数理解析研究所講究録
654巻 1988年 202-208

負曲率多様体上のPoisson核の評価とその応用

東北大・理　新井　仁之（Hitoshi Arai）

(M, g) を完備単連結 n 次元 Riemann 多様体で、その断面曲率 K_M が、$-\infty < -b^2 \leq K_M \leq -a^2 < 0$ （a, b：定数）を満たすものとする。$S(\infty)$ を M の Sphere at Infinity とする。Anderson－Schoen [2] は、M の Martin 境界 $\mathcal{M}$ から $S(\infty)$ への natural homeomorphism Φ が存在し、さらに $\mathcal{M}$ には C^α structure が well-defined でかつ、Φ が C^α 写像であることを証明した。（ここで、α は、$0<\alpha$ であるが、一般には、$\alpha<1$ である。）この結果は、[2] あるいは Yau [6] で指摘されているように、M 上の調和関数の systematic な研究の可能性を示すものである。実際、Anderson－Schoen [2] は M 上の調和関数の $S(\infty)$ での挙動に関する結果として、古典的な Fatou の（boundary limit）定理を M に一般化した。（注：この結果は、Ancona [1], Arai [4] で、より精密化されている）

本講演では、M上の調和関数に関する結果を得るため、次の三つの点について論ずる：

(1) Poisson核の境界$S(\infty)$の近くでの挙動

(2) $S(\infty)$上の real analysis

(3) (1)+(2)+αにより、M上の調和関数を研究する．

以下、任意の点 $O \in M$ を取り、これは固定しておく。

§1. Poisson 核の評価． $K(\ ,\ ): M \times S(\infty) \to \mathbb{R}_+$ を Poisson 核 — すなわち、$K(O,\ ) \equiv 1$ なる *kernel function* — とする。このような関数の存在と一意性は、[2] による。

このとき、$Q' \in S(\infty) \setminus \{Q\}$ に対しては、

$$\lim_{\substack{x \in M \\ x \to Q'}} K(x, Q) = 0$$

である。従って、興味深いのは、$K(\cdot, Q)$ の Q の近傍での挙動である．$K(\cdot, Q)$ の Q での発散の様子を評価する結果として次の二つが得られる：

定理1 ([3])． $\exists C < +\infty,\ \exists t_0 > 0,\ \forall x \in M$:

$$\sup\left\{K(x, Q) : Q \in \Delta^{(j)} \setminus \Delta^{(j-1)}\right\} \leqq C \frac{1}{\omega(\Delta^{(j)})} e^{-j}$$

ただし、ここで、$\Delta^{(j)}$ は、頂点 $\gamma_{ox}(r-jt_0)$，広さ $\frac{\pi}{4}$，軸 $\dot{\gamma}_{ox}(r-jt_0)$ の cone C_j と $S(\infty)$ との共通部分であり、$r=d(o,x)$，γ_{ox} = "出発点 o で、x を通る unit speed の測地線" である。また、j_0 は $C_{j_0}\ni o$ なる最大の自然数である。$d\omega$ は o に関する調和測度。

この定理は、後述の $S(\infty)$ 上の real analysis と調和関数を結びつける重要な役割を果す。また、次の定理は、$K(x,\ )$ の $S(\infty)$ での regularity を調べるのに役立つ：

定理２([3])．次をみたすような $r_0>0$ が存在する：任意の自然数 N と任意の $r\ (>Nr_0+1)$ 及び、次の (i), (ii) をみたす任意の数列を取る：

(i) $0=m_0<m_1<\cdots<m_k<r-1$

(ii) $m_{j+1}-m_j\geq r_0$

このとき、

$$\forall Q_0\in S(\infty),\ \forall Q\in\Delta(Q,r),\ \forall x\in M\setminus C(\gamma_{oQ_0}(r-m_j),\ Q_0,\ \tfrac{\pi}{4}):$$

$$|K(x,Q_0)-K(x,Q_1)|\leqq C\,K(x,Q_0)\,2^{-j}$$

が成り立つ。ただし、ここで、$\Delta(Q,r)$ は、頂点 $\gamma_{oQ}(r)$，広さ $\frac{\pi}{4}$ 軸 $\dot{\gamma}_{oQ}(r)$ の cone と $S(\infty)$ との共通部分であり、$C(\gamma_{oQ_0}(r-m_j),Q_0,\frac{\pi}{4})$

は、頂点 $\gamma_{0a_0}(r-m_j)$，広さ $\frac{\pi}{4}$，軸 $\gamma_{0a_0}(r-m_j)$ と M との共通部分であり、C は、$n(=\dim M)$，a, b にのみ依存した定数である。

この定理から、次の結果が得られる：

系 3（Anderson - Schoen [2]）

$K(x, \ )$ は $S(\infty)$ 上の C^{α} 関数である（$0 < {}^{\exists}\alpha < 1$）．

定理 2 からは、この他にも $S(\infty)$ の atom 理論と M 上の調和関数を結びつける結果が得られる（cf. [3]）。

§2. Generalized sphere at infinity. 今のところ、$S(\infty)$ と調和測度 $d\omega$ を Space of homogeneous type にするような $S(\infty)$ 上の quasi-metric は見つかっていない。そこで、ここでは、$S(\infty)$ 上のそのような quasi-metric を見つけるかわりに、Space of homogeneous type の公理系から "quasi-metric" を取り除き、$S(\infty)$ 上の解析に合うような公理に弱めることを試みる。

定義 4（[3]）．W を位相空間、μ を W 上の正値 Borel 測

度とする．各 $Q \in W$ と $t \in \mathbb{R}$ に対して．Q の近傍 $\Delta_t(Q)$ で、次の条件をみたすものが存在するものとする：

(1) $W = \lim_{t \to -\infty} \Delta_t(Q) \supset \Delta_r(Q) \supsetneq \Delta_{r+s}(Q) \supset \lim_{t \to +\infty} \Delta_t(Q) = \{Q\}$.

(2) $\exists k > 0,\ \forall Q, Q' \in W\ \forall r \in \mathbb{R}:\ \Delta_r(Q) \cap \Delta_r(Q') \neq \phi$

$\Longrightarrow\ \Delta_{r-k}(Q) \supset \Delta_r(Q)$

(3) $0 < \mu(\Delta_r(Q)) < +\infty$.

(4) $\exists C > 0,\ \forall \Delta_r(Q):\ \ \mu(\Delta_{r-1}(Q)) \leq C\mu(\Delta_r(Q))$

このとき．組 $(W, \mu, \{\Delta_t(Q)\})$ を generalized sphere at infinity と呼ぶことにする。

例 (1) $W = S(\infty)$, $\mu = \omega$, $\Delta_t(Q) = \Delta(Q,t)$ （$\Delta(Q,t)$ の定義は．定理２参照） とすると．$(W, \mu, \{\Delta_t(Q)\})$ は generalized sphere at infinity である．

(2) (X, ρ, ν) を Space of homogeneous type とする。$W = X$, $\mu = \nu$, $\Delta_t(Q) := \{x \in X : \rho(x, Q) < e^{-t}\}$ とすると．$(W, \mu, \{\Delta_t(Q)\})$ は．generalized sphere at infinity である。

このように．Generalized sphere at infinity は sphere at infinity と space of homogeneous type の両者を一般化した概念になっている。

注意すべき事柄は．Generalized sphere at infinity の設定のも

でも、Vitali型の被覆定理及びWhitney型の被覆定理が成り立っているということである（[3]）。従って、あとは、Coifman-Weissの理論の展開の方法と同様にして、generalized sphere at infinity上で、H^p, BMO, VMO等の多くの結果が証明できる（[3]）。

§3. M上の調和解析への応用. §1, §2での結果を組み合わせ、さらに微分幾何の諸比較定理等を用れば、円板上の調和関数に関する種々の古典的結果をM上に一般化することができる。── たとえば、H^p, BMOに関する結果、M上の調和関数ならびに、ある種の楕円型方程式の解の$S(\infty)$の近くでの挙動Brown運動との関係、--- etc.（詳細は、[3], [4]参照）。

参考文献

[1] A. Ancona, Negatively curved manifolds, elliptic operators, and the Martin boundary, Ann. of Math., 125 (1987), 495-536.

[2] M.T. Anderson and R. Schoen, Positive harmonic functions on complete manifolds of negative curvature, Ann. of Math., 121 (1985), 429-461

[3] H. Arai, Harmonic analysis on negatively curved manifolds, I (announcement: to appear in Proc. Japan Acad.), II in preparation.

[4] H. Arai, Fine and nontangential convergence for complete manifolds of negative curvature, preprint.

[5] P. Li and L.-F. Tam, Positive harmonic functions on complete manifolds with nonnegative curvature outside a compact set, Ann. of Math., 125 (1987), 171–207.

[6] S.-T. Yau, Nonlinear Analysis in Geometry, Monographie N° 33 de L'Enseignement Mathematique, Genève, 1986.