数理解析研究所講究録
654巻 1988年 48-58

平面領域上の interpolating sequence について

福井高専　成田淳一郎 (Junichiro Narita)

1．目標

Carleson [3] による単位円板の場合の interpolating sequence の特徴付けを，もう少し一般の領域に拡張することを試みる．その際 interpolating constant についても考察する．

2．準備

Dを平面領域（又は開集合），$H^\infty(D)$ をD上の有界正則関数のなす Banach 環，$\mathcal{M}(D)$ をその極大 ideal 空間とする．

D上の点列 $\{z_n\}$ が interpolating sequence (for $H^\infty(D)$) とは，

$$\forall \{a_n\} \in \ell^\infty,\ \exists f \in H^\infty(D) \quad s.t. \quad f(z_n) = a_n \quad (\forall n)$$

をみたすときとする．このとき開写像定理により

$$M = \sup_{\|\{a_j\}\|_\infty \leqq 1} \inf\{\|f\|_\infty \ ;\ f \in H^\infty(D),\ f(z_n) = a_n\ (\forall n)\} < \infty$$

となり，このMを $\{z_n\}$ の interpolating constant と呼ぶ．

$D = \{|z| < 1\}$ のときには ([3])，

$$\{z_n\} : \text{interpolating seq.} \iff \delta = \inf_n \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{\infty} \left| \frac{z_n - z_m}{1 - \bar{z}_m z_n} \right| > 0$$

そしてこの δ と $\{z_n\}$ の interpolating constant M との間に次の関係が成り立つ([6]).

$$\frac{1}{\delta} \leqq M \leqq \frac{C}{\delta}\left(1 + \log\frac{1}{\delta}\right) \qquad (C\text{は絶対定数}).$$

Interpolating sequence の局所性については Behrens [2] で指摘されているが，ここではもう少し一般性のある次の形で示す

定理 1　D内の点列 $S = \{z_n\}$ に対し，

$\forall x \in \bar{D}$, $\exists U$: xの近傍 s.t. $S \cap U$ は $H^\infty(D \cap U)$-interpolating sequence $\Longrightarrow$ S は $H^\infty(D)$-interpolating sequence.

3. $H^\infty(\{D_n\})$-interpolating sequence とその局所性

Interpolating constant に関する結果を出すために次のような Banach 環を考える．$\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ を平面開集合の列とし，その disjoint union $\bigcup_{n=1}^{\infty}(D_n \times \{n\})$ 上の有界関数で各 $D_n \times \{n\}$ (D_nと同一視する)上正則なものの全体を $H^\infty(\{D_n\})$，その極大 ideal 空間を $\mathcal{M}(\{D_n\})$ とする．以下 $D_n \subset \{|z| < {}^\exists R\}$ $(\forall n)$ とし，$Z \in H^\infty(\{D_n\})$ s.t. $Z(z, n) = z$ の Gelfand 変換を $\hat{Z}$ とする．$\bigcup_{n=1}^{\infty}(D_n \times \{n\})$ 内の点列に対しても同様に interpolating seq. を定義すると，$\hat{Z}$ に関して次の局所性が成り立つ．

定理 1′　$S=\{z_j\}$ を $\bigcup_{n=1}^{\infty}(D_n\times\{n\})$ 内の点列としたとき，
$\forall x\in\mathbb{C}$，$\exists U$: x の近傍 s.t. $S\cap\hat{Z}^{-1}(U)$ は $H^\infty(\{D_n\cap U\})$-interpolating seq. $\Rightarrow$ S は $H^\infty(\{D_n\})$-interpolating seq.

定理 1′（1 も同様）の証明のために次の 2 つの結果を用いる．便宜のため定理 3 のみ証明を書いておく．

定理 2（[8]）$\{D_n\}$ を上記の通り，U を平面開集合とする．restriction map $H^\infty(\{D_n\})\longrightarrow H^\infty(\{D_n\cap U\})$ により引き起こされる projection を $\Phi:\mathcal{M}(\{D_n\cap U\})\longrightarrow\mathcal{M}(\{D_n\})$，即ち $\varphi\in\mathcal{M}(\{D_n\cap U\})$，$f\in H^\infty(\{D_n\})$ に対し

$$(\Phi(\varphi))(f)=\varphi(f|_{D_n\cap U})$$

とすると $\Phi|_{\mathcal{M}(\{D_n\cap U\})\cap\hat{Z}^{-1}(U)}$ は $\mathcal{M}(\{D_n\})\cap\hat{Z}^{-1}(U)$ の上への同相写像である．

定理 3（[1]）A を ℓ^∞ の linear subalgebra で ℓ^∞ の巾等元をすべて含むとする．このとき A があるノルム（これを $\|\cdot\|$ で表す）に関して Banach 環（完備でなくてもよい）になっていれば，$\sup\{\|x\|:x\in A,\ x^2=x\}<\infty$ である．

[証明] 背理法で示す．まずもし $\sup\{\|x\| : x\in A, x^2=x\}=\infty$ ならば，$^\exists x_n\in A$ $(n=1,2,\cdots)$ s.t. $x_n^2=x_n$，$x_nx_m=0$ $(n\neq m)$，$\|x_n\|\to\infty$ $(n\to\infty)$ を言う．ℓ^∞ の巾等元を $\mathbb{N}$ の部分集合 X の定義関数 1_X の形で表し，次の2つの場合に分けて考える．

(1) $^\exists X\subset\mathbb{N}$ s.t. $\sup\{\|1_Y\| : Y\subseteq X\}=\infty$ のとき（このとき X は性質(α)を持つと言うことにする）．

まず $\|1_{Y_n}\|\geqq n+\|1_{Y_{n-1}}\|$ $(n=2,3,\cdots)$ をみたす $\mathbb{N}$ の部分集合の単調減少列 $Y_1\supset Y_2\supset Y_3\supset\cdots$ を作る．$Y_1=X$ とし，$Z_1\subset Y_1$ を $\|1_{Z_1}\|\geqq 2+2\|1_{Y_1}\|$ をみたすようにとると，

$$\|1_{Y_1\setminus Z_1}\|=\|1_{Y_1}-1_{Z_1}\|\geqq\|1_{Z_1}\|-\|1_{Y_1}\|\geqq 2+\|1_{Y_1}\|.$$

そしてやはり三角不等式から，Z_1 または $Y_1\setminus Z_1$ のどちらかは性質(α)を持つので，そちらを Y_2 とする．以下同様に（性質(α)を持つ）Y_{n-1} から $Z_{n-1}\subset Y_{n-1}$ を $\|1_{Z_{n-1}}\|\geqq n+2\|Y_{n-1}\|$ をみたすようにとり，Z_{n-1}，$Y_{n-1}\setminus Z_{n-1}$ のうち性質(α)を持つ方を Y_n とすればよい．そして $X_n=Y_n\setminus Y_{n+1}$ とおくと $\{X_n\}$ は互いに disjoint で $\|1_{X_n}\|\geqq\|1_{Y_{n+1}}\|-\|1_{Y_n}\|\geqq n+1$．即ち $x_n=1_{X_n}$ $(n=1,2,\cdots)$ が求める列になっている．

(2) $^\forall X\subset\mathbb{N}$，$\sup\{\|1_Y\| : Y\subset X\}<\infty$ のとき．

任意に $X_1\subseteq\mathbb{N}$ をとり，$M_1=\sup\{\|1_Y\| : Y\subseteq X_1\}$ とおく．背理法の仮定により $\|1_{Z_1}\|\geqq 2+M_1$ をみたす $Z_1\subseteq\mathbb{N}$ が存在する．$X_2=Z_1\setminus X_1$ とおくと $X_1\cap X_2=\phi$，

$$\|1_{X_2}\| \geqq \|1_{Z_1}\| - \|1_{Z_1\cap X_1}\| \geqq 2 + M_1 - M_1 = 2 .$$

以下同様に $M_2 = \sup\{\|1_Y\| : Y \subseteqq X_1 \cup X_2\}$, $\|1_{Z_2}\| \geqq 3 + M_2$, $X_3 = Z_2 \setminus (X_1 \cup X_2)$, --- ととっていくと $\{X_n\}$ は互いに disjoint で $\|X_n\| \geqq n$ $(n=2,3,\cdots)$. よって $x_n = 1_{X_n}$ $(n=1,2,\cdots)$ が求める列になっている.

さて, この $\{x_n\}$ の異なる元を使って $\{y_{j,k}\}_{j,k=1}^{\infty}$ を $\|y_{j,k}\| > 2^{j+k}$ をみたすようにとり, $y_j = \sum_k y_{j,k}$ とおく. $x_n x_m = 0$ $(n \neq m)$ であったから y_j も ℓ^∞ の巾等元, よって A の元である. 各 j に対し k_j を $2^{k_j} > \|y_j\|$ となるようにとり, $y = \sum_j y_{j,k_j}$ とすると $y y_j = y_{j,k_j}$ であり,

$$2^{j+k_j} < \|y_{j,k_j}\| \leqq \|y\|\,\|y_j\| \leqq \|y\|\, 2^{k_j}$$

$$\therefore \ \|y\| > 2^j \quad (\forall j)$$

となって矛盾を生じる　　　　　　　　　　　　　　　　　[証明終]

[定理1'の証明] 段階に分けて証明する. hull(I) と interpolating seq. の関係については [7] の最後の定理によった.

(1) まず $S = S_1 \cup S_2$, $S_1 \cap S_2 = \phi \Rightarrow \overline{S_1} \cap \overline{S_2} = \phi$ ($\mathcal{M}(\{D_m\})$ での閉包) を示す. $x \in \overline{S_1} \cap \overline{S_2}$ があったとして, $\hat{Z}(x)$ の近傍 U を定理の仮定のようにとると, $S \cap \hat{Z}^{-1}(U)$ は $H^\infty(\{D_m \cap U\})$-interpolating seq. であるから, $^\exists f \in H^\infty(\{D_m \cap U\})$ s.t.

$$f = 0 \ \text{on} \ S_1 \cap \hat{Z}^{-1}(U) \quad , \quad f = 1 \ \text{on} \ S_2 \cap \hat{Z}^{-1}(U)$$

$\therefore\ \hat{f}=0$ on $\overline{S_1\cap\hat{Z}^{-1}(U)}$, $\hat{f}=1$ on $\overline{S_2\cap\hat{Z}^{-1}(U)}$

であるから、 $\overline{S_1\cap\hat{Z}^{-1}(U)}\cap\overline{S_2\cap\hat{Z}^{-1}(U)}=\phi$ (in $\mathcal{M}(\{D_n\cap U\})$).

よって定理2により $\overline{S_1}\cap\overline{S_2}\cap\hat{Z}^{-1}(U)=\phi$ (in $\mathcal{M}(\{D_n\})$)

がわかり $x\in\overline{S_1}\cap\overline{S_2}$, $x\in\hat{Z}^{-1}(U)$ に矛盾する.

(2) $T\subset\mathcal{M}(\{D_n\})$ に対して $I_T=\{f\in H^\infty(\{D_n\}) : \hat{f}=0 \text{ on } T\}$

($H^\infty(\{D_n\})$ の閉 ideal), $hull(T)=\{x\in\mathcal{M}(\{D_n\}) : x=0 \text{ on } I_T\}$

とおくと一般に $hull(T)\supset\overline{T}$ であるが、さらに

$$T:\text{ interpolating seq.}\implies hull(T)=\overline{T}$$

であることを言う.

T : interpolating seq. のとき $H^\infty|_{\overline{T}}=C(\overline{T})$ ($\overline{T}$ 上の連続関数全体) である. $x\in hull(\overline{T})$ に対して

$$H^\infty|_T\ni[f]\longmapsto x(f)\qquad(f\in H^\infty(\{D_n\}))$$

は well defined で, $H^\infty|_{\overline{T}}=C(\overline{T})$ 上の複素準同形であるから $x\in\mathcal{M}(C(\overline{T}))=\overline{T}$. よって $hull(T)\subset\overline{T}$.

(3) $\overline{T_1}=hull(T_1)$, $\overline{T_2}=hull(T_2)\implies\overline{T_1\cup T_2}=hull(T_1\cup T_2)$.

$\supset$ を言えばよいが, $x\notin\overline{T_1\cup T_2}$ とすると $x\notin hull(T_i)$ $(i=1,2)$

ゆえ $\exists f_1, f_2\in H^\infty$ s.t. $\hat{f_i}=0$ on T_i , $\hat{f_i}(x)\neq0$ $(i=1,2)$.

$\therefore\ \widehat{f_1f_2}=0$ on $T_1\cup T_2$, $\widehat{f_1f_2}(x)\neq0$ よって $x\notin hull(T_1\cup T_2)$.

(4) $\overline{S}=hull(S)$.

$\forall x\in\mathbb{C}$ に対し仮定のように U をとり, さらに $x\in V\subset\overline{V}\subset U$ となる近傍 V をとる. このような有限個の V で $\overline{\cup D_n}$ を覆り

$V_1, \cdots, V_l$, 対応する U を $U_1, \cdots, U_l$ とする．$S = S_1 \cup \cdots \cup S_l$,
$S_i \subset \hat{Z}^{-1}(V_i)$ と disjoint に分けると (2) により $\overline{S_i} = hull(S_i)$
in $\mathcal{M}(\{D_m \cap U_i\})$ $(i = 1, \cdots, l)$. ところが定理 2 により $\overline{S_i}$ は
$\mathcal{M}(\{D_m\})$ で考えても変わらず，$hull(S_i)$ が $\hat{Z}^{-1}(U_i)$ 内で変わらないこともわかる．$\hat{Z}^{-1}(U_i)$ の外に関しては，$x \in \mathcal{M}(\{D_m\})$,
$\hat{Z}(x) \notin U_i$ のとき開集合 O_1, O_2 を $\overline{V} \subset O_1 \subset U_i$, $x \in O_2$,
$O_1 \cap O_2 = \phi$ となるようにとり $O = O_1 \cup O_2$ とする．
$f \in H^\infty(\{D_m \cap O\})$ s.t. $f = 0$ on $D_m \cap O_1$, $f = 1$ on $D_m \cap O_2$
$(m = 1, 2, \cdots)$ を考えると $\hat{f} = 0$ on S_i, $\hat{f}(x) = 1$ ([8] の lemma)
だから $\mathcal{M}(\{D_m \cap O\})$ で考えて $x \notin hull(S_i)$. $x \in \hat{Z}^{-1}(O)$ だから $\mathcal{M}(\{D_m\})$ で考えても $x \notin hull(S_i)$. よって $\mathcal{M}(\{D_m\})$ で
$\overline{S_i} = hull(S_i)$. (3) により $\overline{S} = hull(S)$.

(5) $H^\infty(\{D_m\})|S$ が l^∞ の巾等元をすべて含むこと.

projection $\varphi : H^\infty(\{D_m\}) \longrightarrow H^\infty(\{D_m\})/I_S$ の引き起す写像

$$\Phi : \mathcal{M}(H^\infty(\{D_m\})/I_S) \longrightarrow \mathcal{M}(\{D_m\}), \quad \Phi(x)(f) = x(\varphi(f))$$

は $hull(S)$ $(= \overline{S})$ の上への同相写像となる．$S = S_1 \cup S_2$,
$S_1 \cap S_2 = \phi$ とすると $\overline{S_1} \cup \overline{S_2} = \overline{S}$, $\overline{S_1} \cap \overline{S_2} = \phi$ ((1)) だから
Šilov の巾等元定理により

$$\exists f \in H^\infty(\{D_m\})/I_S \quad s.t. \quad \hat{f} = 0 \text{ on } \Phi^{-1}(\overline{S_1}), \quad \hat{f} = 1 \text{ on } \Phi^{-1}(\overline{S_2}).$$

(6) $H^\infty(\{D_m\})|S$ が l^∞ の元をすべて含むこと.

(5) と定理 3 により ($H^\infty(\{D_m\})/I_S$ のノルムで考えて), (5) の

f はすべて $\|f\| \leqq {}^{\exists}M$ をみたすようにとれる．適当に複素数 $C_1, \cdots, C_\ell$ $(|C_i| \leqq 1 \ (i=1,\cdots,\ell))$ をとり

$$x \in \mathbb{C}, \ |x| \leqq 1 \ \Rightarrow \ {}^{\exists}C_i \ \text{ s.t. } \ |x - C_i| \leqq \frac{1}{2}$$

と出来るから，(5) の f の線形結合を考えることにより，

$$\forall \{a_j\} \in \ell^{\infty}, \ {}^{\exists}g_1 \in H^{\infty}(\{D_n\}) \ \text{ s.t. } \ \|g_1\|_{\infty} \leqq M\ell \, \|\{a_j\}\|_{\infty},$$

$$\|\{a_j - g_1(z_j)\}\|_{\infty} \leqq \frac{1}{2} \|\{a_j\}\|_{\infty}.$$

さらに $\{a_j - g_1(z_j)\} \in \ell^{\infty}$ に対して同様に $g_2 \in H^{\infty}(\{D_n\})$ をとっていくことにより $\{g(z_j)\} = \{a_j\}$ をみたす $g \in H^{\infty}(\{D_n\})$ $(\|g\|_{\infty} \leqq 2M\ell \, \|\{a_j\}\|_{\infty})$ の存在がわかる． ［証明終］

4. Main theorem

λ を平面領域 D の *hyperbolic distance*，$\rho = \dfrac{e^{\lambda}-1}{e^{\lambda}+1}$ とする．
$D = \Delta = \{|z|<1\}$ のときは ρ は *pseudo-hyperbolic distance* $\rho(a,b) = \left|\dfrac{a-b}{1-\bar{a}b}\right|$ と一致する．

定理 4　$D \subset \{|z| < R \ (<\infty)\}$，かつある $\varepsilon > 0$ があって D の補集合の任意の成分の直径が ε より大であるとする．このとき D 内の点列 $\{z_j\}$ に対して，

$$\{z_j\} : \textit{interpolating sequence} \iff \delta = \inf_{k} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{\infty} \rho(z_j, z_k) > 0$$

さらにこのとき，$\{z_j\}$ の $\underbrace{\textit{interpolating constant}}_{M}$ は R, ε, δ のみに依存する定数で上から押さえられる．

[証明] ($\Rightarrow$) $\pi : \Delta \longrightarrow D$ を universal covering map とする．k を固定し，$f \in H^\infty(D)$，$\|f\| \leqq M$，$f(z_k)=1$，$f(z_j)=0$ $(j \neq k)$ をとる．$f \circ \pi \in H^\infty(\Delta)$，$\|f \circ \pi\| \leqq M$ である．まず $a_k \in \pi^{-1}(z_k)$ を適当にとり，$a_j \in \pi^{-1}(z_j)$ を

$$\lambda_\Delta(a_j, a_k) = \lambda_D(z_j, z_k) \quad \therefore \ \rho_D(z_j, z_k) = \rho_\Delta(a_j, a_k) = \left|\frac{a_j - a_k}{1-\bar{a}_j a_k}\right|$$

をみたすようにとる．$\{a_j\}_{j \neq k}$ を zeros とする Blaschke 積を B とすると，$f \circ \pi = Bg$，$\|g\|_\infty \leqq M$ と表せ，

$$1 = |f \circ \pi(a_k)| = |B(a_k)|\,|g(a_k)| \leqq M\,|B(a_k)|$$

$$\therefore \ \prod_{\substack{j=1\\ j \neq k}}^{\infty} \rho_D(z_j, z_k) = \prod_{\substack{j=1\\ j \neq k}}^{\infty} \left|\frac{a_j - a_k}{1-\bar{a}_j a_k}\right| = |B(a_k)| \geqq \frac{1}{M} > 0$$

M は k によらないので $\inf_k$ をとっても正である．

($\Leftarrow$) $\forall x \in \mathbb{C}$ に対してその近傍 $U = \{z : |z-x| < \frac{\varepsilon}{2}\}$ をとると $D \cap U$ の各成分は単連結，また一般に $D' \subset D$ のとき $\lambda_{D'} \geqq \lambda_D$ $\therefore \rho_{D'} \geqq \rho_D$ なのでこの各成分に単位円の場合の結果 (interpolating constant の評価も含めて) を用いることにより，$\{z_j\} \cap U$ が $H^\infty(D \cap U)$-interpolating seq. であることがわかる．よって定理 1 により $\{z_j\}$ は $H^\infty(D)$-interpolating sequence である．さらに ---- の部分も同様で，もし同じ R, ε, δ に対して interpolating constants $M_n \to \infty$ となるような領域列 $\{D_n\}$ と $\{z_{n,j}\}_j \subset D_n$ があれば，$\{z_{n,j}\}_{n,j}$ は $H^\infty(\{D_n\})$-interpolating sequence でないことになるが，定理 1' を使えば上と同様にし

て interpolating seq. であることがわかるので，これは矛盾である．

[証明終]

<u>注意</u>　定理4の $\Rightarrow$ は領域の形によらずいつでも言えたが，$\Leftarrow$ の言えない平面領域は存在する．

$\Delta_j = \{z : |z - c_j| < r_j\}$，$c_j \in \mathbb{R}^+$ $(j = 1, 2, \cdots)$ を $\Delta \setminus \{0\}$ に含まれ互いに disjoint，かつ $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{r_j}{c_j} < \infty$ となるようにとり，$D = \Delta \setminus \overline{\cup \Delta_j}$ とする．このとき ${}^{\forall} f \in H^{\infty}(D)$ に対して ([9])，

$$\lim_{\mathbb{R}^- \ni x \to 0} f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z} dz .$$

よって $\mathbb{R}^-$ 上から 0 に近づく点列 $\{z_j\}$ は interpolating seq にはなり得ないが，十分早く $z_j \to 0$ とすることにより $\delta = \inf_k \prod \rho(z_j, z_k) > 0$ とすることは出来る．

参考文献

[1] W. Badé and P. Curtis, Jr , The wedderburn decomposition of commutative Banach algebras, Amer. Jour. Math., 82 (1960), 851-866.

[2] M. Behrens , Interpolation and Gleason parts in L-domains, Trans. Amer. Math. Soc., 286 (1984), 203-225.

[3] L. Carleson, An interpolation problem for bounded analytic functions, Amer. Jour. Math., 80 (1958), 921-930.

[4] S. Fisher. Function theory on planar domains, John Wiley & Sons, New York, 1983.

[5] T. Gamelin, Localization of the corona problem, Pacific J. Math., 34 (1970), 73-81.

[6] J. Garnett, Bounded analytic functions, Academic Press, New York, 1981.

[7] K. Hoffman. Banach spaces of analytic functions, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1962.

[8] J. Narita, A remark on the corona problem for plane domains, J. Math. Kyoto Univ., 25 (1985), 293-298.

[9] L. Zalcman, Bounded analytic functions on domains of infinite connectivity, Trans. Amer. Math. Soc., 144 (1969), 241-270.