数理解析研究所講究録
654巻 1988年 147-156

無限回路のRoyden境界

島根大学　理学部　榧野　尚

(Takashi Kayano)

§1．準備とRoyden's algebra

$N=\{X,Y,K,r\}$が無限回路であるとは，次の条件を満たすことである．

(1) Xは点xの集合，Yは辺yの集合，Kは点xと辺yの結び付きを表す，$X\times Y$上の $\{\pm 1,0\}$を値域にとる函数，rはY上の抵抗を表す正値函数である．

(2) 任意の$y\in Y$について

$e(y)=\{x\in X;K(x,y)\neq 0\}$とおけば，$e(y)=\{x_1,x_2\}$ $x_1\neq x_2$で$K(x_1,y)K(x_2,y)=-1$．

(3) $\forall a\in X$, $\forall b\in X$について，$\{x_0,x_1,x_2,\cdots,x_n\}\subset X$と$\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}\subset Y$で，次の条件を満たすものがある，

$a=x_0$、$b=x_n$ で　$e(y_k)=\{x_{k-1},x_k\}$　(連結条件)．

$L(X),L(Y)$でそれぞれ，X上と Y上の函数全体の集合を表す．$L_0(X),L^b(X)$でそれぞれ，support有限なX上の函数($f\in L(X)$; $supp(f)=\{x\in X;f(x)\neq 0\}$が有限集合)の全体と$X$上有界な函数の全体を表す，$L_0(Y)$と$L^b(Y)$についても同様である．

$u\in L(X)$について，Dirichlet積分 $D(u)$ をつぎのように定義

する，

$$D(u) = \sum_{y\in Y} r(y)^{-1} \left| \sum_{x\in X} K(x,y)u(x) \right|^2.$$

Dirichlet積分有限な函数の全体を$D(N)$で表し，

$BD(N) = D(N) \cap L^b(X)$ とおく．

$u \in L(X)$について，

$du(y) = \sum_{x\in X} K(x,y) r(y)^{-1} u(x)$,

$\Delta u(x) = -\sum_{y\in Y} K(x,y) du(y)$ とおく，

$\Delta u(x) = 0$ のとき，u は x で調和であると言い，

X上で $\Delta u = 0$ のとき，uをX上の調和函数と言う．

$BD(N)$上に次の，２つの位相を導入する．

(1) $u \in BD(N)$について，$\| u \| = \sup_{x\in X} |u(x)| + (D(u))^{1/2}$

で導入される位相をUD-位相という．

(2) $\{u_n\} \subset BD(N)$が$u \in BD(N)$にBD-位相で収束するとは

$\{u_n\}$が一様有界，

全ての$x \in X$について $\lim_{n\to\infty} u_n(x) = u(x)$,

$\lim_{n\to\infty} D(u_n - u) = 0$ であること．

$L_0(X)$のBD-位相における閉包を$BD_0(N)$で表す．

$N' = \{X', Y', K', r'\}$がNの部分回路であるとはN'がつぎの条件を満たす回路である．

(1) $X' \subset X$,　(2) $Y' = \{y \in Y;\ e(y) \subset X'\}$,　(3) $X' \times Y'$上で $K' = K$,　(4) Y'上で，$r' = r$.

有限回路の列 $\{N_m\}$ がNのexhaustionであるとは次の条件をみたすことである．

(1) $X_m \subset X_{m+1}$, (2) $Y_{m+1} \supset \{y \in Y;\ e(y) \cap X_m \neq \emptyset\}$,

(3) $\cup_{m=1}^{\infty} X_m = X$.

次の補題は明らかである．

補題 1 BD(N)はalgebraである．

次の重要な定理が[1]のⅢ.1C.のTheoremと同様な方法で証明される．

定理 1 $\{u_n\}$がBD(N)の列で，uがX上の有界函数であるとする． その時，全ての$x \in X$について，$\lim_{n\to\infty} u_n(x)=u(x)$であり，$\{D(u_n)\}$が有界ならば，$u \in BD(N)$であり，次の条件を満たす$\{u_n\}$の部分列$\{u_{n_k}\}$が存在する，

全ての$v \in BD(N)$について，$D(u,v) = \lim_{k\to\infty} D(u_{n_k}, v)$.

定理1よりBD(N)がBanach algebraであることがえられる，従って，次の定理がえられる．

定理 2 (1) BD(N)はUD-位相に関して Banach algebraである．

(2) $1 \in BD(N)$

(3) BD(N)はXの点を分離する．

定理 3 Xを稠密な開部分空間として含み，次の条件を満たす compact Hausdorff 空間 X^* が存在する：

任意の$u \in BD(N)$について，uのX^*への拡大となる唯一つの連続函数u^*が存在する．なお，X^*の存在は位相同型の意味で唯一つである．

X^*をXのRoydenのコンパクト化と言い，$\Gamma = X^* - X$をRoyden境界と言う． uとu^*は同一視して，uで表す．

$\Gamma = \{\chi \in X^* ; u(\chi)=0 \quad \text{for } \forall u \in L_0(X)\}$であることは明らかである．

$BD_0(N)$の完備性について，次の定理が得られる．

定理 4 $\{u_n\}$が$BD_0(N)$の列で，uがX上の有界函数であるとする．その時，全ての$x \in X$について，$\lim_{n\to\infty} u_n(x) = u(x)$であり，$\{D(u_n)\}$が有界ならば，$u \in BD_0(N)$である．

系 $BD_0(N)$は$BD(N)$の閉イデアルである．

ここで，$\Gamma_h = \{\chi \in X^* ; u(\chi)=0, \text{for } \forall u \in BD_0(N)\}$とおく．

$N' = \{X', Y', K', r'\}$が回路Nの有限部分回路であるとき， $a \in X$について，N'のaをpoleとする調和グリーン函数$g_a^{(N')}$を次のように定義する．

(1) X'上で，$\Delta g_a^{(N')}(x) = -\delta_a(x)$． ただし，$\delta$はクロネッカーのデルターである．

(2) $X - X'$上で，$g_a^{(N')} = 0$．

Nの exhaustion $\{N_n\}$について，$a \in X$を pole とするN_nの調和グリーン函数を g_a^n で表す．g_a^n はnについての単調増加

函数列である．$\lim_{n\to\infty} g_a^n$ は函数であるか，または恒等的に∞となる．また，このことは$a\in X$の取りかたに関係しない．極限函数が恒等的に∞となるとき，無限回路 N は放物的と言い，$N\in O_G$と表す． 極限函数が存在するとき，N を双曲的と言い，その極限函数をX上の a をpoleとする調和グリーン函数と言い，g_aで表す．

定理 5 次は同値である．

(1) $N\in O_G$,

(2) $1\in BD_0(N)$,

(3) $BD_0(N) = BD(N)$,

(4) $\Gamma_h = \emptyset$.

証明 (2)，(3)，(4)の同値性は$BD_0(N)$が$BD(N)$の閉イデアルであることより，明らかである． (1)と(2)の同値性は[2]により簡単に得られる．

§2．最大値の原理

$N' = \{X', Y', K', r'\}$を無限回路Nの部分回路とする．

$\partial_Y(X') = \{y\in Y; e(y)\cap X' \neq \emptyset\} - Y'$とおく．

$\hat{N}' = \{\hat{X}', \hat{Y}', \hat{K}', \hat{r}'\}$が$\partial_Y(X')$に関する$N'$のdoubleとは，次の条件を満たすことである．

(1) ρ_XをX'上の，値域$\rho_X(X')$が新しい点の集合である1対1

の写像とし，$\hat{X}' = X' \cup \rho_X(X')$とする．

(2) ρ_Yを$Y' \cup \partial_Y(X')$上の，値域が新しい辺の集合である1対1の写像とし，$\hat{Y}' = Y' \cup \rho_Y(Y' \cup \partial_Y(X'))$とする．

(3) $X' \times Y'$上では，$\hat{K}'(x, y) = K(x, y)$,

$\rho_X(X') \times \rho_Y(Y')$上では，$\hat{K}'(\rho_X(x), \rho_Y(y)) = K(x, y)$,

$x \in X', y \in \partial_X(X')$のとき，$\hat{K}'(x, \rho_Y(y)) =$

$-\hat{K}'(\rho_X(x), \rho_Y(y)) = K(x, y)$, それ以外の$(x, y)$については

$K(x, y) = 0$.

(4) $y \in Y'$のとき，$\hat{r}'(y) = \hat{r}'(\rho_Y(y)) = r(y)$,

$y \in \partial_Y(X')$のとき，$\hat{r}'(\rho_Y(y)) = r(y)$.

以上のようにdoubleを定義すると，次の定理が成立する．

定理 6　N'を$\bar{X}' \cap \Gamma_h = \emptyset$であるNの部分回路とするならば，$\hat{N}' \in O_G$. ただし，$\bar{X}'$は$X'$の$X^*$における閉包とする．

Xの部分集合Aについて，$\partial_X(A) \cup A$を$[A]_X$または$[A]$で表す．$N' = \{X', Y', K', r'\}$をNの無限部分回路とし，$\{N_n = \{X_n, Y_n, K_n, r_n\}\}$を$N$のexhaustionとする．$u_n$を$[X_n \cap X']$上の函数で，$X' \cap X_n$上で$\Delta u_n(x) = 0$,

$\partial_X(X' \cap X_n) \cap (X - X')$上では$u_n = 0$, $\partial_X(X' \cap X_n) \cap X'$上では$u_n(x) = 1$であるとする．$X'$のすべての点$x$で，$\lim_{n\to\infty} u_n(x) = 0$となる$N'$の族を$SO_{HB}(N)$で表す．

次のような補題を準備する．

補題 2 $N \in O_G$ ならば，N の全ての無限部分回路 N' は $SO_{HB}(N)$ に含まれる．

より一般には，次の補題が成立する．

補題 3 $\bar{X}' \cap \Gamma_h = \emptyset$ ならば，N の全ての無限部分回路 N' は $SO_{HB}(N)$ に含まれる．

有界な調和函数について，次のような最大値の原理が成立する．

定理 7 $N' = \{X', Y', K', r'\}$ を N の部分回路とし，u を $[X']$ 上の，上に有界な，X' で調和な函数とする．

全ての $\chi \in \bar{X}' \cap \Gamma_h$ について $\limsup_{x \in X',\, x \to \chi} u(x) \leqq m$ と $\partial_X(X')$ 上で $u(x) \leqq m$ が成立するならば すべての $x \in X'$ について，$u(x) \leqq m$ が成立する．

さらに，Dirichlet 積分有限な調和函数について，次の重要な定理が成立する．A を X の部分集合とし，函数 u の A 上の Dirichlet 積分 $D_A(u)$ を次のように定義する，

$$D_A(u) = \sum_{e(y) \subset A} r(y)^{-1} \left| \sum_{x \in X} K(x, y) u(x) \right|^2.$$

定理 8 $N' = \{X', Y', K', r'\}$ を N の部分回路とし，u を $D_{[X']}(u)$ が有限な $[X']$ 上の調和函数とする．

全ての $\chi \in \bar{X}' \cap \Gamma_h$ について，

$$-\infty \leqq a \leqq \liminf_{x \in X',\, x \to \chi} u(x) \leqq \limsup_{x \in X',\, x \to \chi} u(x) \leqq b \leqq \infty$$

かつ，全ての $x \in \partial_X(X')$ について，$a \leqq u(x) \leqq b$ ならば、

すべての$x \in X'$について　$a \leqq u(x) \leqq b$が成立する．

§　3．　Royden境界上のG_δ集合

この節において，Riemann面ではRoyden境界上の点χは一点集合$\{\chi\}$が非G_δ集合であることで特長つけられているが集合$\{\chi\}$がG_δ集合である調和Royden境界上の点χがある無限回路が存在することをしめす．点$x \in X$については，集合$\{x\}$はG_δ集合であることは明らかであるから，集合$\{x\}$が非G_δ集合ならばxはRoyden境界の点となる．

$\chi \in \Gamma - \Gamma_h$ならば，Riemann面と同様に$\{\chi\}$は非$G_\delta$集合となる．

定理　9　$\chi \in \Gamma - \Gamma_h$ならば，集合$\{x\}$は非$G_\delta$集合である

Riemann面の場合には任意な点xを中心とし，xの任意の近旁に含まれる円環Aで，十分大きな$\log \mathrm{mod}\ A$をとるものが存在することを利用して証明するが，無限回路の場合では，$\chi \in \Gamma - \Gamma_h$について，$0 \leqq u \leqq 1$で$u(\chi)=1$となる函数$u \in BD_0(N)$が存在することを用いて証明する．したがって$\chi \in \Gamma_h$については，この証明方法が適用されない．のみならず，$\chi \in \Gamma_h$で，$\{\chi\}$がG_δ集合であるものが存在することを示すことが出来る．

例　無限回路$N=\{X, Y, K, r\}$次のように定義する．

$X=\{x_0, x_1, x_2, \cdots\}, Y=\{y_1, {}_2\ , \cdots\}$

$K(x_n, y_n)=-K(x_{n-1}, y_n)=1,\ n=1, 2, \cdots,$

その他の pair $(x, y)\in X\times Y$について，$K(x, y)=0$

さらに，$\sum_{n=1}^{\infty} r(y_n)=<\infty$ であるように r を定義する．

$g_0(x_n)=\sum_{n=1}^{\infty} r(y_n)-\sum_{k=n}^{\infty} r(y_k) \quad n=1, 2, \cdots$

$g_0(x_0)=\sum_{n=1}^{\infty} r(y_n)$ とおくと，

g_0 は x_0 を pole とする調和 Green 函数であることは容易にわかる．したがって，$N\notin O_G$であり，$\Gamma_h\neq\emptyset$ であるから

$\chi\in\Gamma_h$とし，また$\chi'\in\Gamma$，$\chi'\neq\chi$として，矛盾をみちびく．

結局，$\Gamma=\Gamma_h=\{\chi\}$であり，$V_n=\{x_n, x_{n+1}, \cdots\}\cup\{\chi\}$が$\chi$の近傍であり，$\lim_{n\to\infty} x_n=\chi$ となる．しかも，$\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n=\{\chi\}$ となるので、$\{\chi\}$はG_δ集合である．

Riemann 面Rの場合では，Rの Royden の compact化R^*において，$\Gamma-\Gamma_h$の閉包はΓと一致するので，例のように$\Gamma-\Gamma_h=\emptyset$ とはならない．

次の問題は未解決である．

① 無限回路において，χが$\Gamma-\Gamma_h$の閉包の点ならば，$\{G_\delta\}$は非G_δ集合となるか．

② $\chi\in\Gamma_h$がΓ_hの内点ならば，$\{\chi\}$はG_δ集合か，あるいは，χはΓ_hの孤立点か．

参　考　文　献

[1] L. Sario and M. Nakai, Classification theory of Riemann surfaces, Springer-Verlag, 1970.

[2] M. Yamasaki, Discrete potentials on an infinite network, Mem. Fac. Sci. Shimane Univ. J., 13 (1979), 31-44.