数理解析研究所講究録
654巻 1988年 70-80

ある特異積分作用素と Nelson-Szegö 測度

北海学園大　山本隆範　（Takanori Yamamoto）

この講演は，中路貴彦先生との共同研究（[7]）による。

I章　問題

周期 2π をもつ $\mathbb{R}$ 上の可積分関数 $f(\theta)$ に対して，その Fourier 係数 $\hat{f}(n)$，$n\in\mathbb{Z}$ を

$$\hat{f}(n)=\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\, e^{-in\theta}\,\frac{d\theta}{2\pi}$$

によって定義する。f は単位円周 $\mathbb{T}$ 上の関数と考えることもできる。$dm(\theta)=\frac{d\theta}{2\pi}$ なる測度 m は $\mathbb{T}$ 上の正規化された Lebesgue 測度である。可積分関数 f に対して共役関数 $\tilde{f}$ は特異積分によって，

$$\tilde{f}(\theta)=\mathrm{VP}\int_{\mathbb{T}} f(\theta-t)\cot\frac{t}{2}\,dm(t)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{\pi}\{f(\theta-t)-f(\theta+t)\}\cot\frac{t}{2}\,dm(t)$$

と表される。f に対して $\tilde{f}$ を対応させる作用素を Hilbert 変換といい，$Hf=\tilde{f}$ と表す。

円板環 $A=\{f\in C(\mathbb{T})\ ;\ \hat{f}(n)=0,\ n=-1,-2,\cdots\}$ に対して，$A_0=\{f\in A\ ;\ \hat{f}(0)=0\}$，$\overline{A_0}=\{\bar{f}\ ;\ f\in A_0\}$ を考える。ただし，$\bar{f}$ は f の複素共役関数を表す。このとき $A+\overline{A_0}$ の要素 f_1+f_2（$f_1\in A$，$f_2\in\overline{A_0}$）に f_1 を対応させる

作用素を解析射影といい，

$$P_+(f_1+f_2)=f_1 \qquad (f_1\in A,\ f_2\in \overline{A_0})$$

と表す。$A+\overline{A_0}$ 上の恒等作用素を I で表し，$P_-=I-P_+$ で作用素 P_- を定めると，

$$P_-(f_1+f_2)=f_2 \qquad (f_1\in A,\ f_2\in \overline{A_0})$$

となる。このとき，$f\in A+\overline{A_0}$ について

$$P_+f=\frac{1}{2}\{f+i\tilde{f}+\hat{f}(0)\}=\frac{1}{2}\{(I+iH)f+\hat{f}(0)\}$$

$$P_-f=\frac{1}{2}\{f-i\tilde{f}-\hat{f}(0)\}=\frac{1}{2}\{(I-iH)f-\hat{f}(0)\}$$

となる。

つぎの問題を考える。

「 $L^\infty(m)$－関数 α,β が与えられたとき，荷重付きノルム不等式

$$(*) \qquad \int_{\mathbb{T}}|(\alpha P_+ + \beta P_-)f|^2 W\,dm \leq \int_{\mathbb{T}}|f|^2 W\,dm \quad (f\in A+\overline{A_0})$$

を満たす荷重 W の条件を，α,β を用いて表せ。」 ただし，荷重とは非負値可積分関数を表すものとする。作用素 P_+，P_+-P_- についての荷重付きノルム不等式は，Helson-Szegö ([3]) Koosis ([5])，Cotlar-Sadosky-Arocena ([1], [2]) の結果がある。作用素 $\alpha P_+ + \beta P_-$ の荷重付き L^2 空間における可逆性については，Widom ([9])，Nikolskii ([8]) 等に述べられている。

我々は，$\alpha P_+ + \beta P_-$ は，恒等作用素 I と，P_+ と P_+-P_- という3つの作用素を補間しているという点に興味を持ち上の問題を考えた。一方，特殊な場合として，$\beta\equiv 0$ のときを考える

と，Koosis の定理と Helson－Szegö の定理を補間する定理が得られる。

II章　解答

補題 1　荷重 W が $m\{W=0\}>0$ を満たしているときつぎの条件は同値である。

(i)　W は不等式(*)を満たす。

(ii)　$W=0$ a.e. on $\{\alpha \neq \beta\} \cup \{|\alpha|>1\}$

したがって，$W>0$ a.e. なる W について調べればよい。一方，α，β が $\alpha \equiv \beta$ a.e. を満たすときは $\alpha P_+ + \beta P_- = \alpha I$ となり明らかな場合になるから，$m\{\alpha \neq \beta\}>0$ なる α，β について調べればよい。

補題 2　α，β が $m\{\alpha\bar{\beta}=1\}>0$ を満たしているとき，つぎの条件は同値である。

(i)　W は不等式(*)を満たす。

(ii)　$W=0$ a.e. on $\{\alpha \neq \beta\}$

したがって，$|1-\alpha\bar{\beta}|>0$ a.e. なる α，β について調べればよい。

補題3　α, β が，$W>0$ a.e. なる荷重 W について不等式(＊)を満たしているならば，$|\alpha| \leqq 1$ a.e. かつ $|\beta| \leqq 1$ a.e.。

以上の補題より，つぎの条件(＊＊)を満たす α, β, W について調べればよい。

$$(**)\begin{cases} |\alpha| \leqq 1 \text{ a.e.}, \ |\beta| \leqq 1 \text{ a.e.}, \ |1-\alpha\bar{\beta}|>0 \text{ a.e.}, \\ m\{\alpha \neq \beta\} > 0, \\ W>0 \text{ a.e.} \end{cases}$$

以下，$-\pi \leqq \operatorname{Arg} z < \pi$ とし，

$$s = \begin{cases} \operatorname{Arg}(1-\alpha\bar{\beta}) & \text{on } \{\alpha \neq \beta\} \\ 0 & \text{on } \{\alpha = \beta\} \end{cases}$$

$$r = \begin{cases} \left|\dfrac{\alpha-\beta}{1-\alpha\bar{\beta}}\right| & \text{on } \{\alpha \neq \beta\} \\ 0 & \text{on } \{\alpha = \beta\} \end{cases}$$

とする。このとき，Cotlar－Sadosky の lifting 定理([2]，[1]，[6]，[10])より，つぎの定理が導かれる。

定理1　α, β, W が条件(＊＊)を満たし，更に

$$\int_{\mathbb{T}} |1-\alpha\bar{\beta}|\, e^{\tilde{s}}\, W\, dm < \infty$$

とする。このとき，つぎの条件は同値である。

(i)　W は不等式(＊)を満たす。

(ii) $\quad 2\,|1-\alpha\bar{\beta}|\,W\,e^{\tilde{v}+\tilde{s}}\cos v \geq C \quad$ a.e.

$$W = C\cdot\frac{1}{|\alpha-\beta|}\,e^{u-\tilde{v}-\tilde{s}} \quad \text{a.e. on } \{\alpha\neq\beta\}$$

ただし，Cは正の任意定数，

$$|v| \leqq \cos^{-1} r \quad \text{a.e.}$$

$$|u| \leqq \cosh^{-1}\left(\frac{\cos v}{r}\right) \quad \text{a.e. on } \{\alpha\neq\beta\}.$$

ただし，$\cos^{-1}$，$\cosh^{-1}$ はそれぞれ $\cos$，$\cosh$ の逆関数を表す。

系 1.1 $\quad \alpha$，β，W が条件(**)を満たし，$s\in C^1(\mathbb{T})$ とする。このとき，Wが不等式(*)を満たすならば，

$$\int_{\mathbb{T}}\frac{1}{|1-\alpha\bar{\beta}|\,W}\,dm < \infty$$

となる。

系 1.2 $\quad |\alpha|\leqq 1$ a.e.，$m\{\alpha\neq 0\}>0$，$W>0$ a.e.。このとき，つぎの条件は同値である。

(i) $\quad \int_{\mathbb{T}}|\alpha P_+ f|^2 W\,dm \leqq \int_{\mathbb{T}}|f|^2 W\,dm \quad (f\in A+\bar{A}_0)$

(ii) $\quad 2W e^{\tilde{v}}\cos v \geqq C \quad$ a.e.

$$W = C\cdot\frac{1}{|\alpha|}\,e^{u-\tilde{v}} \quad \text{a.e. on } \{\alpha\neq 0\}$$

ただし，Cは正の任意定数，

$$|v| \leqq \cos^{-1}|\alpha| \quad \text{a.e.}$$

$$|u| \leqq \cosh^{-1}\left(\frac{\cos v}{|\alpha|}\right) \quad \text{a.e. on } \{\alpha\neq 0\}$$

系 1.3　　$W>0$ a.e. とし，$U \geqq 0$ a.e.，$m\{U \neq 0\}>0$ とする。このとき，つぎの条件は同値である。

(i)　$\int_{\mathbb{T}} |P_+f|^2 U\, dm \leqq \int_{\mathbb{T}} |f|^2 W\, dm \quad (f \in A+\overline{A_0})$

(ii)　$U \leqq W$ a.e.

$\frac{1}{W} \leqq \frac{2}{C} e^{\tilde{v}} \cos v$ a.e.

$(WU)^{\frac{1}{2}} = C\, e^{u-\tilde{v}}$ a.e. on $\{U>0\}$

ただし，C は正の任意定数，

$|v| \leqq \cos^{-1}\left(\frac{U}{W}\right)^{\frac{1}{2}}$ a.e.

$|u| \leqq \cosh^{-1}\left[\left(\frac{W}{U}\right)^{\frac{1}{2}} \cos v\right]$ a.e. on $\{U>0\}$.

系 1.4　　$W>0$ a.e. とし，M は正の定数とする。このとき，つぎの条件は同値である。

(i)　$\int_{\mathbb{T}} |P_+f|^2 W\, dm \leqq M \int_{\mathbb{T}} |f|^2 W\, dm \quad (f \in A+\overline{A_0})$

(ii)　$M \geqq 1$

$W = C\, e^{u-\tilde{v}}$ a.e.

ただし，C は正の任意定数，

$\|v\|_\infty \leqq \cos^{-1} \frac{1}{\sqrt{M}}$

$|u| \leqq \cosh^{-1}\left[\sqrt{M} \cos v\right]$ a.e.

つぎの章において，定理 1 およびその系より導かれる諸定理について調べる。

Ⅲ章　応用

Koosis の定理　荷重 W についてつぎの条件は同値である。

(i) $\int_{\mathbb{T}} |P_+ f|^2 U\, dm \leq \int_{\mathbb{T}} |f|^2 W\, dm \quad (f \in A + \overline{A}_0)$

が成り立つような荷重 U で $m\{U \neq 0\} > 0$ なるものが存在する。

(ii) W^{-1} は可積分関数である。

証明　W が条件(i)を満たしているとき，補題1より $W > 0$ a.e. となる。系1.3より

$$\frac{1}{W} \leq \frac{2}{C} e^{\tilde{v}} \cos v \quad \text{a.e.}, \qquad \|v\|_\infty \leq \frac{\pi}{2}.$$

よって，$W^{-1} \in L^1(m)$．　逆に W が条件(ii)を満たしているとき，$k = \frac{1}{W} + i\left(\frac{1}{W}\right)^\sim$ とおくと，k は $\mathrm{Re}\, k \geq 0$ a.e. かつ $k \neq 0$ なる outer 関数である。このとき，$\frac{1}{k}$ は H^1 に属し，$\mathrm{Re}\frac{1}{k} \geq 0$ a.e. なる outer 関数である。よって，$\frac{1}{k} = C e^{iv - \tilde{v}}$ a.e. なる正の定数 C と $\|v\|_\infty \leq \frac{\pi}{2}$ なる v が存在する。このとき，$\frac{1}{W} = \mathrm{Re}\, k = C^{-1} e^{\tilde{v}} \cos v$ a.e. ゆえ $\cos v > 0$ a.e. となる。よって，$U = C e^{-\tilde{v}} \cos v$ とおくと，$U > 0$ a.e. かつ $(WU)^{\frac{1}{2}} = C e^{-\tilde{v}}$ a.e. かつ $\left(\frac{U}{W}\right)^{\frac{1}{2}} = \cos v$ a.e.. よって，系1.3より，U は条件(i)を満たす。　　（証明終）

Helson－Szegö の定理　非負値有界正則な Borel 測度 μ についてつぎの条件は同値である。

(i) $\int_{\mathbb{T}} |P_+ f|^2 d\mu \leq C \int_{\mathbb{T}} |f|^2 d\mu \quad (f \in A + \overline{A}_0)$

が成り立つような定数Cが存在する。

(ii) $d\mu = W\,dm$, $W = e^{u+\tilde{v}}$ a.e.

が成り立つような $u, v \in L^\infty(m)$ で, $\|v\|_\infty < \frac{\pi}{2}$ なるものが存在する。

証明　μ が条件(i)を満たしているとき, μ が m について絶対連続になることは, Helson-Szegö ([3]) の方法, または lifting 定理による方法 ([1], [2], [10]) によって示される。したがって, 非負値可積分関数 W によって $d\mu = W\,dm$ と書ける。補題1より, $W > 0$ a.e.. よって, 系1.4より,

$$W = e^{u+\tilde{v}} \text{ a.e.}, \quad \|v\|_\infty \leqq \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{C}} < \frac{\pi}{2},$$

$$\|u\|_\infty \leqq \cosh^{-1}\sqrt{C} + C' < \infty \quad (C, C' \text{ は正の定数})$$

と書ける。 逆に W が条件(ii)を満たしているとき, 定数 M を $M = \left(\frac{\cosh\|u\|_\infty}{\cos\|v\|_\infty}\right)^2$ と定めると, $\|v\|_\infty = \cos^{-1}\left(\frac{\cosh\|u\|_\infty}{\sqrt{M}}\right) \leqq \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{M}}\right)$ かつ $\frac{\cosh|u|}{\cos v} \leqq \sqrt{M}$ a.e. より $|u| \leqq \cosh^{-1}(\sqrt{M}\cos v)$ a.e. となる。よって, 系1.4より(i)が導かれる。 (証明終)

つぎの命題1, 命題2は系1.2より導かれる。前者は, $\alpha(\theta) = \cos\theta$, 後者は $\alpha(\theta) = \sqrt{\frac{1}{M}W^{p-1}(\theta)}$ として得られる。

命題1.　荷重 W について, つぎの条件は同値である。

(i) $$\int_{-\pi}^{\pi}|(P_+f)(\theta)|^2(\cos\theta)^2 W(\theta)\,d\theta \leqq \int_{-\pi}^{\pi}|f(\theta)|^2 W(\theta)\,d\theta \quad (f \in A + \overline{A_0})$$

(ii) $W(\theta) = C \cdot \dfrac{1}{|\cos\theta|} e^{u(\theta)+\tilde{v}(\theta)}$ a.e.，または $W(\theta) \equiv 0$ a.e.

ただし，C は正の任意定数，

$$|v(\theta)| \leqq \frac{\pi}{2} - \left|\frac{\pi}{2} - |\theta|\right| \quad \text{a.e.} \quad (-\pi \leqq \theta < \pi)$$

$$|u(\theta)| \leqq \cosh^{-1}\left(\frac{\cos v(\theta)}{\cos|\theta|}\right) \quad \text{a.e.}$$

命題2　正の定数 M と p が与えられたとき，荷重 W について，つぎの条件は同値である。

(i) $\int_{\mathbb{T}} |P_+ f|^2 W^p \, dm \leqq M \int_{\mathbb{T}} |f|^2 W \, dm \quad (f \in A + \bar{A}_0)$

(ii) $W = C \cdot e^{\frac{2}{p+1}(u+\tilde{v})}$ a.e.，または $W \equiv 0$ a.e.

ただし，C は正の任意定数，

$$|v| \leqq \cos^{-1}\left(\frac{W^{p-1}}{M}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{a.e.}$$

$$|u| \leqq \cosh^{-1}\left[\left(\frac{M}{W^{p-1}}\right)^{\frac{1}{2}} \cos v\right] \quad \text{a.e.}$$

つぎの命題は，*lifting* 定理から直接導くこともできるが，ここでは定理1より導くことにする。

命題3　$|\alpha - \beta| > 0$ a.e. かつ $\alpha\bar{\beta}$ が H^∞ 関数（i.e. 単位円の内部で有界正則な関数の境界値関数）なる α，β が与えられたとき，$W > 0$ a.e. なる荷重 W について，つぎの条件は同値である。

(i) W は不等式(*)を満たす。

(ii) $W = C \cdot \dfrac{1}{r} \cdot e^{u-\tilde{v}}$ a.e.

ただし，C は正の任意定数，$|\alpha| \leqq 1$ a.e.，$|\beta| \leqq 1$ a.e.

$$|v| \leqq \cos^{-1} r \quad \text{a.e.}$$

$$|u| \leqq \cosh^{-1}\left(\frac{\cos v}{r}\right) \quad \text{a.e.}$$

証明　$|\alpha-\beta| > 0$ より，$s = \operatorname{Arg}(1-\alpha\bar{\beta})$ a.e.，$r = \left|\frac{\alpha-\beta}{1-\alpha\bar{\beta}}\right|$ a.e.. よって，$-\tilde{s} = \log|1-\alpha\bar{\beta}| + C'$ a.e.

ここで C' は定数（$= -\int_{\mathbb{T}} \log|1-\alpha\bar{\beta}|\,dm$）である。したがって，定理1の前提条件は，

$$\int_{\mathbb{T}} |1-\alpha\bar{\beta}|\, e^{\tilde{s}}\, W\, dm = e^{-C'} \int_{\mathbb{T}} W\, dm < \infty$$

より，満たされている。定理1の条件(ii)において，

$$W = C \cdot \frac{1}{|\alpha-\beta|}\, e^{u-\tilde{v}-\tilde{s}} = C \cdot e^{C'} \left|\frac{1-\alpha\bar{\beta}}{\alpha-\beta}\right| e^{u-\tilde{v}} \quad \text{a.e.}$$

$$= C'' \frac{1}{r}\, e^{u-\tilde{v}} \quad \text{a.e.}$$

$$2\,|1-\alpha\bar{\beta}|\, e^{\tilde{v}+\tilde{s}} \cos v = 2C \cdot e^{u} \cdot \frac{\cos v}{r}$$

$$\geqq C e^{u} (e^{|u|} + e^{-|u|}) \geqq C \quad \text{a.e.}$$

（証明終）

つぎの定理において，前提条件 $r^{-1} \in L^{\infty}(m)$ を更に強い条件 $\frac{1}{|\alpha-\beta|} \in L^{\infty}(m)$ におきかえると $W\,dm$ は Helson-Szegö 測度になる。

定理2　$r^{-1} \in L^{\infty}(m)$ かつ $s \in C(\mathbb{T})$ なる α，β が与えられたとき，$W > 0$ a.e. なる荷重 W について，つぎの条件は同値である。

(i)　W は不等式(＊)を満たす。

(ii) $$W = C \cdot \frac{1}{|\alpha-\beta|} e^{u-\tilde{v}-\tilde{s}} \quad \text{a.e.}$$

ただし，Cは正の任意定数，$|\alpha| \leqq 1$ a.e.，$|\beta| \leqq 1$ a.e.

$$|v| \leqq \cos^{-1} r \quad \text{a.e.}$$

$$|u| \leqq \cosh^{-1}\left(\frac{\cos v}{r}\right) \quad \text{a.e.}$$

参考文献

[1] Arocena, R., Cotlar, M. and Sadosky, C. : Weighted inequalities in L^2 and lifting properties, Advances in Math. Suppl. Studies 7A, 95-128, Academic Press, 1981.

[2] Cotlar, M. and Sadosky, C. : On the Helson-Szegö theorem and a related class of modified Toeplitz kernels, Proc. Symp. Pure Math. A.M.S. 35(1979), 383-407.

[3] Helson, H. and Szegö, G. ; A problem in prediction theory, Annali di Mat. Pura et Applicata 4, 51 (1960), 107-138.

[4] Koosis, P. : Weighted quadratic means of Hilbert transforms, Duke Math. J. 38(1971) 609-634

[5] ―― : Moyennes quadratiques pondérées de fonctions périodiques et de leurs conjuguées harmoniques, C.R. Acad. Sci, Paris, 291 (1980) 255-257

[6] Nakazi, T. and Yamamoto, T. : A lifting theorem and uniform algebras, to appear in T.A.M.S.

[7] ―― : Some singular integral operators and weighted norm inequalities, in preparation.

[8] Nikol'skii, N.K. : Treatise on the shift operator, Springer Verlag, 1986.

[9] Widom, G. ; Singular integral equations in L^p, T.A.M.S. 97(1960) 131-160.

[10] Yamamoto, T. : On the generalization of the theorem of Helson and Szegö, Hokkaido Math. J., 14 (1985) 1-11.