） R_{12} ： $H_2 \to H_1$
が一意に存在する。

$$<R_{12}y,x>_1 = \int_{H_1\times H_2} <u-m_1, x>_1 <v-m_2, y>_2 d\mu_{12}(u,v)$$

ただし m_1, m_2 はそれぞれ μ_1, μ_2 の平均ベクトルである。
これも Riesz の定理から明らかである。
このとき

$$R_{12} = R_1{}^{1/2} V R_2{}^{1/2},$$

と分解できる。
ただし V : $H_2 \to H_1$ は

$$\|V\| \leqq 1,$$

$$\mathrm{null}(R_2) \subset \mathrm{null}(V),$$

$$\overline{\mathrm{range}(V)} \subset \overline{\mathrm{range}(R_1)}$$

を満たす。

$\mu_1 \times \mu_2$ を μ_1 と μ_2 の直積測度とすると、相互情報量または相互エントロピー $I(\mu_{12})$ は次の様に定義される。
$\mu_{12} \ll \mu_1 \times \mu_2$ のとき

$$I(\mu_{12}) = S(\mu_{12} | \mu_1 \times \mu_2) = \int \log \frac{d\mu_{12}}{d\mu_1 \times \mu_2}(x,y) d\mu_{12}(x,y)$$

その他のとき $I(\mu_{12}) = +\infty$

μ_{12} がガウスのとき、次は同値であることがわかる。

(a) $\mu_{12} \sim \mu_1 \times \mu_2$;

(b)　V は $\|V\| < 1$ を満たすヒルベルト・シュミット作用素である；

(c)　$I(\mu_{12}) = -(1/2)\sum_{n} \log(1-v_n)$

$$= -(1/2)\mathrm{Tr}[\log(I-V^*V)] < +\infty$$

ただし $\{v_n\}$ は V^*V の固有値である。

II．ガウス型通信路

H_1, H_2 をそれぞれ入力空間、出力空間を表す実可分ヒルベルト空間、$\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$をそれらのボレル集合体とする。
ν を $H_1 \times \mathcal{B}_2$ 上の実数値函数で次の条件を満たすとする。

(1) 任意の $x \in H_1$ に対して $\nu(x,\cdot) \equiv \nu_x$ は $(H_2, \mathcal{B}_2)$ 上のガウス測度である。

(2) 任意の $B \in \mathcal{B}_2$ に対して $\nu(\cdot, B)$ は $(H_1, \mathcal{B}_1)$ 上のボレル可測函数である。

このとき３つ組 $[H_1, \nu, H_2]$ をガウス型通信路という。
入力情報源 μ_1 を与えると、それに対応して出力情報源 μ_2 及び複合情報源 μ_{12} はそれぞれ次の様に定義される。

$$\mu_2(B) = \int_{H_1} \nu(x,B)\,d\mu_1(x), \qquad B \in \mathcal{B}_2$$

$$\mu_{12}(C) = \int_{H_1} \nu(x,C_x)\,d\mu_1(x), \qquad C \in \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$$

ただし $C_x = \{y \in H_2; (x,y) \in C\}$ である。
簡単のため $H_1 = H_2 = H$ とする。

ν のタイプによって２つに分けられる。

（Ｉ）　$\nu_x = [x, R]$ の場合

即ち、ν_x の共分散作用素が x に依存せず一定な場合である。　このとき入力情報源 μ_1 がガウスであれば、$\mu_1 = [0, R_1]$, $\mu_0 = [0, R]$ とおくことにより次の３条件は同値である。

(1)　$\nu_x \sim \mu_0$　a.e. $d\mu_1(x)$

(2)　$\mu_1[\mathrm{range}(R^{1/2})] = 1$

(3)　$R_1 = R^{1/2} T R^{1/2}$, ただし T はトレース・クラスの作用素で null(R) 上で 0 をとるものとする。

これは雑音として μ_0 をもつ（フィードバックをもたない）ガウス型通信路とみなすことができ、従来多くの研究者によって研究されている通信路である。このときの相互エントロピーは

$$I(\mu_{12}) = (1/2)\sum_n \log(1+t_n) = (1/2)\mathrm{Tr}[\log(I+T)]$$

と表せることがわかる。

（Ⅱ）　$\nu_x = [0, R_x]$ の場合

即ち、ν_x の共分散作用素が x に従属して変化する場合である。

このようなガウス型通信路のモデルとして von Neumann の観測理論における状態の変化を挙げることができる。

A を物理量を表すエルミート作用素で離散スペクトルをもつとする。　また A の固有値に対する固有ベクトルからなる正規直交基底を $\{\phi_n\}$ とする。

一方、状態は密度作用素（これはトレース・クラスの正値対称作用素で $\mathrm{Tr}(R_1) = 1$）によって表現される。　今、状態 R_1 で物理量 A を観測すると、その期待値は $\mathrm{Tr}(AR_1)$ で表される。　また観測後の状態 R_2 は次の様になる。

$$R_2 = \sum_n \langle R_1\phi_n, \phi_n\rangle \phi_n \otimes \phi_n$$

ただし　$u \otimes v(x) = \langle x, v\rangle u$ と定義する。

中村・梅垣（1962年）は $R_1 \to R_2$ なる変化が梅垣（1954年,1956年,1962年)の

意味での条件付期待値であることを証明した。　ここではこの変化をガウス型通信路として捉えることにする。

入力情報源 $\mu_1 = [0, R_1]$ で通信路分布 $\nu_x = [0, R_x]$ とする。　ただし

$$R_x = \sum_n f_n(x)\phi_n \otimes \phi_n$$

で、$\{f_n(x)\}$ は次を満たすとする。

(1)　$\int_H f_n(x) d\mu_1(x) = \langle R_1\phi_n, \phi_n\rangle$

(2)　ある $y \in H$ が存在して　$\mu_1\{x \in H;\ \nu_x \sim \nu_y\} = 1$

このとき出力情報源は $\mu_2 = [0, R_2]$ となり、相互エントロピーは

$$I(\mu_{12}) = \sum_n (1/2)\{\log \langle R_1\phi_n, \phi_n\rangle - \int_H \log f_n(x) d\mu_1(x)\}$$

で表される。　また、観測後の期待値は不変である。　つまり、

$$Tr(AR_1) = Tr(AR_2)$$

が成り立つ。

III. ガウス型通信路の容量

ガウス型雑音 $\mu_Z = [0, R_Z]$ をもつ通信路に限定する。　ただし $\overline{\text{range}(R_Z)} = H$ とする。　$\mathcal{A}$ を入力情報源 μ_X に対する許容集合とする。通信路容量は、$C = \sup\{I(X,Y);\ \mu_X \in \mathcal{A}\}$ によって与えられる。　ただし $I(X,Y)$ は入力情報源 μ_X と出力情報源 μ_Y の間の相互エントロピーである。

(I)　適合型（matched）ガウス型通信路の場合

$\mathcal{A} = \{\mu_X\ ;\ \mu_X$ は平均ベクトル 0 の確率測度で

$\int_H \|x\|_Z^2 d\mu_X(x) \leqq P(>0)$を満たす$\}$

ただし $\|\cdot\|_Z$ は μ_Z の再生核ヒルベルト空間のノルムで内積は

$$\langle x, y\rangle_Z = \langle R_Z^{-1} x, y\rangle$$

で与えられる。
このとき次の定理を得る。

定理　Ⅲ.1

dim[H] = +∞ のとき C = P/2

容量に到達する入力情報源はとることができない。

定理　Ⅲ.2

dim[H] = M <∞ のとき C = (M/2)log(1+(P/M))

容量に到達するガウス型入力情報源をとることができる。

（Ⅱ）　不適合型（mismatched）ガウス型通信路の場合
$\mu_W = [0, R_W]$ は μ_Z とは異なるガウス測度で

$$\mathrm{range}(R_W^{1/2}) \subset \mathrm{range}(R_Z^{1/2}),$$

$$\overline{\mathrm{range}(R_W)} = H,$$

を満たすとする。

$\mathbb{A}$ = {μ_X ; μ_X は平均ベクトル 0 の確率測度で
$\int_H \|x\|_W^2 d\mu_X(x) \leqq P(>0)$ を満たす}
ただし $\|\cdot\|_W$ は μ_W の再生核ヒルベルト空間のノルムで内積は

$$\langle x, y\rangle_W = \langle R_W^{-1} x, y\rangle$$

で与えられる。
条件より $R_Z = R_W^{1/2}(I+S)R_W^{1/2}$ を満たす非有界対称作用素 S が存在する。
θ を S のスペクトルの最小の集積点とする。　また θ より小さい S の固有値を小さい順に並べたものを {$\lambda_n; n \geqq 1$} とする。
このとき次の定理を得る。

<u>定理. Ⅲ.3</u>

（1） $\theta<+\infty$ のとき

（a） $\{\lambda_n;n\geqq 1\}\neq\phi$ で $\sum_n(\theta-\lambda_n)\leqq P$ ならば

$$C=(1/2)\sum_n\log\{(1+\theta)/(1+\lambda_n)\}+(1/2)\{P+\sum_n(\lambda_n-\theta)\}/(1+\theta)$$

$\sum_n(\theta-\lambda_n)=P$ のとき容量に到達できるガウス型入力情報源をとることができる。$\sum_n(\theta-\lambda_n)<P$ のとき容量に到達できる入力情報源はとることができない。

（b） $\{\lambda_n;n\geqq 1\}\neq\phi$ で $\sum_n(\theta-\lambda_n)>P$ ならば
$\sum_{n=1}^{K}\lambda_n+P>K\lambda_K$ を満たす最大整数 K が存在して

$$C=(1/2)\sum_{n=1}^{K}\log\{(\sum_{i=1}^{K}\lambda_i+P+K)/(K(1+\lambda_n))\}$$

容量に到達できるガウス型入力情報源をとることができる。

（c） $\{\lambda_n;n\geqq 1\}=\phi$ のとき

$$C=P/(2(1+\theta))$$

容量に到達できる入力情報源はとることができない。

（2） $\theta=+\infty$ のとき

$\sum_{n=1}^{K}\lambda_n+P>K\lambda_K$ を満たす最大整数 K が存在して

$$C=(1/2)\sum_{n=1}^{K}\log\{(\sum_{i=1}^{K}\lambda_i+P+K)/(K(1+\lambda_n))\}$$

容量に到達できるガウス型入力情報源をとることができる。

<u>定理. Ⅲ.4</u>

$\dim[H]=M<+\infty$ のとき $R_W=I$ ととることができ、R_Z の固有値を $0<r_1\leqq r_2\leqq\cdots\leqq r_M$ とすると $\sum_{n=1}^{K}r_n+P>Kr_K$ を満たす最大整数 $K(\leqq M)$ が存在して

$$C = (1/2) \sum_{n=1}^{K} \log\{(\sum_{i=1}^{K} r_i + P)/(K r_n)\}$$

容量に到達できるガウス型入力情報源をとることができる。

次に適合型ガウス型通信路の容量 C_Z と不適合型ガウス型通信路の容量 C_W の比較を行う。

<u>定理. Ⅲ.5</u>

（1） $\dim[H] = +\infty$ の場合

（a） $\{\lambda_n; n \geqq 1\} \neq \phi$ のとき

$\theta \leqq 0$ ならば $C_Z < C_W$

（b） $\{\lambda_n; n \geqq 1\} = \phi$ のとき

$\theta < 0$ ならば $C_Z < C_W$

$\theta = 0$ ならば $C_Z = C_W$

$\theta > 0$ ならば $C_Z > C_W$

（2） $\dim[H] = M < +\infty$ の場合

$\Sigma\, r_n < M$ または $P + \Sigma\, r_n \leqq K$ ならば $C_Z < C_W$

$r_1 \geqq 1$ ならば $C_Z \geqq C_W$

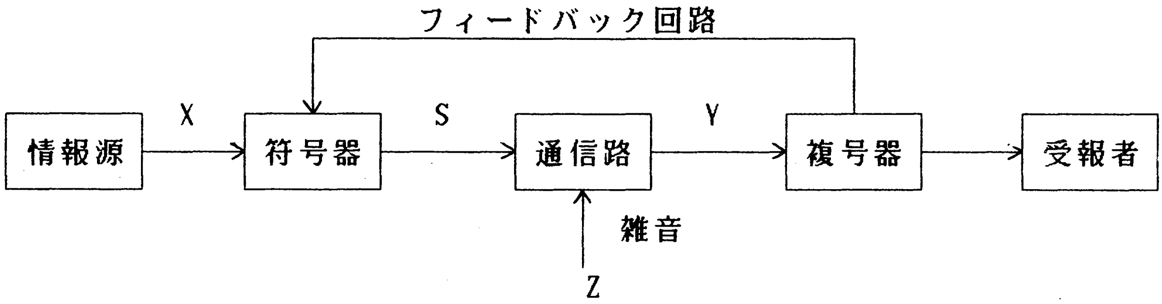
Ⅳ. フィードバックをもつ ガウス型通信路

フィードバックをもつガウス型通信路は測度を用いて定義することは不可能であり、時間パラメーターが直接おもてに現れる確率過程により図１のように定義することが最も自然である。

（Ω, $\mathcal{F}$, P）を確率空間とする。 $Z = \{Z(t);\ 0 \leqq t \leqq T\}$ を（Ω, $\mathcal{F}$, P）上で定義された平均 0 の可分なガウス過程で $\int_0^T E[Z(t)]^2 dt < +\infty$ を満たす

ものとする。　メッセージ X は $(\Omega,\mathfrak{F},P)$ 上で定義され、ある可測空間に値をもつ確率変数で表されるが、メッセージを確率過程 $X=\{X(t);\ 0\leqq t\leqq T\}$ としてみなすことができる。

図 1



フィードバックをもつガウス型通信路は次のようなシステムである。

$$(*)\qquad Y(t) = S(t) + Z(t), \qquad 0 \leqq t \leqq T$$

ただし、$S=\{S(t);\ 0\leqq t\leqq T\}$, $Y=\{Y(t);\ 0\leqq t\leqq T\}$ はそれぞれ $(\Omega,\mathfrak{F},P)$ 上で定義された入力および出力を表す確率過程である。

次の仮定をする。

（A 1）　X は Z と独立

（A 2）　任意の t に対して $S(t)$ は $\mathfrak{F}(X)\vee\mathfrak{F}_t(Y)$-可測
ただし $\mathfrak{F}(X)$ は $X(u)$, $0\leqq u\leqq T$ によって生成される σ-集合体、$\mathfrak{F}_t(Y)$ は $Y(u)$, $0\leqq u\leqq t$ によって生成される σ-集合体である。

（A 3）　確率方程式 $(*)$ は唯一の解 $Y(\cdot)$ をもつ。

仮定（A 2）はこのガウス型通信路が時間の遅れも雑音もないフィードバックをもつことを意味する。

フィードバックをもたないガウス型通信路に対しては

（A２）$^{\#}$ 任意の t に対して $S(t)$ は $\mathcal{F}(X)$-可測

を仮定する。 この場合には X と S を同一なものにとれる。

このとき次の拘束条件を考える。

（A４） $E\|S\|_{Z}^{2} \leqq P$ ･･････････ 適合型の場合

（A５） $E\|S\|_{W}^{2} \leqq P$ ･･････････ 不適合型の場合

$\mathbb{A} = \{ (X,S) ;$ (A1),(A2),(A3),(A5) を満たす$\}$ とすると、不適合型ガウス型通信路の容量は

$$C_f(P) = \sup\{ I(X,Y);\ (X,S) \in \mathbb{A} \}$$

と定義される。 $C_0(P)$をフィードバックをもたない不適合型ガウス型通信路の容量とする。

適合型ガウス型通信路の場合は $C_0(P) = C_f(P)$ が成り立つことが知られている。 ところが不適合型ガウス型通信路の場合は、一般にフィードバックによって容量は増加する。 即ち $C_0(P) \leqq C_f(P)$ である。 以下、$C_f(P)$ の最適上界を求めることにする。 加法的フィードバックを用いて入力信号 $S(\cdot)$ を次のように表す。

$$S(t) = X(t) + \Psi(t), \quad 0 \leqq t \leqq T$$

ただし $\Psi(\cdot)$ は出力信号 $Y(\cdot)$ の因果函数である。

ここで $\mathbb{AG} = \{ (X,S) \in \mathbb{A} ;\ S$ は上で定義され $(X(\cdot),\Psi(\cdot),Y(\cdot))$ はガウス系をなす$\}$ とおくと、井原(1980年)の結果より

$$C_f(P) = \sup\{ I(X,Y);\ (X,S) \in \mathbb{AG} \}$$

が成り立つ。 また最適符号化を考えることにより、拘束条件は次の様になる。

$$E\|X - TY\|_{W}^{2} \leqq P$$

ただし X, Y は Ω から $L^2[0,T]$ への経路写像、T は $L^2[0,T]$ 上のある種のボルテラ型作用素であると考えられる。 これを変形すると

$$\mathrm{Tr}[R_w^{-1/2}(I+T)^{-1}R_w^{1/2}UR_w^{1/2}(I+T^*)^{-1}R_w^{-1/2}$$

$$+ R_w^{-1/2}(I+T)^{-1}TR_w^{1/2}(I+S)R_w^{1/2}T^*(I+T^*)^{-1}R_w^{-1/2}] \leqq P$$

ただし $R_X = R_w^{1/2}UR_w^{1/2}$ で U は共分散作用素である。

$Q = R_w^{-1/2}(I+T)^{-1}R_w^{1/2}-I$ とおくと、上の拘束条件は

$$\mathrm{Tr}[(I+Q)U(I+Q^*)+Q(I+S)Q^*] \leqq P$$

となる。 このとき

$$I(X,Y) = (1/2)\mathrm{Tr}[\log(I+(I+S)^{-1/2}U(I+S)^{-1/2})]$$

と表せる。 ここで

$P_1 = \sup\{\|(I+Q)^{-1}\|^2(P-\mathrm{Tr}[Q(I+S)Q^*]);$

$Q = -R_w^{-1/2}(I+T)^{-1}TR_w^{1/2}$, T はある種のボルテラ型作用素}

とおくと

$$\mathrm{Tr}[U] \leqq P_1$$

となる。 したがって次の定理を得る。

<u>定理. Ⅳ.1</u>

$$C_0(P) \leqq C_f(P) \leqq C_0(P_1)$$

<u>定理. Ⅳ.2</u>

$$C_0(P) \leqq C_f(P) \leqq 2C_0(P)$$

離散時間ガウス型通信路の場合 $R_w = I$ とおくと $R_Z = I+S$ となり

$$P_1 = \sup\{\|(I+T)^{-1}\|^2(P-\mathrm{Tr}[TR_ZT^*]);\ T\text{ はボルテラ行列}\}$$

$$= P + (|R_Z(N-2)|/|R_Z(N-1)|)(P^2/4)$$

である。 ただし $R_Z(N-2)$, $R_Z(N-1)$ はそれぞれ R_Z の 1 行 ~ N-2 行、 1

列 ～ N-2 列および 1 行 ～ N-1 行、 1 列 ～ N-1 列からつくられる部分行列である。

<u>定理. Ⅳ.3</u>

$$C_0(P) \leqq C_f(P) \leqq C_0(P_1)$$

<u>定理. Ⅳ.4</u>

$$C_0(P) \leqq C_f(P) \leqq 2C_0(P)$$

上の定理の略証を与えることにする。

$Y = S + Z$ とすると、フィードバックの有無で容量は次のように与えられる。

$C_0(P) = (1/2)\max\{\log(|R_S+R_Z|/|R_Z|);\ Tr[R_S]\leqq P\}$

$C_f(P) = (1/2)\max\{\log(|R_{S+Z}|/|R_Z|);\ Tr[R_S]\leqq P\}$

ここで、

$R_{S+Z} = R_S + R_Z + R_{SZ} + R_{ZS}$

$R_{S-Z} = R_S + R_Z - R_{SZ} - R_{ZS}$

したがって $R_{S+Z} + R_{S-Z} = 2R_S + 2R_Z$ が成り立つ。

ゆえに $|R_S + R_Z| = |(1/2)R_{S+Z} + (1/2)R_{S-Z}|$

$\geqq |R_{S+Z}|^{1/2}|R_{S-Z}|^{1/2}$ （∵ $\log x$ は作用素凹函数）

$\geqq |R_{S+Z}|^{1/2}|R_Z|^{1/2}$ （∵ $|R_{S-Z}| \geqq |R_Z|$）

∴ $(1/2)\log(|R_S + R_Z|/|R_Z|) \geqq (1/2)^2\log(|R_{S+Z}|/|R_Z|)$

したがって $C_0(P) \leqq C_f(P) \leqq 2C_0(P)$

次に $C_f(P)$ の値を正確に求めることが問題となるが、実際のところ不可能に

近い。　それは２次元の場合ですら次の例の様に厳密に求めることができないからである。　即ち

$$R_X = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}, \quad a,\ b \geqq 0,\ ab \geqq c^2;$$

$$R_Z = \begin{pmatrix} k & m \\ m & \ell \end{pmatrix}, \quad k,\ \ell > 0,\quad k\ell > m^2,\quad m \neq 0;$$

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ t & 0 \end{pmatrix}$$

とおくと次の結果を得る。

$$\exp(2C_f(P)) = \max_{0 \leqq a \leqq P} \left\{ 1 + \frac{Pk}{k\ell - m^2} + \frac{(P+\ell-k)a}{k\ell - m^2} - \frac{a^2}{k\ell - m^2} + \frac{2|m|\sqrt{a(P-a)(a+k)}}{(k\ell - m^2)\sqrt{k}} \right\}$$

また最大値は次の時に到達される。

$$b = (P-a)(a+k)/k,$$

$$c = -(ab)(m>0\text{のとき}), \qquad c = (ab)(m<0\text{のとき}),$$

$$t = c/(a+k)$$

離散時間ガウス型通信路の場合 $C_f(P)$ が $C_\ell(P)$ より大きくなるための条件を述べる。

R_Z を直交行列 Q によって対角化したものを $\tilde{R}_Z$ とおく。　即ち

$$\tilde{R}_Z = \begin{pmatrix} r_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & r_N \end{pmatrix} = {}^tQR_ZQ$$

ただし $0 < r_1 \leqq r_2 \leqq \cdots \leqq r_N$ とする。　K は $P+r_1+r_2+\cdots+r_K > Kr_K$ を満たす

最大整数とする。　ここで対角行列 $\tilde{R}_x$ を次の様に定める。

$$\tilde{R}_x = \begin{pmatrix} x_1{}^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & x_N{}^2 \end{pmatrix}$$

ただし $x_n{}^2 = (P+r_1+r_2+\cdots+r_K)/K - r_n > 0$ $(1 \leqq n \leqq K)$, $x_n{}^2 = 0$ $(K+1 \leqq n \leqq N)$である。　このとき $R_x = Q\tilde{R}_x{}^tQ$ の成分を x_{ij} $(1 \leqq i, j \leqq N)$ とおくと、次が成り立つ。　$x_{k\ell} \neq 0$ となる k, ℓ $(k \neq \ell)$が存在すれば　$C_\theta(P) < C_f(P)$ である。

これを用いてノイズのタイプによって少し詳しく調べることができる。　そのためにまず $L_k = \{\ell(\neq k);\ z_{k\ell} \neq 0\}$ とする。

R_z がホワイト(white)であるとは、すべての k に対して $L_k = \phi$ になるときであり、R_z がブロック型ホワイト(blockwise white) であるとは、R_z はホワイトでなくてかつ $L_k = \phi$ となる k が存在するときであると定義する。　さらに R_z が完全非ホワイト(completely non-white) であるとは、すべての k に対して$L_k \neq \phi$になるときであると定義する。

例えば、３次元の場合は次のようになる。

$$R_z = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \cdots\cdots\cdots \text{ホワイト}$$

$$R_z = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & d \\ 0 & d & c \end{pmatrix} \cdots\cdots\cdots \text{ブロック型ホワイト}$$

$$R_z = \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix} \cdots\cdots\cdots \text{完全非ホワイト}$$

次の定理を得る。

<u>定理. Ⅳ.５</u>

R_z がホワイトならば、どんな P に対しても $C_\theta(P) = C_f(P)$

<u>定理. Ⅳ.6</u>

R_Z がブロック型ホワイトならば、ある P_0 が存在して P_0 より大きい P に対しては $C_0(P) < C_f(P)$

詳しくいうと、$L_k \neq \phi$ となる k によってできる R_Z の 部分行列 R_Z の最小固有値を r_m とおくとき、 $P_0 = mr_m - (r_1+r_2+ \cdots +r_m)$ である。

<u>定理. Ⅳ.7</u>

R_Z が完全非ホワイトならば、どんな P に対しても $C_0(P) < C_f(P)$

REFERENCES

1. R. B. Ash, "Information theory", Interscience, New York, 1965
2. C. R. Baker, Joint measures and cross covariance operators, Trans. Amer. Math. Soc., 186(1973), 273-289
3. C. R. Baker, Zero-one laws for Gaussian measures on Banach space, Trans. Amer. Math. Soc., 186(1973), 291-308
4. C. R. Baker, Capacity of the Gaussian channel without feedback, Information and Control, 37(1978), 70-89
5. C. R. Baker, Capacity of the mismatched Gaussian channel, IEEE Trans. Information Theory, 33(1987), 802-812
6. R. G. Douglas, On majorization, factorization and range inclusion of operators in Hilbert space, Proc. Amer. Math. Soc., 17(1966), 413-415
7. M. Hitsuda and S. Ihara, Gaussian channels and the optimal coding, J. Multivariate Anal., 5(1975), 106-118
8. S. Ihara, On the capacity of the discrete time Gaussian channel

with feedback, Trans. 8th Prague Conf., Vol C, 175-186, Czecho. Academy Sci., 1979

9. S. Ihara, On the capacity of the continuous time Gaussian channel with feedback, J. Multivariate Anal., 10(1980), 319-331
10. 井原俊輔，確率過程とエントロピー，岩波書店，1984
11. S. Ihara and K. Yanagi, Capacity of discrete time Gaussian channel with and without feedback, II, submitted
12. T. T. Kadota, M. Zakai and J. Ziv, Mutual information of the white Gaussian channel with feedback and without feedback, IEEE Trans. Information Theory, IT-17(1971), 368-371
13. H. H. Kuo, Gaussian measures in Banach spaces, Lecture Notes in Math., No 463, Springer-Verlag, New York, 1975
14. M. Nakamura and H. Umegaki, On von Neumann's theory of measurements in quantum statistics, Math. Jap., 7(1962), 151-157
15. J. von Neumann, "Mathematical foundations of quantum mechanics", Princeton Univ. Press., Princeton, 1955
16. M. S. Pinsker, Information and information stability of random variables and processes, Translation published by Holden-Day, San Francisco, 1964
17. R. Schatten, "Norm ideals of completely continuous operators", Springer-Verlag, Berlin, 1960
18. C. E. Shannon, A mathematical theory of communication, Bell System Tech. J., 27(1948), 379-423, 623-656
19. A. V. Skorohod, "Integration in Hilbert space", Springer-Verlag, Berlin, 1974
20. H. Umegaki, Conditional expectation in operator algebra I, II, IV, Tohoku Math. J., 6(1954), 608-612, ibid, 8(1956), 86-100, Kodai Math. Sem. Rep., 14(1962), 59-85
21. 梅垣壽春・大矢雅則，確率論的エントロピー，共立出版，1983
22. 梅垣壽春・大矢雅則，量子論的エントロピー，共立出版，1984

23. K. Yanagi, Covariance operators and von Neumann's theory of measurements, Kodai Math. J., 5(1982), 434-445
24. K. Yanagi, An upper bound to the capacity of discrete time Gaussian channel with feedback, Proc. 5th Japan-USSR Symposium on Probability Theory, 1986 (to appear in Lecture Notes in Math.)
25. 柳研二郎，ガウス過程とエントロピー，数理科学，1987年12月，66-72