数理解析研究所講究録
654巻 1988年 81-92

リーマン面上の有界正則函数について

北大教養 林 実樹広 (Mikihiro Hayashi)

1. リーマン面R上の有界正則関数全体を $H^\infty(R)$ を表す。$H^\infty(R)$ はノルム

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(z)| : z \in R\}$$

により，可換なBanach環となる。与えられたリーマン面上にどのくらい $H^\infty(R)$ 関数があるかについては，特別な場合を除いては，よく分っていない。

ここでは，$H^\infty(R)$ がRの点を分離する《くらい沢山えをもっている》として，Rの分岐二重被覆面 $\tilde{R}$ を考え，$H^\infty(\tilde{R})$ が $\tilde{R}$ の点を分離するための十分条件を与える(§3)。尚，これは中井三留先生(名工大)との共同研究[3]の一部である。

次節では，リーマン面の専門外の人を念頭に，リーマン面の例の作り方について多少くわしく述べてあります。基本的なideaがこの例に基づいているため述べたものですが，専門の人には，何をあたりまえのことをくどくど書いてあるとお

叱りを受けるかも知れない．

2. リーマン面の例を作るには，いわゆるノリとハサミによる方法が今も有効である．この方法を理解するには多少の直観を認めた方がよいが，この直観に慣れていない人には，どこか理解を越えたものに感じられるかも知れない．勿論，ノリとハサミによる方法も，直観に依らず言葉だけで述べることも可能です．直観的な述べ方は，このための手順だけを表した見取図のようなもので，設計図の方はこの見取図をもとに容易に想像できる．この節では，この見取図から設計図を作るとしたら必要になるであろう手続きについて気付いた事柄をいくつか述べて見たい．実際には，設計図を書いたところで，見取図よりもかえってわかり難くなるだけなので，これが役に立つこともないと思いますが，直観的説明で満足できない人に少しなりとも参考になれば幸いです．

尚，直観的な構成法については竹内端三「函数論（下巻）」（裳華房）が，またリーマン面の厳密な取扱いについては，Ahlfors－Sario「Riemann Surfaces」（Princeton）が参考になるものと思います．

さて，与えられたHausdorff位相空間Rが，［境界付］リーマン面であるとは，定義により次の(i), (ii), (iii) をみたす（

局所座標系と呼ばれる) System $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}_{\alpha\in A}$ があることである:

(i) $\{U_\alpha\}$ は R の開被覆

(ii) 写像 $\varphi_\alpha : U_\alpha \longrightarrow \{z\in\mathbb{C} : |z|<1\}$ 〚or $\{z\in\mathbb{C} : |z|<1, \mathrm{Im}\, z\geq 0\}$〛

は同相. 〚部分集合 $\Gamma = \bigcup_\alpha \varphi_\alpha^{-1}(\{\mathrm{Im}\, z = 0\})$ は R の境界と呼ばれる.〛

(iii) $U_\alpha \cap U_\beta \neq \phi$ ならば, 写像

$$\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha\cap U_\beta)$$

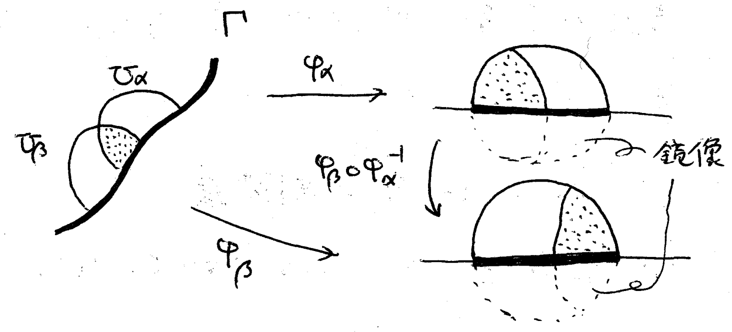
$$〚\varphi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta\setminus\Gamma) \to \varphi_\beta(U_\alpha\cap U_\beta\setminus\Gamma)〛$$

は等角 (i.e., 正則かつ 1 対 1).

[注] 1) (i), (ii) までで, 〚境界付〛位相多様体の定義である.

2) 部分集合 Γ は "境界" と呼ばれるが, R の位相では Γ の点もすべて R の内点であるので, 位相的 "境界" と区別して考える. リーマン面では, R を含むリーマン面 R' を考え, R' の中で R の境界 ∂R が Γ と等しくなるようにできる. こう考えることに約束しておけば, この種の混乱は除ける.

3) 鏡像の原理により, $\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}$ は $\varphi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta\cap\Gamma)$ の近傍に等角に拡張される. このことは, 境界付リーマン面の場合 $R\setminus\Gamma$ 上の等角構造から自然に Γ 上の等角構造が1意に定まることを意味する. 例えば, R が平面上の Jordan 曲線 Γ で囲ま



れた閉領域として，Γが解析曲線ならば，$R\setminus\Gamma$ からΓに導入される等角構造は，平面のそれと同じである．しかし，一般には

リーマンの写像定理により，R を解析曲線で囲まれた領域 R'（たとえば，単位閉円板）に写像して，R' を含む平面の等角構造が，$R\setminus\Gamma$ からΓに導入される等角構造と一致する．リーマン面では $R\setminus\Gamma$ の等角構造から決まるものだけを問題にすることが多いので，Γを先に考えるときには注意がいる．

例1　R が平面の連結開集合：

$U_0 = R$，$\varphi_0(z) = z$ という，1組のペアだけからなる局所座標近傍系 $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}_{\alpha=0}$ が (i)，(ii)，(iii) をみたす．

例2　$S^1 = \mathbb{C}\cup\{\infty\}$（リーマン球）：

$U_1 = \{|z|<\infty\}$，$\varphi_1(z) = z$ ；$U_2 = \{|\frac{1}{z}|<\infty\}$，$\varphi_2(z) = \frac{1}{z}$

として，2組のペア $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}_{\alpha=1,2}$ が局所座標系を与える．実際，$\varphi_1(U_1\cap U_2) = \{0<|w|<\infty\}$ 上で $\varphi_2\circ\varphi_1^{-1}(w) = \frac{1}{w}$ となり (iii) がみたされる．(i)，(ii) については明らか．

(注) 上の2例は，リーマン面というにはあまりに trivial 過ぎてかえって変な感じがするかも知れない．条件の (i)，(ii) で

は，φ_αという1対1写像により，局所的に複素平面の等角構造（あるいは，函数論）がコピーされている．条件(iii)はこれらの等角構造が座標系に依らないことを保障しているだけである．従って，リーマン面上の函数論は，局所的に見る限り，平面の函数論のコピー，つまり借りものであって，新しいことは何もない．大域的な考え方をしてはじめてリーマン面らしさが現れる．例1のように，1つの座標で完全なコピーが取れれば，コピーとオリジナルの区別はなく，"trivial"になって当然なのである．

例3　$R = S^1 - \{|z| \leq 1\}$は境界のないリーマン面であるが，$R' = S^1 - \{|z| < 1\}$は境界$\Gamma = \{|z| = 1\}$をもつ境界付リーマン面である．このように，もともと境界のないリーマン面$R = R' \setminus \Gamma$に境界を付けて境界付リーマン面$R' = R \cup \Gamma$を作ることがある．鏡像の原理により，このような境界Γがあれば，その付け方はRから一意に決まる．（部分的に境界を付けることもあるので，"局所的に一意"というべきかも知れない）

上で，定義せずに使った用語の意味を以下に補っておく．

定義　R上の複素数値関数fが正則とは，$\forall \alpha \in A$に対し，$f \circ \varphi_\alpha^{-1}$が$\varphi_\alpha(U_\alpha)$上の正則関数となること．

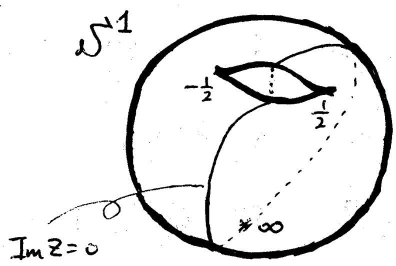
定義　R, R'をリーマン面として，$\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$，$\{U'_{\alpha'}, \varphi'_{\alpha'}\}$をそれぞれの局所座標系とする．写像$\varphi : R \to R'$がanalytic

とは，$\forall \alpha' \in A'$ に対して，$\varphi'_{\alpha'}\circ\varphi$ が $\varphi^{-1}(U'_{\alpha'})$ $(\subset R)$ 上の正則関数となること．（$\Leftrightarrow$ $\forall\alpha\in A,\ \forall\alpha'\in A'$ に対し，$\varphi'_{\alpha'}\circ\varphi\circ\varphi_\alpha^{-1}$ が $\varphi_\alpha(\Phi^{-1}(U'_{\alpha'})\cap U_\alpha)$ $(\subset \mathbb{C})$ 上の正則関数となること）．

定義　2つのリーマン面 R，R' が等角同値とは，R から R' の上への1対1 analytic 写像があること。

定義　R 上の2つの座標近傍 $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ と $\{V_\beta, \psi_\beta\}$ が R 上に同じ等角構造を定めるとは，恒等写像 id : R with $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\} \to R$ with $\{V_\beta, \psi_\beta\}$ が analytic．（$\Leftrightarrow$ $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}\cup\{V_\beta, \psi_\beta\}$ が (iii) をみたす）．

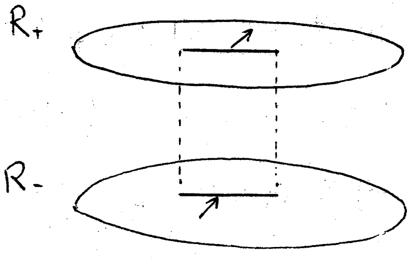
(注)　リーマン面では等角同値なものを同一視して扱うことが多い。たとえば，$S^1-\{|z|\leq 1\}$ は $S^1-[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ と等角同値であり，リーマン面としては例3のように $S^1-[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ に境界が付けられる．しかし，これを $S^1-[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]\subset S^1$ という関係の中で実現しようとすると，いわゆるハサミで $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ にそって S^1 を切るという表現になる(下図)．正確にはむしろ，等角同値な $S^1-\{|z|\leq 1\}$ を考えた上で，例3のように $S^1-\{|z|<1\}$ を考えるというべきかも知れない．



(見取図)

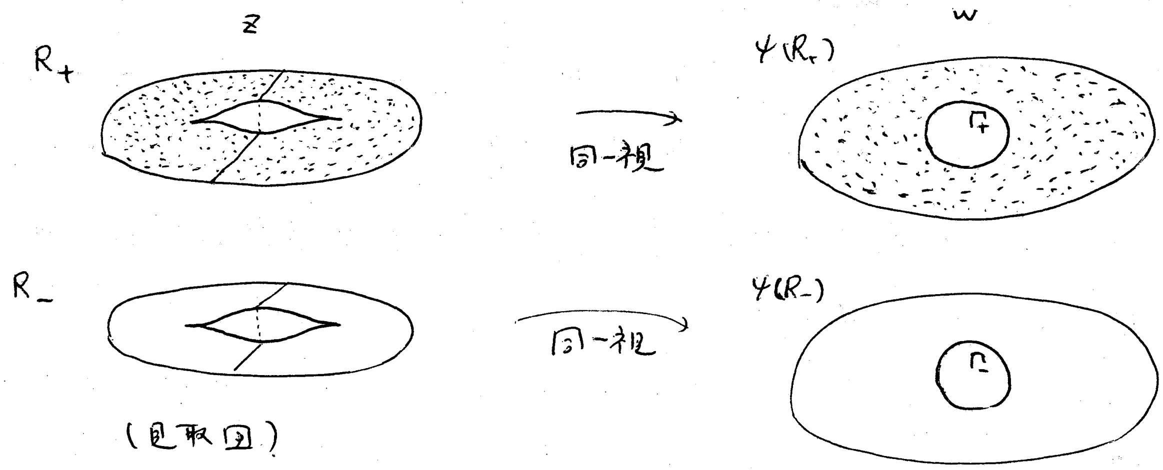
さて，2枚の単位開円板 R_+, R_- を slit $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ で切り

開き(ハサミ)，slitの両岸を互い違いに張り合せ(ノリ)てリーマン面$\tilde{R}$を作る例を考えよう。



(見取図)

まず，slit $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ を切り開くとは，$R_\pm - [-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ をリーマン面と思い，$[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ に境界を付けることに対応する。上の(注)で述べたことに従うと，$S^1-[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ から $S^1-\{|z|\leq 1\}$ への等角写像をφとして，$\varphi(R_\pm)\cup\Gamma_\pm$ を考えればよい。但，$\Gamma_\pm=\{|z|=1\}$ とする(ここでは，区別するためΓ_+とΓ_-の2つのコピーをそれぞれR_+，R_-に対応して考える)。これにより，



(見取図)
(設計図)

り，両岸 $\{z:|z|=1,\ \mathrm{Im}\,z\geq 0\}$ と $\{z:|z|=1,\ \mathrm{Im}\,z\leq 0\}$ が出来たことになる。次に張り合せ(ノリ)であるが，これは以下のような全く位相的な手続きである：

<u>位相空間の張り合せ</u>　X, Y を位相空間, E を X の部分集合, $\varphi: E\to Y$ を連続写像とするとき,

$$X\cup_{\varphi}Y = X+Y/\sim \quad （直和位相空間\ X+Y\ の商空間）$$

により位相空間 $X\cup_{\varphi}Y$ を定義する．但，商空間の同値類は，$y\in\varphi(E)$ のとき，$\{y\}\cup\varphi^{-1}(y)$，その他はすべて1点のみからなる同値類とする．

上の例では，$X=\psi(R_+)\cup\Gamma_+$，$Y=\psi(R_-)\cup\Gamma_-$，$E=\Gamma_+=\{|w|=1\}$ として，$\varphi: E\to Y$ を $\varphi(w)=\bar{w}\ (=\frac{1}{w})$ により定めたとき，

$$\tilde{R} = (\psi(R_+)\cup\Gamma_+)\cup_{\varphi}(\psi(R_-)\cup\Gamma_-)$$

を考えることになる．$\tilde{R}$ が Hausdorff 空間であり，多様体となることは General topology の演習問題である．自然な座標系をみつけて $\tilde{R}$ がリーマン面となることも，$\varphi(w)=\frac{1}{w}$ が正則に $\varphi(R_+)$ から $\varphi(R_-)$ への写像に拡張されるので明らかであろう．

以上のことに納得がいけば，今後は見取図だけですませてもかまわないと考える．

3. 以下，R をリーマン面とする．$M^{\infty}(R)$ で R 上の有理型関数で，あるコンパクト集合の外では有界なもの全体を表す．$\mathcal{P}(R)$ を R の点 a の集りで，a で極をもつ $M^{\infty}(R)$ 関数が存在するような点全体とする．$H^{\infty}(R)$ で分離 れない点の集合 $\{a\in b : \exists b\in R$ such that $f(a)=f(b)$ for $\forall f\in H^{\infty}(R)\}$ が孤立点のみからなっているとき，$H^{\infty}(R)$ は R の点を弱分

離するという．

さて，$\tilde{R}$をもう一つのリーマン面，$\pi: \tilde{R} \longrightarrow R$ を R の unlimited 2重被覆写像とする．つまり，π は proper な解析写像で，

$$\max\{\#\pi^{-1}(a) : a \in R\} = 2$$

とする．このとき，$\#\pi^{-1}(a) = 1$ となる点があれば，$\pi^{-1}(a) = \{\tilde{a}\}$ は1点で，$\tilde{a}$ は π の分岐点に対応する．

定理([3]) $\pi: \tilde{R} \longrightarrow R$ を上で述べた unlimited 2重被覆写像とし，$H^\infty(R)$ は【弱】分離とする．もし，下記の条件(1)，(2)，(3)をみたす開集合 W が R の中に取れれば，$H^\infty(\tilde{R})$ も $\tilde{R}$ の点を【弱】分離して，$\mathcal{P}(\tilde{R}) = \pi^{-1}(\mathcal{P}(R))$ が成り立つ．

(1)　$H^\infty(\tilde{W})$ は【弱】分離．但，$\tilde{W} = \pi^{-1}(W)$.

(2)　∂W は $\mathcal{P}(R)$ のコンパクト集合．

(3)　$\pi^{-1}(R \setminus W)$ は互いに交わらない2つの開集合 V_+，V_- の和で表され，各 $V_\pm$ は $R \setminus W$ と π により同相になっている．

証明は，$\mathcal{P}(R)$ の中に局所座標 W をとり，W の中に slit $[a, b]$ を考え，$R-[a,b]$ の2つのコピー R_+ と R_- を slit の両岸にそって互い違いに張り合せてできるリーマン面 $\tilde{R}$ を

例に説明する. $\tilde{R}$ がリーマン面となることは, リーマン面の定義の中で, 連結性を除けばすべて局所的な条件であるから, 前節の最後の例と同様に示せる. $R_+ \cup R_- \subset \tilde{R}$ と考え, $\tilde{a} \in R_+ \cup R_-$ に対応する R の点 a を自然に対応させる写像 π が, 被覆写像 $\pi : \tilde{R} \longrightarrow R$ を定める. $\tilde{W} = \pi^{-1}(W)$ 上で

$$G = \sqrt{\frac{z-a}{z-b}} \circ \pi$$

は一価の分岐を定め, $\tilde{W}$ 上の一価正則関数となる. (1) が満された)

R_+ の点 a_+ を対応する R_- の点 a_-, 逆に a_- を a_+ に対応させると, $\tau : R_+ \cup R_- \longrightarrow R_+ \cup R_-$ は $\tilde{R}$ から $\tilde{R}$ への解析写像となり,

$$G \circ \tau = -G$$

をみたす. (これは, $\sqrt{z}$ の分岐が $\sqrt{z}$ と $-\sqrt{z}$ の2個であることに対応する事実).

$\max(|a|, |b|) < c < 1$ なる数 c を固定して, $\{|z| = c\}$ を含む円環状の近傍 V を W の中に考え, $V \cap [a, b] = \phi$ とする.

$u = \frac{1}{2}\log\frac{z-a}{z-b}$ は V 上で1価正則より, Cauchyの積分定理により

$$(\#) \quad u(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0} \frac{u(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} \frac{u(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta \quad \text{on } V$$

$$= u_0(z) - u_1(z), \qquad 但, \ \partial V = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$$

そこで, G の分岐を, $\pi^{-1}(V) \cap R_+$ 上で $G = e^{u} \circ \pi$ となる

ように選んでおくと，$\pi^{-1}(V)\cap R_+$ 上で

$$G=(e^{u_0}\circ\pi)(e^{-u_1}\circ\pi),\ \text{i.e.},\ Ge^{-u_0}\circ\pi=e^{-u_1}\circ\pi$$

が成立する．よって，

$$F=\begin{cases} e^{-u_0}\circ\pi & \text{on } W^+=\pi^{-1}(W)\cap R^+ \\ -e^{-u_1}\circ\pi & \text{on } W^-=\pi^{-1}(W)\cap R^- \\ Ge^{-u_0\circ\pi} & \text{on } \tilde{W}=\pi^{-1}(W) \end{cases}$$

と定めれば，F は well-defined で $\tilde{R}$ 上の有理型関数で，$F\in M^\infty(\tilde{R})$ が示せる．F が上下の sheet R_+, R_- を分離することより，$M^\infty(\tilde{R})$ 従って $H^\infty(\tilde{R})$ は $\tilde{R}$ の点を弱分離し，$H^\infty(R)$ が R の点を分離すれば，F の作り方より $H^\infty(\tilde{R})$ が $\tilde{R}$ の点を分離することがわかる．この辺の細い証明には［2］の結果が必要である．また，(#)で使った Cauchy の積分公式は本来リーマン面 R の上で書かれるべきもので，このためには，［1］で構成した Cauchy 微分が必要である．

参考文献

1. T. W. Gamelin and M. Hayashi, The algebra of the bounded analytic functions on a Riemann surface, (to appear).
2. M. Hayashi, The maximal ideal space of the bounded analytic functions on a Riemann surface, J. Math. Soc. Japan 39 (1987), 337–344

3. M. Hayashi and M. Nakai, *Point separation by bounded analytic functions of a covering Riemann surface*, (to appear).