数理解析研究所講究録
654巻 1988年 178-188

Bloch functions and harmonic BMO functions on the unit ball

早大理工 村本克志 (Katsushi Muramoto)

1. 序

単位円板上の解析函数に対するBloch norm とBMO norm の同値性はCoifman, Rochberg and Weiss [3] によって得られた．本稿の目的はその結果を，確率論の手法を用いて，多次元に拡張することである．

n次元ユークリッド空間上の単位円板を D_n とし，D_n 上の実調和函数の空間を $H(D_n)$ で表す $(n \geqq 2)$．$H(D_n)$ に属する函数 h が

$$\|h\|_{H,n} = \sup_{x\in D_n} \frac{1}{2}(1-|x|^2)\,|\nabla h(x)| < \infty$$

を満たすとき，調和Bloch函数と呼ばれる．ここで，$|\nabla h(x)| = \left\{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial h(x)}{\partial x_i}\right)^2\right\}^{1/2}$ である．調和Bloch函数の空間を $B_H(D_n)$ で表す．

$p \geqq 1$ とする．$H(D_n)$ に属する函数 h が

$$\| h \|_{p,n} = \sup_{B:\text{ball in } D_n} \left\{ \frac{1}{|B|} \int_B |h(x) - h(b)|^p dx \right\}^{1/p} < \infty$$

を満たすとき，調和 BMO_p 函数と呼ばれる。ここで，b は B の中心，$|B| = \int_B dx$ を表す．調和 BMO_p 函数の空間を $BMOH_p(D_n)$ で表す。

空間 $B_H(D_n)$, $BMOH_p(D_n)$ は Banach 空間 (modulo constant) をなす．各 $p \geqq 1$ に対して，norm $\| \ \|_{H,n}$, $\| \ \|_{p,n}$ の同値性が得られる。実際，次の定理が成立する．

<u>定理</u>　$h \in H(D_n)$ とする．p と n にのみ依存する正の定数 $c(p,n)$ が存在して次の不等式が成立する．

(1.1)　$$\frac{1}{c(p,n)} \| h \|_{p,n} \leqq \| h \|_{H,n} \leqq c(p,n) \| h \|_{p,n}$$

特に，$p=2$ の場合，次の不等式が成立する．

(1.2)　$$\frac{1}{\sqrt{n}} \| h \|_{2,n} \leqq \| h \|_{H,n} \leqq \sqrt{n(n+2)} \| h \|_{2,n}$$

上の定理で $n=2$ の場合は，本質的に Coifmann, Rochberg and Weiss [3], Gotoh [6] に述べられている.

2. 定理の証明

John-Nirenberg の不等式により, (1.1) は (1.2) から得られる. そこで (1.2) だけを示す.

(1.2) の左辺を示すため, 2つの補題を用意する.

<u>補題1</u>. ball B を中心 b, 半径 a $(0<a<1)$, $B\subset D_n$ とする. 写像 T を $T(x)=ax+b$ によって定めるとき, 次式が成立する.

$$a \leqq (1-|T(x)|^2)/(1-|x|^2) \qquad (x\in D_n)$$

(補題1の証明) 直接計算に依る. □

(B_t) を原点から出発する n 次元ブラウン運動とし, 停止時間 $T(r)$ を $\inf\{t>0\,;\,|B_t|\geqq r\}$ によって定める. 伊藤の公式により次の補題を得る.

<u>補題2</u>. $0<r<1$ とする. 次の不等式が成立する.

$$E\left[\int_0^{T(r)} \frac{ds}{(1-|B_s|^2)^2}\right] \leqq \frac{1}{2}\log\frac{1}{1-r^2}$$

ここで，E[　] は確率測度による平均を表す．

（補題 2 の証明）$x \in D_n$ に対して $g(x)=\frac{1}{2}\log\frac{1}{1-|x|^2}$ とする．このとき，

$$\Delta g(x) = \frac{n-(n-2)|x|^2}{(1-|x|^2)^2} \geqq \frac{2}{(1-|x|^2)^2}.$$

伊藤の公式により，次の式を得る．

$$E\left[\int_0^{T(r)} \frac{ds}{(1-|B_s|^2)^2}\right]$$

$$\leqq E\left[\int_0^{T(r)} \frac{1}{2}\Delta g(B_s)\,ds\right] = E[g(B_{T(r)})] = \frac{1}{2}\log\frac{1}{1-r^2}.$$

以上から補題の結果が得られた．□

$n \geqq 2$ とし，n を固定する．簡単に，$\|\ \|_{H,n}$ を $\|\ \|_H$ で，また，$\|\ \|_{p,n}$ を $\|\ \|_p$ で表す．同様に，D_n を D で表し，∂D で D の境界を表す．

以上の準備の下で (1.2) の左側不等式の証明にとりかかる．

まず，補題1により，次を示せば十分である．

(2.1) $$\frac{1}{|D|}\int_D |h(x)-h(0)|^2 dx \leqq n\|h\|_H^2 .$$

$d\pi$ を normalized Lebesgue 測度とする．極座標表示により

(2.2) $$\frac{1}{|D|}\int_D |h(x)-h(0)|^2 dx$$

$$= n\int_0^1 \int_{\partial D} |h(rx)-h(0)|^2 d\pi(x)\, r^{n-1} dr .$$

$B_{T(r)}$ は $\{|x|=r\}$ 上に一様に分布するので，伊藤の公式，補題2により

(2.3) $$\int_{\partial D} |h(rx)-h(0)|^2 d\pi(x)$$

$$= E[|h(B_{T(r)})-h(B_0)|^2]$$

$$= E[\int_0^{T(r)} |\nabla h(B_s)|^2 ds]$$

$$\leqq \|h\|_H^2\, E[\int_0^{T(r)} \frac{4\,ds}{(1-|B_s|^2)^2}]$$

$$\leqq 2\|h\|_H^2 \log\frac{1}{1-r^2}.$$

また，直接計算により，

$$\int_0^1 \left(\log\frac{1}{1-r^2}\right) r^{n-1}\,dr \leqq \int_0^1 \left(\log\frac{1}{1-r^2}\right) r\,dr = \frac{1}{2}. \tag{2.4}$$

(2.2), (2.3), (2.4) から

$$\frac{1}{|D|}\int_D |h(x) - h(0)|^2\,dx$$

$$\leqq 2n\|h\|_H^2 \int_0^1 \left(\log\frac{1}{1-r^2}\right) r^{n-1}\,dr$$

$$\leqq n\|h\|_H^2.$$

上式は(2.1)が成立すること，即ち，(1.2)の左側不等式の成立を示す。

(1.2)の右側不等式を示すために，次の補題を用意する．

補題3. f を $\bar{D}$ 上の連続函数とする．f が D 上の調和函数であるとき，次の不等式が成立する．

$$|\nabla f(0)|^2 \leqq n^2 \int_{\partial D} |f(y)|^2 \, d\pi(y).$$

(補題3の証明) $k_y(x) = \dfrac{1-|x|^2}{|x-y|^n}$ とする。Durrett([5], P.36)に依ると

$$f(x) = \int_{\partial D} k_y(x) f(y) \, d\pi(y).$$

これより次の不等式を得る。

$$|\nabla f(x)|^2 \leqq \int_{\partial D} |\nabla k_y(x)|^2 |f(y)|^2 \, d\pi(y). \tag{2.5}$$

一方，簡単な計算から，

$$|\nabla k_y(0)|^2 = \frac{n^2}{|y|^{2n+2}}. \tag{2.6}$$

(2.5), (2.6) により

$$|\nabla f(0)|^2 \leqq n^2 \int_{\partial D} \frac{1}{|y|^{2n+2}} |f(y)|^2 \, d\pi(y)$$

$$\leqq n^2 \int_{\partial D} |f(y)|^2 \, d\pi(y).$$

よって補題の結果が得られた．□

これから(1.2)の右側不等式の証明にとりかかろう．Bを中心b，半径$1-|b|$のD内のballとする．$0<r<1-|b|$に対して，$T_r(x)=rx+b$ とおく．このとき極座標表示により

(2.7)
$$\frac{1}{|B|}\int_B |h(x)-h(b)|^2\,dx$$

$$=\frac{1}{(1-|b|)^n}\int_0^{1-|b|}\int_{\partial D} |h(T_r(x))-h(T_r(0))|^2\,d\pi(x)\; r^{n-1}\,dr.$$

一方，補題3により

(2.8)
$$\int_{\partial D} |h(T_r(x))-h(T_r(0))|^2\,d\pi(x)\; r^{n-1}\,dr$$

$$\geqq \frac{1}{n^2}|\nabla h\circ T_r(0)|^2 = \frac{r^2}{n^2}|\nabla h(b)|^2.$$

(2.7), (2.8) により次を得る．

$$\frac{1}{|B|}\int_B |h(x)-h(b)|^2\,dx$$

$$\geqq \frac{|\nabla h(b)|^2}{n(1-|b|)^n}\int_0^{1-|b|} r^{n+1}\,dr$$

$$\geqq \frac{1}{n(n+2)} |\nabla \tilde{R}(b)|^2 (1-|b|)^2$$

$$\geqq \frac{1}{n(n+2)} \left\{ \frac{1}{2}(1-|b|^2) |\nabla \tilde{R}(b)| \right\}^2 .$$

上式は(1.2)の右側不等式の成立を示す．以上から定理の証明が得られた．

3．注意

不等式(1.1)は Burkholder - Davis - Gundy 不等式を使うことにより直接証明することができる．

定理の結果は，n 次元複素平面上の円板 $\{z \in \mathbb{C}^n ; |z| < 1\}$ においても成立する。ただし，このときは円板上の解析函数 f に対し Bloch norm $\|f\|_A$ は次で定義される．

$$\|f\|_A = \sup_{|z|<1} (1-|z|^2) |\nabla_z f| ,$$

ここで $\nabla_z f = \left(\frac{\partial f}{\partial z_1}(z), \cdots, \frac{\partial f}{\partial z_n}(z) \right)$ である．

参考文献

[1] S. Axler, The Bergman spaces, the Bloch space, and commutators of multiplication, Duke Math. J. 53 (1986), 315 - 332.

[2] A. Bearnstein II, Analytic functions of bounded mean oscillation, Aspect of contemporary complex analysis, Academic Press (1980), 3 - 36.

[3] R.R. Coifman, R. Rochberg and G. Weiss, Factorization theorems for Hardy spaces in several complex variables, Ann. of Math. 103 (1976), 611 - 635.

[4] C. Dellacherie and P.A. Meyer, Probabilites et potential, Theorie des martingales, Hermann, Paris, 1980.

[5] R. Durrett, Brownian motion and martingales in analysis, Wadsworth, Belmont, California, 1984.

[6] Y. Gotoh, On BMO functions on Riemann surfaces, J. Math. Kyoto Univ. 25 (1985), 331-339.