数理解析研究所講究録
654巻 1988年 157-165

可換コンパクト群上のHardy空間における端函数(extremal function)について.

都留文科大 田中 純一

(Jun-Ichi Tanaka)

§1. Γを実軸Rの稠密な部分群とする．Γに離散位相を入れて，その双対群をKとおく．σをK上の正規Haar測度とし，$f\in L^1(\sigma)$が<u>解析的</u>とは

$$f \sim \sum_{\lambda\ge 0} a_\lambda \chi_\lambda$$

となるFourier展開を持つものとする．ここでχ_λは$\chi_\lambda(x)=x(\lambda)$, $x\in K$, で定まる指標とする．$L^p(\sigma)$, $1\le p\le\infty$, における解析函数全体でHardy空間, $H^p(\sigma)$, を定義し，$f\in H^p(\sigma)$で$\int f(x)d\sigma=0$となる函数全体を$H^p_0(\sigma)$と書く．$L^p(\sigma)$の部分空間$\mathcal{M}$が<u>(単純)不変</u>(simply invariant)とは$\Gamma\ni\lambda(\ge 0)$に対して$\chi_\lambda\cdot\mathcal{M}\subsetneq\mathcal{M}$となることとする．$L^p(\sigma)\ni f$に対し，$\{\chi_\lambda f\,;\Gamma\ni\lambda>0\}$で生成される不変部分空間を$\mathcal{M}_f$と記す．不変部分空間$\mathcal{M}$がある$f\in\mathcal{M}$に対して$\mathcal{M}=\mathcal{M}_f$をみたすとき，$f$を$\mathcal{M}$の<u>単一生成元</u>(single generator)と呼ぶ．

以上の設定において，単位円周上のいくつかの性質が

拡張される．例えば $f \in H^1(\sigma)$ で $\log|f| \in L^1(\sigma)$ とすると inner-outer 分解が可能である．しかしある程度の隔たりがあり，$\log|f| \notin L^1(\sigma)$ となる解析函数 $f(\neq 0)$ の存在が示される．([1; Theorem 9.3])．この種の函数に inner-outer 分解に類する分解ができるだろうか？　また全てのノルム 1 の outer 函数は $H^1(\sigma)$ の単位球の端点となる．果して逆が成立するであろうか？これ等の懸案はかなり以前よりなされ，次の問題へと集約されている．([3; Chapter 5, §4])．

<u>単一生成元の問題</u>．全ての不変部分空間は単一生成元を持つであろうか？　特に $H^1_0(\sigma)$ の場合はどうか．

ここでは $H^1_0(\sigma)$ の local product 分解による表現を用いこの問題の周辺を探ってみる．

§2．任意の $t \in R$ に対して，$e_t(\lambda) = e^{i\lambda t}$ $(\lambda \in P)$ となる $e_t \in K$ が定まる．$K \ni x$ に対し $T_t(x) = x + e_t$ とすると K 上にエルゴード的な流れが定義される．簡便のため，$2\pi \in P$ と仮定する．$K_{2\pi}$ を $e_1(y) = 1$ となる $y \in K$ の全体とすると $K_{2\pi}$ は K のコンパクト部分群となり，K は $K_{2\pi} \times [0,1)$ と $B(y,s) = y + e_s$ という写像で同一視できる．$K_{2\pi}$ 上の正規 Haar 測度を σ_1 とするとき σ は $\sigma_1 \times m_I$ となる．ここで m_I は実軸上の Lebesgue 測度，dt，の $[0,1)$ への制

限とする．Kを $K_{2\pi}\times R$ の部分と捉えることより，次の二つの写像を導入する．

$L^1(K_{2\pi}\times R,\ d\sigma_1\times dt)\ni f$ に対して

$$\Phi(f)(y,s)=\sum_{j=-\infty}^{\infty} f(y+e_j,\ s-j)$$

$(y,s)\in K=K_{2\pi}\times[0,1)$ と定義する．このとき Φ は $L^1(K_{2\pi}\times R,\ d\sigma_1\times dt)$ を $L^1(\sigma)$ 上へ写す．また $L^1(\sigma)\ni\phi$ に対して

$$\phi^{\#}(y,t)=\phi(y+e_{[t]},\ t-[t])$$

$(y,t)\in K_{2\pi}\times R$ とする．ここで $[t]$ は t を越えない最大の整数とする．$\phi^{\#}$ は $L^1(K_{2\pi}\times R,\ d\sigma_1\times dt/(1+t^2))$ に属する．$\mathcal{H}^1$ を $f\in L^1(K_{2\pi}\times R,\ d\sigma_1\times dt)$ で σ_1-a.e. $y\in K_{2\pi}$ に対し t の函数，$f(y,t)$，が実軸上の Hardy 空間，$H^1(dt)$ に属するものの全体とする．閉値域定理の簡単な応用から $H^1_0(\sigma)$ を $\mathcal{H}^1$ の商空間として表現することができる．

定理([4 ; Theorem 3.1])．$\mathcal{H}^1/\ker\Phi\cap\mathcal{H}^1$ と $H^1_0(\sigma)$ は等距離同型となる．より詳しく，Φ は $\mathcal{H}^1$ を $H^1_0(\sigma)$ 上に写し，

$$\|f+\ker\Phi\cap\mathcal{H}^1\|_1=\|\Phi(f)\|_1$$

が成立する．

多くの場合，適当な $g\in\ker\Phi\cap\mathcal{H}^1$ に対して $\|f+g\|_1=\|\Phi(f)\|_1$ となる．全ての $f\in\mathcal{H}^1$ に対してこれが成立するであろうか，換言すれば $\mathcal{H}^1/\ker\Phi\cap\mathcal{H}^1$ のノルムは attain されるだろうか．この問題が前述の $H^1_0(\sigma)$ に関する単一生成

元の問題と同値となる.

$H^1(\sigma) \ni \phi$ に対して $\mathcal{F}(\phi)$ を次の性質を持つ函数の全体とする.

(i) $L^1(K_{2\pi}\times R,\ d\sigma_1\times dt) \ni u \geq 0$ で $0\leq \Phi(u)\leq 1$ となる.

(ii) $u(y,t)\phi^{\#}(y,t)$ は $\mathcal{H}^1$ に属する.

このとき, $\mathcal{F}(\phi)$ は閉凸集合となり自然な順序で半順序集合となる. 簡単な考察により Zorn の補題の仮定をみたし, 極大元 $\hat{u}$ の存在が示される.

<u>定理1</u>, $H^1_0(\sigma)\ni\phi$ に対して, $\mathcal{F}(\phi)$ および $\hat{u}$ を上記のものとする. $\Phi(\hat{u})\neq 1$ とすれば $(1-\Phi(\hat{u}))\phi$ は $H^1_0(\sigma)$ の単一生成元となる.

この定理を示すために次の補題を用意する. 上半平面で有界な解析函数の境界函数全体の $L^1(dt/(1+t^2))$ における閉包を $H^1(dt/(1+t^2))$ と記す.

<u>補題1</u>. $H^1(dt/(1+t^2))\ni f$ に対して, f が outer でないとする. このとき $0\leq u(t)\leq 1$ で

$$u\cdot f \in H^1(dt/(1+t^2)) \quad \text{かつ} \quad uf(i)=0$$

となる函数 u が存在する.

<u>証明</u>. $f(t)=g(t)h(t)$ を g が inner, h が outer とする $H^1(dt/(1+t^2))$ における inner-outer 分解とする. $g(i)=0$ のとき $u\equiv 1$ として成立する. $g(i)\neq 0$ のとき, g を定

数倍して $0<g(i)<1$ と仮定できる．これより $0<\alpha<1$ を適当に定めると $1-\alpha/2\,(g(i)+1/g(i))=0$ となり

$$u(t)=1/2\,\{1-\alpha/2\,(g(t)+\overline{g(t)})\}$$

と定めるとよい．

<u>補題2</u>．（[1；Theorem 7.8]）．$\psi\in H^1_0(\sigma)$ とする．このとき次の (i) (ii) は同値となる．

(i)　σ_1-a.e. $y\in K_{2\pi}$ に対して，$\psi^{\#}(y,t)$ は t の函数として $H^1(dt/(1+t^2))$ の outer 函数となる．

(ii)　ψ は $H^1_0(\sigma)$ の単一生成元となる．

<u>定理1の証明</u>．$0\le\Phi(\hat{u})\le 1$ および $\Phi(\hat{u}\,\phi^{\#})=\Phi(\tilde{u})\,\phi$ より，$(1-\Phi(\hat{u}))\,\phi$ は $H^1_0(\sigma)$ に属する．$\psi=(1-\Phi(\hat{u}))\,\phi$ とおく．仮定より，$\psi\not\equiv 0$ また，σ_1-a.e. $y\in K_{2\pi}$ に対して，t の函数，$\psi^{\#}(y,t)$，は $H^1(dt/(1+t^2))$ に属する．補題2の (i) が成立することを示す．(i) が成立しないと仮定すると σ_1-a.e. $y\in K_{2\pi}$ に対して，$\log|\psi(y,t)|\in L^1(dt/(1+t^2))$ より $L^1(K_{2\pi}\times R,\ d\sigma_1\times dt/(1+t^2))\ni h(y,t)$ で $|\psi^{\#}(y,t)|=|h(y,t)|$ となり，σ_1-a.e. $y\in K_{2\pi}$ に対して，$h(y,t)$ は t の函数として $H^1(dt/(1+t^2))$ における outer 函数とできる．$\psi^{\#}(y,t)=B(y,t)\,h(y,t)$ とすると，σ_1-a.e. y に対し，t の函数，$B(y,t)$ は定数ではない inner 函数となる．補題1より $0\le v(y,t)\le 1$ となる可測函数で，t の函数，$v(y,t)\,\psi(y,t)$，が $H^1(dt/(1+t^2))$ に

属し，$v\psi(y,\lambda)=0$ となるように取れる．適当な定数 $c>0$ に対して $\nabla(y,t)=c/(1+t^2)\cdot v(y,t)$ と定めると $0\le\nabla\le 1$ $\Phi(\nabla)\le 1$，かつ $\nabla\psi^{\#}$ が $\mathfrak{A}^1$ に属する．これより

$$\hat{u}\le\hat{u}+\nabla(1-\Phi(\tilde{u}))^{\#}$$

また $\tilde{u}+\nabla(1-\Phi(\tilde{u}))^{\#}\in\mathfrak{F}(\phi)$ が成立し，$\tilde{u}$ の極大性へ不合理となる．

この定理を利用するために，$\mathfrak{F}(\phi)$ の定義を少し拡大して，$\phi\in H_0^{\infty}(\sigma)$ に対し

$\mathfrak{F}'(\phi)=[\,u\in L^1(K_{2\pi}\times R,\ d\sigma_1\times dt)\,;\ 0\le u$，かつ $u\phi^{\#}\in\mathfrak{A}^1\,]$

$\mathfrak{F}'_K(\phi)=[\,\theta\in L^1(\sigma)\,;\ 0\le\theta$，かつ $\theta\cdot\phi\in H_0^1(\sigma)\,]$

とおく．ともに各々のノルムで閉じた凸集合となる．一方 ϕ を $H_0^1(\sigma)$ の単一生成元とすると Szegö の定理の応用から，適当な $H^1(\sigma)$ における outer 函数 ψ が存在して，ある inner 函数 g に対し

$$\arg\phi\psi=\arg g$$

とできる．以上より，定理1から次の系を得る．

<u>系1</u>．次の (i)～(iii) は同値となる．

(i) $H_0^1(\sigma)$ は単一生成元を持たない．

(ii) 全ての $\phi\in H_0^1(\sigma)$ に対して，$\mathfrak{A}^1\ni f$ で $\Phi(f)=\phi$ となり，$\|f\|_1=\|\phi\|$ となるものが存在する．

(iii) 全ての $H_0^1(\sigma)$ における inner 函数 g に対して，

$$\Phi(\mathfrak{F}'(g)) = \mathfrak{F}'_K(g)$$

が成立する.

(iii) に関する方向で次の問題設定は興味深い. $g = \chi_\lambda$ $(\Gamma \ni \lambda > 0)$ ととると, スペクトルが $(-\lambda, \lambda)$ に属する正値函数 $\phi \in L^1(\sigma)$ が $f \in L^1(K_{2\pi} \times R)$ で σ_1-a.e. $y \in K_{2\pi}$ に対し, t の函数 $f(y, t)$ のスペクトルが $(-\lambda, \lambda)$ に属する正値函数が存在して, $\Phi(f) = \phi$ とできるかどうか. という問題が単一生成元の存在の一つの十分条件を調べることとなる. 正の定義函数の性質との関連から, ある程度の結果を期待できるように思うのだが現段階では成立するか否か不明である.

§3. $K \times R$ 上の Borel 函数 A が

$$|A(x,t)| = 1 \quad \text{かつ} \quad A(x, s+t) = A(x, s)A(x+e_s, t)$$

をみたすとき, A を <u>コサイクル</u> と呼ぶ. 各々の不変部分空間に対し, コサイクルが対応してくる. σ-a.e. x に対し, t の函数 $A(t, t)$ が $H^1(dt/(1+t^2))$ の inner 函数となるとき, A を <u>解析的コサイクル</u> と呼び, さらに $A(x, t)$ が Blaschke 積のとき, <u>Blaschke コサイクル</u> という. 全ての不変部分空間 $\mathcal{M}$ に対し適当なユニタリー函数 g を定めると $g\mathcal{M}$ のコサイクルが Blaschke コサイクルとできる ([3; Theorem 26]). これより単一生成元の問題は Blaschke コサイクルの零点の $H^1(\sigma)$ に

属する函数による実現へと転換される．上記手法を用いて，ある程度結果を得ることができる．

$B(y,t)$ を Blaschke コサイクルとする．これを $K_{2\pi}\times R$ 上に制限し，さらに上半平面に解析的に拡張して，$B(y,t+is)$ を $K_{2\pi}\times R\times R^+$ 上の函数とみなし，次の条件を考える．

(3.1) ある正数 $M>0$ に対し，$K_{2\pi}\ni y$ について，$0\leq t<1$ における $B(y,t+is)$ の零点は高々1個となり，$[0,1)\times(0,M)$ に含まれる．

<u>補題3</u>．Blaschke コサイクル B が (3.1) をみたすとする．このとき inner 函数 ϕ が定まり $B(y,t+is)$ の零点と $\phi^{\#}(y,t+is)$ の零点は一致する．即ち $B=T_t\phi\cdot\bar{\phi}$ となる．

<u>証明の概略</u>．(3.1) の性質から $H^1(\sigma)\ni\psi$ で $\psi(0)\neq 0$ となり $\psi^{\#}(y,t+is)$ の零点は $B(y,t+is)$ の零点を含む函数 ψ が作れる．定理1の証明と同様な方法で $0\leq v\leq 1$ となる函数で $\phi=v\psi$ が題意をみたすように定まる．

<u>補題4</u>．任意の Blaschke コサイクル B に対し，(3.1) をみたす Blaschke コサイクルの列 $\{B_n\}$ が定まり

$$B=\prod_{n=1}^{\infty}B_n$$

とかける．

以上の準備のもとに次の定理が示される．

<u>定理2</u>．$H^1_0(\sigma)\ni\phi$ が $\log|\phi|\notin L^1(\sigma)$ となり $\mathcal{M}_\phi$ の

Blaschke コサイクルを持つとする．このとき $0 \le v_n \le 1$ となる函数列 $\{v_n\}$ で次の性質をみたすものが定まる．

(i) $v_n \ge v_{n+1}$,

(ii) $\mathcal{M}_{v_{n+1}\phi} \supset \mathcal{M}_{v_n\phi}$,

(iii) $\bigvee_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_{v_n\phi} = H_0^1(\sigma)$.

換言すれば $v_n\phi$ は $H_0^1(\sigma)$ の単一生成元に限りなく近づいていく．

文献

[1] T. Gamelin, Uniform Algeblas, Prentice-Hall, 1969.

[2] H. Helson, Structure of Blaschke cocycles, Studia Math. 44, 1972, 493-500.

[3] ———— , Analyticity on compact abelian groups, Algebras in analysis, Academic Press, 1975, 1-62.

[4] J.-I. Tanaka, Hardy spaces and BMO-functions induced by ergodic flows, Michigan Math. J. 32, 1985, 335-348.