

Mahler の S 数, T 数, U 数の代数的独立性について

学習院大・理 豊田 雅孝 (MASANORI TOYODA)

§1. Introduction

K. Mahler による実数の分類

$$\mathbb{R} = A \cup S \cup T \cup U \text{ (disjoint union)}$$

で基本的なことは、彼自身による次の

THEOREM (Mahler, 1932).

- (1) A 数 \iff 代数的数,
- (2) 異なるクラスに属する 2 つの超越数は、
 \mathbb{Q} 上代数的独立.

であらう。 S, T, U それぞれのクラスに属する超越数の存在については、

- Lebesgue 測度の意味でほとんどすべての数は S 数,
- Liouville 数は U 数

であることは容易にわかるのだが、T 数の存在については未確定の状態がながく続いた後、

THEOREM (W. M. Schmidt, 1968). T 数は存在する。

が証明された。これでどのクラスも空でないことがわかったわけであるが、ここで Mahler の定理にもとって代数的独立性の問題を考えると次のような疑問がわいてくる:

異なるクラスに属する3つの超越数はいつでも \mathbb{Q} 上代数的独立であろうか?

すなわち

「 $\theta_1 \in S, \theta_2 \in T, \theta_3 \in U \implies \theta_1, \theta_2, \theta_3$ は \mathbb{Q} 上代数的独立」
は本当か?

初めのうち私は漠然とこれは本当だろうと考えていた。が、以下に述べるような意外な結果が成り立つことがわかり、この問題を否定的に解決するに至った:

MAIN THEOREM. 和が Liouville 数となるような
1つの S 数と 1つの T 数とが存在する。

この結果の証明の概略を述べる前に、必要な記号
を導入し、Mahler 分類の定義を復習しておく。

記号. 各 $n \in \mathbf{N}$ に対し

$$A_n := \{ \beta \in A \mid \deg(\beta) = n \},$$

$$\mathbf{A}_n := \{ \alpha \in A \mid \deg(\alpha) \leq n \}.$$

$\xi \in \mathbf{R}$, $\lambda \in \mathbf{R}$ に対し

$$\mathbf{A}_n(\xi; \lambda) := \{ \alpha \in \mathbf{A}_n \mid |\xi - \alpha| < H(\alpha)^{-\lambda} \},$$

$$k_n(\xi) := \sup \{ \lambda \in \mathbf{R} \mid \#(\mathbf{A}_n(\xi; \lambda)) = \infty \}.$$

Mahler (-Koksma) の分類.

各 $\xi \in \mathbf{R}$ に対し n の関数 $k_n = k_n(\xi)$ を用いて、

$$\xi \in A \text{ ----- } k_n \ll 1.$$

$$\xi \in S \text{ ----- } k_n \ll 1, k_n \ll n.$$

$$\xi \in T \text{ ----- } k_n \ll n; k_n < \infty (\forall n \in \mathbf{N}).$$

$$\xi \in U \text{ ----- } k_n = \infty (\exists n \in \mathbf{N}).$$

$K_1 = \infty$ となる数が Liouville 数である。Liouville 数の全体を L で表わせば、明らかに $L \subset U$ 。

§2. 主定理の証明(アウトライン)

Main Theorem の証明における最大のポイントは、次の命題を示すことにある。

PROPOSITION 1. $\{\theta_i\}_{i=1}^{\infty}$ を、次の条件(★)を満たす実数列とする。

$$(\star) \quad \forall n \in \mathbf{N} \exists K(n) > 0 \quad \forall i \in \mathbf{N}; K_n(\theta_i) \leq K(n).$$

するとこのとき以下の性質(a),(b)を満たす1つの実数 ξ が存在する:

(a) $\forall i \in \mathbf{N} \exists \{\gamma_{it}\}_{t=1}^{\infty}$: 異なる実数から成る列 s.t.

$$(i) \quad \gamma_{it} - \theta_i = \frac{a_{it}}{b_{it}} \in \mathbf{Q} \quad ((a_{it}, b_{it}) = 1, b_{it} > 0),$$

$$\left| \frac{a_{it}}{b_{it}} \right| < C_i \quad (C_i \text{ は } \theta_i \text{ だけに関係する定数}),$$

$$(ii) \quad \left| \xi - \gamma_{it} \right| \asymp e^{-b_{it}}$$

$$(t = 1, 2, \dots).$$

$$(b) \quad \forall n \in \mathbf{N} \quad \exists \lambda_n > 0 \quad \forall \beta \in A_n - \{\delta_{it}\}_{i,t=1}^{\infty};$$

$$|\xi - \beta| \geq \lambda_n \cdot H(\beta)^{-(n^2+n+1) \cdot K(n) - n - 2}$$

この命題の証明は長くなるので、その詳細はいずれ出る私の論文にゆずるが、一口で述べれば W. M. Schmidt が彼の有名な論文 "Mahler's T-numbers" において代数的数の列に適用した方法を条件(★)を満たす実数列 $\{\theta_i\}_{i=1}^{\infty}$ に適用することであるといえる。

PROPOSITION 2.

$$\forall \eta_1, \eta_2 \in S \cup T \quad \exists \xi \in S \cup T; \quad \xi - \eta_j \in L \quad (j=1, 2).$$

この命題は $\theta_1 = \eta_1, \theta_i = \eta_2 \quad (i \geq 2)$ に Prop. 1 を適用することによって得られる。($\eta_1 \notin U, \eta_2 \notin U$ であるから条件(★)は満たされている。) $\eta_1 \notin A, \eta_2 \notin A$ であることに注意すれば、Prop. 1 の (b) から ξ は $\in S \cup T$ であることがわかる。また (a) により $j=1, 2$ について

$$\left| (\xi - \eta_j) - \frac{a_{jt}}{b_{jt}} \right| \ll \exp \left\{ -c_j^{-1} \cdot H \left(\frac{a_{jt}}{b_{jt}} \right) \right\} \quad (t=1, 2, \dots).$$

各 j について $\frac{a_{jt}}{b_{jt}}$ たち ($t=1, 2, \dots$) は相異なる有理数であるから、この不等式によって $\xi - \eta_j \in L$ ($j=1, 2$) であることがわかる。これで Prop. 2 が示された。

Main Theorem は、この Prop. 2 から容易に出る：
 $\eta_1 \in S$, $\eta_2 \in T$ であるとしよう。Prop. 2 の ξ は S 数または T 数であるが、 ξ が

もし S 数なら $\xi \in S$, $(-\eta_2) \in T$, $\xi + (-\eta_2) \in L$;

もし T 数なら $(-\eta_1) \in S$, $\xi \in T$, $(-\eta_1) + \xi \in L$

となって、いずれにしても定理が成り立つことがわかる。

実数の部分集合 $E, F \subset \mathbb{R}$ に対し

$$E + F := \{x + y \mid x \in E, y \in F\}$$

とすれば、われわれの Main Theorem は

$$(S + T) \cap L \neq \phi$$

と表現することができる。それでは

$S + T$ は実数のどのような部分集合か?

これは興味深い問題だ。よく知られているように、
P. Erdős は

$$L + L = \mathbf{R}$$

を証明した(1962)。 $S + T$ も $= \mathbf{R}$ か? — いやこれは
間違っている。実際、Mahlerの定理から直ちに

$$S + T \subset \mathbf{R} - A$$

がわかるからだ。ここで等号が成り立つかどうか? 今の
ところ私は $S + T = \mathbf{R} - A$ であろうと思っている。
